

Dunkl-Williams 型不等式と幾何学的定数

高橋泰嗣 (Yasuji TAKAHASHI)

岡山県立大学・情報工学部

(Department of System Engineering, Okayama Prefectural University)

加藤幹雄 (Mikio KATO)

九州工業大学・工学研究院

(Department of Basic Sciences, Kyushu Institute of Technology)

X をノルム空間, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ とする.

Dunkl-Williams inequality [2]: For any nonzero $x, y \in X$

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{4\|x - y\|}{\|x\| + \|y\|}. \quad (1)$$

X の幾何学的性質は単位球面 S_X の形状で決定されることを念頭において, $u = \frac{x}{\|x\|}$, $v = -\frac{y}{\|y\|}$, $t = \frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}$ とおくと, この不等式は次のように書き換えられる:

$u, v \in S_X$, $0 < t < 1$ に対し

$$\|u + v\| \leq 4\|tu + (1 - t)v\| \quad (2)$$

この不等式は Dunkl-Williams 不等式と同値である. X が内積空間のときは, $u, v \in S_X$, $0 < t < 1$ に対し

$$\|tu + (1 - t)v\| = \|(1 - t)u + tv\|$$

が成り立つことから

$$\|u + v\| \leq 2\|tu + (1 - t)v\|$$

が成立する. そこで, $0 \leq t \leq 1$ を固定し, 任意の $u, v \in S_X$ に対して

$$\|u + v\| \leq D\|tu + (1 - t)v\| \quad (3)$$

が成立するような定数 D と X の幾何学的性質との関係を考察する. この不等式を **Dunkl-Williams 型不等式** と呼ぼう. また, 最良定数 D を $DW(X, t)$ で表し, そ

れを **Dunkl-Williams 型定数** と言うことにする. 上記の考察から, 任意のノルム空間 X と任意の $0 \leq t \leq 1$ に対し

$$2 \leq DW(X, t) \leq 4$$

であることが分かる. 明らかに, $DW(X, 0) = DW(X, 1/2) = DW(X, 1) = 2$, $DW(X, t) = DW(X, 1-t)$ である.

Remark 1. 最近, Melado-Fuster-Navarro [4] は Dunkl-Williams 定数 $DW(X)$ を導入して X の幾何学的性質を考察した. 任意のノルム空間 X に対して

$$2 \leq DW(X) \leq 4$$

であり, $DW(X) = 2$ は内積空間を特徴づける (cf. [3], [6], see also [1]). また, $DW(X) < 4$ により uniform non-square な空間が特徴づけられること (cf. [4]) 等が知られている.

$$DW(X) = \sup\{DW(X, t) : 0 \leq t \leq 1\} \quad (4)$$

であることは容易に分かる.

Theorem 1. For $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ with $\alpha + \beta = 1$, let $\lambda = \max(\alpha, \beta)$. Then for any normed space X and for any $u, v \in S_X$

$$\|u + v\| \leq \frac{1}{\lambda} \|\alpha u + \beta v\| + 2 - \frac{1}{\lambda}. \quad (5)$$

Proof. $\alpha \leq \beta$ とすると $\lambda = \beta$. このとき, $u + v = \frac{1}{\beta}(\alpha u + \beta v + \beta u - \alpha u)$ より結論を得る.

Remark 2. Theorem 1 より次の Maligranda 不等式 [7] が得られる.

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{\|x - y\| + \left| \|x\| - \|y\| \right|}{\max(\|x\|, \|y\|)}. \quad (6)$$

実際, $u = x/\|x\|, v = -y/\|y\|, \alpha = \|x\|/(\|x\| + \|y\|), \beta = \|y\|/(\|x\| + \|y\|)$ とおけばよい. なお, $\lambda = \min(\alpha, \beta) > 0$ のとき, Theorem 1 の逆不等式が得られる.

Corollary 1. For $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ with $\alpha + \beta = 1$, let $\lambda = \max(\alpha, \beta)$. Then for any normed space X and for any $u, v \in S_X$

$$\|u + v\| \leq \frac{2}{\lambda} \|\alpha u + \beta v\|. \quad (7)$$

Remark 3. 上記の不等式において等号が成立する条件を考える. $\lambda = 1/2$ のときは, 等号成立条件は $u + v = 0$ である. X が strictly convex のとき, $\lambda \neq 1/2$

で等号が成立するのは, $\lambda = 1, u = v$ の場合のみである. 従って, $\lambda \neq 1/2, \lambda \neq 1$ のとき等号が成立するような $u, v \in S_X$ が存在するならば, X は strictly convex ではない.

Corollary 2. *For any normed space X and for any $0 \leq t \leq 1$*

$$2 \leq DW(X, t) \leq \frac{2}{\max(t, 1-t)}. \quad (8)$$

ノルム空間 Y が *finitely representable in X* であるとは, Y の任意の有限次元部分空間 F と任意の $\lambda > 1$ に対して, X の有限次元部分空間 E で, $\dim E = \dim F$ かつ $d(E, F) < \lambda$ を満たすものが存在することである. ここで $d(E, F)$ は E と F の Banach-Mazur distance である: $d(F, E) := \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| : T \text{ is an isomorphism of } F \text{ onto } E\}$.

Theorem 2. *Let Y be finitely representable in X . Then $DW(Y, t) \leq DW(X, t)$ for all $0 \leq t \leq 1$ and hence $DW(Y) \leq DW(X)$.*

Example. Let $Y = (R^2, \|\cdot\|_\infty)$. Then, for each $0 \leq t \leq 1$ there exists $u, v \in S_Y$ such that

$$\|u + v\| = \frac{2}{\lambda} \|tu + (1-t)v\|,$$

where $\lambda = \max(t, 1-t)$. Hence we have

$$DW(Y, t) = 2/\max(t, 1-t)$$

for any $0 \leq t \leq 1, t \neq 1/2$. If Y is finitely representable in X , then

$$DW(X, t) = 2/\max(t, 1-t).$$

Of course,

$$DW(X, 1/2) = DW(Y, 1/2) = 2.$$

$J(X)$ を X の James 定数とする. すなわち

$$J(X) = \sup\{\min(\|u - v\|, \|u + v\|) : u, v \in S_X\}.$$

$J(X) < 2$ のとき X は uniformly non-square であるという. [4] で

$$DW(X) \leq 2 + J(X).$$

が示された. これより X が uniformly non-square であれば

$$DW(X, t) \leq DW(X) < 4 \quad \text{for all } 0 \leq t \leq 1$$

となる.

Corollary 3. *Let X be not uniformly non-square. Then*

$$DW(X, t) = 2/\max(t, 1 - t) \tag{9}$$

for all $0 \leq t \leq 1$, $t \neq 1/2$.

Theorem 3. *X is uniformly non-square if and only if there exists $0 < t < 1$ ($t \neq 1/2$) such that*

$$DW(X, t) < 2/\max(t, 1 - t). \tag{10}$$

References

- [1] G. Benítez and D. Yáñez, Middle points, medians and inner products, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1725-1734.
- [2] C. F. Dunkl and K. S. Williams, A simple inequality, Amer. Math. Monthly **71** (1964), 53-54.
- [3] N. I. Gurari and Y. I. Sozonov, On normed spaces which have no basis of the unit sphere, Math. Notess **7** (1970), 187-189.
- [4] A. Jiménez-Melado, E. Llorens-Fuster and E. M. Mazcunán-Navarro, The Dunkl-Williams constant, convexity, smoothness and normal structure, to appear.
- [5] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, Sharp triangle inequality and its reverse in Banach spaces, Math. Inequal. & Appl. **10** (2007), 461-470.
- [6] W. A. Kirk and M. F. Smiley, Another characterization of inner product spaces, Amer. Math. Monthly **72** (1964), 890-891.
- [7] L. Maligranda, Simple norm inequalities, Amer. Math. Monthly **113** (2006), 256-260.
- [8] J. L. Massera and J. J. Schäffer, Linear differential equations and functional analysis I, Ann. of Math. **67** (1958), 517-573.
- [9] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and A. M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1993.