

群多様体に附随する

bialgebraの構造について

広島大 理 柳原 弘 志

## §1 local semi-derivations

$k$  を標数  $p > 0$  の体とし,  $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$  を  $k$  を含む 局所環で,  $\mathcal{O}/\mathcal{M} \cong k$  とする.  $D$  を  $\mathcal{O}$  から  $k$  への  $k$ -linear map で, 次の条件をみたすとき, height  $r$  の local semi-derivation という.

$$i) \quad D(fg) = D(f)g(0) + f(0)D(g), \quad f \in \mathcal{O}, g \in \mathcal{O}^{p^r}$$

但し  $f(0), g(0)$  は  $k$  の元で  $f - f(0) \in \mathcal{M}, g - g(0) \in \mathcal{M}$  となるものである. 更に

$$ii) \quad D(\mathcal{O}^{p^r}) = 0$$

をみたすとき,  $D$  は special semi-derivation of ht.  $r$  とよぶ。

$\mathcal{L}_r(\mathcal{O})$  で ht.  $r$  の semi-derivation 全体のなす  $k$  上のベクトル空間,  $\mathcal{G}_r(\mathcal{O})$  で ht.  $r$  の special semi-derivation 全体のなす  $\mathcal{L}_r(\mathcal{O})$  の部分空間をあらわすと

$$G_r(\mathcal{O}) \subset D_r(\mathcal{O}) \subset G_{r+1}(\mathcal{O})$$

が容易に分る。

Proposition 1.  $\mathcal{O}$  が 正則局所環で rank が  $n$  なら

$$\dim_k G_r(\mathcal{O}) = p^{nr} - 1, \quad \dim_k D_r(\mathcal{O}) = p^{nr} - 1 + n.$$

## §2. 代数函数体の semi-derivations

$k$  を標数  $p > 0$  の体で  $K$  を  $k$  上有限生成かつ分離的な拡大体とし,  $K_r = k K^{p^r}$  とおく。このとき,  $K$  の  $k$ -linear endomorphism  $D$  が次の条件をみたすとき, ht.  $r$  の  $K$  の  $k$  上の semi-derivation という。

$$i) \quad x \in K_r \text{ ならば } D(x) \in K_r$$

$$ii) \quad D(xy) = D(x)y + xD(y), \quad x \in K, y \in K_r.$$

更に  $D$  が

$$iii) \quad D(K_r) = 0$$

をみたせば, special という。

$D_r(K/k)$  で ht.  $r$  の  $K/k$  の semi-derivation 全体の集合をあらわせば, これは  $K_r$  上のベクトル空間になる。同様に  $G_r(K/k)$  で ht.  $r$  の  $K/k$  の special semi-derivation 全体をあらわせば,  $G_r(K/k)$  は  $K$  上のベクトル空間になる。

そして,  $G_r(K/k) \subset \mathcal{O}_r(K/k) \subset G_{r+1}(K/k)$

が 成り立つ.

$\{x_1, \dots, x_n\}$  を  $K/k$  の分離超越基とすると,

$$\begin{cases} D_{e_1 \dots e_n}^{(r)}(x_1^{e_1} \dots x_n^{e_n}) = 1 \\ D_{e'_1 \dots e'_n}^{(r)}(x_1^{e'_1} \dots x_n^{e'_n}) = 0 \end{cases}, \quad (e_1, \dots, e_n) \neq (e'_1, \dots, e'_n)$$

$$( \text{但し } 0 \leq e_i, e'_j < p^r, \sum_{i=1}^n e_i > 0, \sum_{j=1}^n e'_j > 0 )$$

をみたす  $D_{e_1 \dots e_n}^{(r)}$  が  $G(K/k)$  に存在し, これらが,

$G(K/k)$  の  $K$  上の基になることが分る. 特に,  $\dim_K G(K/k)$

$= p^{nr} - 1$  となる. (但し  $n = \text{tr. deg}_k K$ ). 更に,

$$\mathcal{O}_r(K/k) = G_r(K/k) \oplus \sum_{i=1}^n K_r E_{i,r} \quad \text{となる } K_r \text{ 上 1 次独立な}$$

$\mathcal{O}_r(K/k)$  の元  $E_{1,r}, \dots, E_{n,r}$  が 存在することが分る.

次に  $k$  を完全体,  $X$  を  $k$  で定義された代数多様体で  $K$  を  $X$  の  $k$  上の有理函数体とする.  $x \in X$  に対し  $\mathcal{O}_{x,X}$  を  $X$  の  $x$  における stalk とし  $K$  の部分環と同一視する. このとき  $D \in \mathcal{O}_r(K/k)$  が  $D(\mathcal{O}_{x,X}) \subset \mathcal{O}_{x,X}$  をみたせば,  $D$  は  $x$  で regular であるという. 特に  $x$  が  $k$ -有理的で,  $X$  の単純点であるとする.  $\{t_1, \dots, t_n\}$  を  $\mathcal{O}_{x,X}$  の正則パラメータ系とすると 次のことが分る.

Proposition 2.  $D \in \mathcal{O}_r(K/k)$  ( resp.  $D \in G_r(K/k)$  )

が  $x$  が regular であるための必要十分条件は  $D(t_1^{e_1} \dots t_n^{e_n})$  と  $D(t_j^{p^r})$  (resp.  $D(t_1^{e_1} \dots t_n^{e_n})$ ) が  $\theta_{x,x}$  に含まれることである。但し  $0 \leq e_i < p^r$ .

$\mathcal{D}_r(X, x)$  で  $x$  が regular な  $\mathcal{D}_r(K/k)$  の元全体の集合をあらわすと,  $\mathcal{D}_r(X, x)$  は  $\theta^{(n)}$ -module になる。但し,  $\theta^{(n)} = \theta_{x,x} \cap K^r$ . 同様に  $\mathcal{G}_r(X, x)$  を  $\mathcal{G}_r(K/k)$  の  $x$  が regular なものの全体とすると,  $\theta_{x,x}$ -module になることが分る。そして, Prop. 2 より 次の結果を得る。

Proposition 3.  $X, x, \{t_1, \dots, t_n\}$  を Prop. 2 と同様とすると,  $\mathcal{G}_r(X, x)$  は rank  $p^{nr-1}$  の free  $\theta_{x,x}$ -module,  $\mathcal{D}_r(X, x) = \mathcal{G}_r(X, x) \oplus \sum_{i=1}^n \theta^{(n)} E_{i,r}$  となる。

次に  $\theta_{x,x}$  の local semi-derivation と  $\mathcal{D}_r(X, x)$  の関係を考える。  $D \in \mathcal{D}_r(X, x)$  のとき,  $f \in \theta_{x,x}$  に対して

$$D_x(f) \equiv D(f)(x)$$

とおくと, これは  $k$  の元で  $D_x$  は  $\mathcal{D}_r(\theta_{x,x})$  に属することから容易に分る。  $D_x$  を  $D$  の  $x$  における local component という。明らかに,  $D \in \mathcal{G}_r(X, x)$  なら  $D_x \in \mathcal{G}_r(\theta_{x,x})$  になる。 $\pi_x$  で, この  $\mathcal{D}_r(X, x)$  から  $\mathcal{D}_r(\theta_{x,x})$  への対応  $D \rightarrow D_x$  を

あらわすことにする。

Proposition 4.  $\pi_x: G_r(X, x) \rightarrow G_r(\theta_{x,X})$  は surjection で, kernel は,  $\mathfrak{m}_{x,X} G_r(X, x)$  となる。

但し,  $\mathfrak{m}_{x,X}$  は  $\theta_{x,X}$  の極大イデアルである。

$X, Y$  を  $k$  で定義された代数多様体で,  $\alpha$  を  $X \rightarrow Y$  の  $k$ -morphism,  $x$  を  $X$  上の  $k$ -有理点とする。  $y = \alpha(x)$  とすると,  $\alpha^*: \theta_{y,Y} \rightarrow \theta_{x,X}$  なる  $k$ -準同型を得る。

$D \in \mathcal{D}_r(\theta_{x,X})$  とするとき, 容易に分るように,  $D \circ \alpha^*$  は  $\mathcal{D}_r(\theta_{y,Y})$  の元である。このとき,  $\alpha_*(D) = D \circ \alpha^*$  と定義する。  $\alpha_*$  を tangential map とよぶ。

### §3. 群多様体の不変 semi-derivations

以後,  $k$  は標数  $p > 0$  の代数的閉体とする。

$G$  を  $k$  で定義された群多様体,  $K = k(G)$  を  $G$  の  $k$  上の有理函数体とする。  $a$  を  $G$  の  $k$ -有理点とし,  $L_a$  を  $x \rightarrow ax$  なる  $G$  から  $G$  への  $k$ -morphism とする。このとき,  $L_a$  により,  $K = k(G)$  の  $k$ -自己同型  $L_a^*$  が引きおこされる。

$K/k$  の semi-derivation  $D$  に対して,  $D L_a^* = L_a^* D$

なる関係が、 $G$  のすべての  $k$ -有理点に対してなりたつとき、 $D$  を左不変な semi-derivation とよぶ。これは 次の条件と同値である。

i)  $D$  は  $G$  の各点で regular

ii)  $a, b$  を  $G$  の  $k$ -有理点とすると、 $D_{ab} = (L_a)_*(D_b)$ 。

更に、 $G$  がアーベル多様体であれば、i) から ii) は従う。

$\mathcal{D}(G)$  を  $G$  の左不変な semi-derivation 全体の集合をあらわすことにすると、 $\mathcal{D}_r(G) = \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}_r(k(G)/k)$ ,  
 $\mathcal{D}_r(G) = \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}_r(k(G)/k)$  とおく。次のことが分る。

(i)  $e$  を  $G$  の単位元とすると、 $\pi_e: \mathcal{D}_r(G) \rightarrow \mathcal{D}_r(\theta_{e,G})$  は  $k$ -同型、特に、 $\mathcal{D}_r(G)$  は  $k$  上  $p^{nr}-1$  次元の  $k$  上のベクトル空間となる。(但し、 $n = \dim G$ )。又、 $\{t_1, \dots, t_n\}$  を  $\theta_{e,G}$  の正則パラメーター系とすると、

$$\begin{cases} D_{e_1, \dots, e_n}(t_1^{e_1}, \dots, t_n^{e_n}) = 1 \\ D_{e_1, \dots, e_n}(t_1^{e'_1}, \dots, t_n^{e'_n}) = 0 \text{ for } (e_1, \dots, e_n) \neq (e'_1, \dots, e'_n) \end{cases}$$

となる  $\mathcal{D}_r(\theta_{e,G})$  の元  $D_{e_1, \dots, e_n}$  が存在するか、( $0 \leq e_i < p^n$ )  
 これに対して、 $I_{e_1, \dots, e_n} \in \mathcal{D}_r(G)$  を

$$\pi_e(I_{e_1, \dots, e_n}) = D_{e_1, \dots, e_n}$$

となるようにとる。

(E)  $H_r(G) = k \oplus \gamma_r(G)$  は  $k$  上の Hopf algebra の構造をもつ。 algebra としての構造は,  $\text{Hom}_k(K, K)$  の sub-algebra としての構造であり, coalgebra としての構造は

$$\Delta(I_{e_1} \dots e_n) = \sum_{(e') + (e'') = (e)} I_{e_1' \dots e_n'} \otimes I_{e_1'' \dots e_n''}$$

(但し和は  $e_i = e_i' + e_i''$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) をみたすもの全体にわたるものとする。又  $I_{\circ \dots \circ} = \text{identity}$ .)

によって定義される。antipode は  $x \rightarrow x^{-1}$  なる  $G \rightarrow G$  の  $k$ -morphism から自然に与えられる。この Hopf algebra は cocommutative である。又,  $H(G) = \bigcup_{r=1}^{\infty} H_r(G) = k \oplus G(G)$  とおくと, これに cocommutative Hopf algebra の構造が入ることは明らかである。

(II)  $G$  が commutative であるための必要十分条件は,  $H(G)$  が commutative algebra になることである。

#### §4. Purely inseparable isogenies

$G, G'$  を  $k$  で定義された群多様体,  $\alpha$  を  $G \rightarrow G'$  の isogeny とする。このとき,  $L = k(G')$  は  $K = k(G)$  の部分体と同一視出来る,  $A_\alpha = \text{Hom}_L(K, k)$  とおき,  $N(\alpha) \in A_\alpha$  の元  $u$  で  $uL_\alpha^* = L_\alpha^*u$  が  $G$  のすべての  $k$ -有理点  $a$  に対してなりたつ

ものからなる  $k$ -subalgebra とする。このとき,  $N(\alpha)^+ = \{u \in N(\alpha) \mid u(1) = 0\}$  とおくとき,  $L = \{f \in K \mid u(f) = 0 \text{ for } u \in N(\alpha)^+\}$  となり, かつ  $N(\alpha) = k \oplus N(\alpha)^+$  で  $k$  上の Hopf algebra となることから Cartier によって知られている。特に  $\alpha$  が purely inseparable isogeny のとき, この  $N(\alpha)$  は上で述べた  $H(G)$  の Hopf subalgebra になることが分る。更に  $a \in G$  の  $k$ -有理点とすると,  $R_a$  を  $R_a(x) = xa$  なる  $G \rightarrow G$  の  $k$ -morphism とする。  $u \in \text{Hom}_k(K, K)$  に対し,  $\text{ad}_a(u) = R_a^{*-1} u R_a^*$  とおき,  $\text{ad}$  を  $G$  の adjoint 表現という。このとき 次の定理を得る。

Theorem 1.  $G \in k$  で定義された群多様体とあるとき,  $G$  の purely inseparable isogeny  $\alpha: G \rightarrow G'$  と,  $H(G)$  の adjoint 表現で不変な有限次元の Hopf subalgebra は (2.1) に対応する。

$\alpha$  を  $G \rightarrow G'$  の purely inseparable isogeny とし,  $N(\alpha)$  をその対応する  $H(G)$  の Hopf subalgebra とする。  $N(\alpha)$  は有限次元の cocommutative Hopf algebra であるから, その linear dual  $N(\alpha)^D$  は commutative Hopf algebra になり,  $\text{Spec}(N(\alpha)^D)$  は finite group  $k$ -scheme の構造をもつ。



一方,  $e'$  を  $G'$  の単位元,  $m'$  を  $\mathcal{O}_{e', G'}$  の極大イデアル  
 とするとき,  $\mathcal{O} = \alpha^*(m') \mathcal{O}_{e, G}$  とおくと,  $R = \mathcal{O}_{e, G} / \mathcal{O}$   
 は Artin local ring となる。そして,  $N(\alpha)^D$  と  $R$  は  $k$ -  
 algebra として同型であることが示される。又  $N(\alpha)^D$  の co-  
 algebra としての構造は  $G$  の group multiplication から導  
 かれることが分る。更に, この  $\text{Spec}(N(\alpha)^D)$  が  $\alpha: G \rightarrow G'$  の  
 核とみなされることが分る。

### §5. Purely inseparable isogeny と modular 拡大.

$G, G', \alpha$  等は §4 と同じとする。  $L = k(G')$  と  $K = k(G)$   
 の部分体と同一視しておく。このとき, Hopf algebra  $N(\alpha)$   
 に対して,  $w: N(\alpha) \otimes_k K \rightarrow K$  と  $w(u \otimes f) = u(f)$  によ  
 って定義すると,  $w$  は Sweedler の意味で  $k(G)$  から  $k(G)$  に  
 measure してゐる。このことから  $K/L$  は modular 拡大  
 であることが分る。一方, 代数函数体の modular 拡大につ  
 いて次の結果が得られる。

Proposition 5.  $k$  を完全体,  $L$  を  $k$  上の代数函数体  
 とし,  $K$  は  $L$  の purely inseparable modular 拡大とする。  $K =$   
 $L(x_1) \otimes_L \cdots \otimes_L L(x_s)$ ,  $[L(x_i):L] = p^{e_i}$  ならば,  $L$  の元

$t_{s+1}, \dots, t_n$  があって,  $\{x_1, \dots, x_s, t_{s+1}, \dots, t_n\}$  が  $K/k$  の分離超越基,  $\{x_1^{p^{e_1}}, \dots, x_s^{p^{e_s}}, t_{s+1}, \dots, t_n\}$  が  $L/k$  の分離超越基となる.

このことから, 次の結果が容易に分る.

Theorem 2.  $k$  を代数的閉体とし,  $G, G' \in k$  で定義された群多様体,  $\alpha \in G \rightarrow G'$  の purely inseparable isogeny で  $k$  上で定義されているとする. このとき,  $\theta_{e, G}$  の適当な正則パラメタ一系  $\{t_1, \dots, t_n\} \in$  とれば,  $\{t_1^{p^{e_1}}, \dots, t_s^{p^{e_s}}, t_{s+1}, \dots, t_n\}$  が  $\theta_{e', G'}$  の正則パラメタ一系となる.

そして,  $[k(G) : k(G)] = p^{e_1 + \dots + e_s}$ . 又,  $N(\alpha)^D$  は  $k$ -algebra として,  $k[x_1, \dots, x_s] / (x_1^{p^{e_1}}, \dots, x_s^{p^{e_s}})$  と同型になる.

#### References

- [1] H. Yanagihara, "On the structure of bialgebras attached to group varieties", to appear in J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I.
- [2] K. Kosaki and H. Yanagihara, "On purely inseparable extensions of algebraic function fields", to appear in ibid.