

群環の高さ 0 の表現加群と Auslander-Reiten 連結成分について

大阪市立大学理学部 河田成人

Shigeto Kawata

Department of Mathematics, Osaka City University

G を有限群とし, p は G の位数を割り切る素数で, $(K, \mathcal{O}, k)$ を p -モジュラー系とする. 即ち, K は離散乗法付値 ν を持つ完備離散付値体で標数は 0 であるものとし, $\mathcal{O}$ は ν の付値環でその唯一の極大イデアル $J(\mathcal{O})$ は π で生成されていて ($\pi\mathcal{O} = J(\mathcal{O})$), 剰余体 $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ の標数は p であるとする. R によって $\mathcal{O}$ または k を表すことにし, RG で群 G の係数環 R 上の群環を表す. ここで RG 上の表現加群 (RG -lattice) とは, R 上有限生成で自由な (右) RG -加群を意味するものとする. なお, $(K, \mathcal{O}, k)$ は “十分に大きい” と仮定する. 正確には次の条件 (#) を満たしているとする:

- p -モジュラー系の拡大 $(K, \mathcal{O}, k) > (K', \mathcal{O}', k' = \mathcal{O}'/\pi'\mathcal{O}')$ があって,
(#) $k' = k = \bar{k}$ は代数閉体であり, ν の ν' 上の分岐指数は 3 以上 (即ち $\pi' \in \pi^3\mathcal{O}$) である.

群環 RG を直既約な両側イデアルの直和に分解したときの直既約因子 B を RG のブロック (イデアル) と呼ぶ. このとき, ある中心的原始冪等元 $e (= e^2 \in Z(RG))$ が存在して $B = (RG)e$ と書ける. 直既約な RG -表現加群 L は, 実質的にはあるブロック B 上の表現加群である ($L = Le$). このことを強調したいときには, L を B -表現加群と呼び, 「 L は B に属する」と言う. 有限群の表現に関する用語について詳しくは永尾-津島の本 [NT] を参照して下さい.

さて, ブロック B の Auslander-Reiten クイバー $\Gamma(B)$ とは, 次のように点の集合 $\Gamma(B)_0$ と矢の集合 $\Gamma(B)_1$ を定義することによって構成される有向グラフのことである:

- ・点の集合 $\Gamma(B)_0 = \{ \text{直既約 } B\text{-表現加群の同型類 } [L] \}$
- ・矢の集合 $\Gamma(B)_1 = \{ [M] \rightarrow [L] \text{ “既約写像”} \}$

ここで準同型写像 $f: M \rightarrow N$ が既約写像とは, $f = gh$ と合成写像の形で書けるのは g が分裂全射か h が分裂単射という自明な場合しかないことをいう. 既約写像は概分裂列と密接に関係している. 表現加群の完全列 $\mathcal{A}: 0 \rightarrow N \rightarrow M \xrightarrow{f} L \rightarrow 0$ は次の 3 条件を満たすときに, 概分裂列と呼ばれる:

- (1) L と N は直既約 ;
- (2) $\mathcal{A}$ は分裂していない ;
- (3) 任意の分裂全射でない準同型写像 $g: X \rightarrow L$ に対し, ある準同型写像 $h: X \rightarrow M$ が存在して $g = fh$ が成り立つ.

任意の射影的でない直既約表現加群 L に対し, L を最終項とするような概分裂列が一意的に存在することが Auslander-Reiten によって示された. 概分裂列の一意性から, L を最終項とするような概分裂列を $\mathcal{A}(L): 0 \rightarrow \tau L \rightarrow m(L) \rightarrow L \rightarrow 0$ と書き表すことにする (τ は Auslander-Reiten 移動と呼ばれている). $R = \mathcal{O}$ のときは $\tau = \Omega$ (ここで Ω は Heller 作用素, 即ち ΩL は L の projective cover の核: $0 \rightarrow \Omega L \rightarrow P_L \rightarrow L \rightarrow 0$) で, $R = k$ のときは $\tau = \Omega^2$ であることが知られている. $m(X) = \bigoplus_{i=1}^t M_i$ と直既約分解したとき, 次が成り立つ.

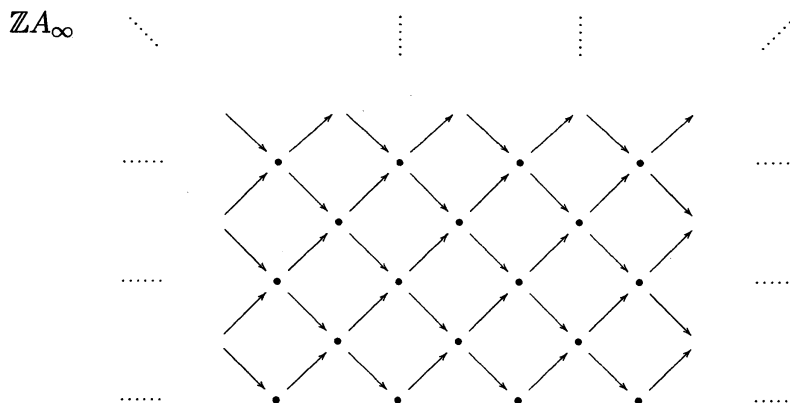
命題 [Auslander-Reiten] $0 \rightarrow N \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t M_i \xrightarrow{(f_1 \cdots f_t)} L \rightarrow 0$ を概分裂列とする.

- (1) 各 $f_i: M_i \xrightarrow{f_i} L$ ($i = 1, \dots, t$) は既約写像である.
- (2) 直既約加群 M から L への既約写像が存在すれば, M はある M_i に同型である.

この命題から, おおまかには, Auslander-Reiten クイバーとは概分裂列を繋ぎ合わせた有向グラフであるといえる. 多元環の Auslander-Reiten 理論については, [ARS], [ASS], [B] などの本や論説 [Y] を参照して下さい.

今後, Auslander-Reiten クイバーの連結成分を, AR-成分と短く呼ぶことにする. 一般に, AR-成分 θ のグラフとしての形状は, tree と呼ばれる樹形図 T から構成される被覆クイバー $\mathbb{Z}T$ を $\mathbb{Z}T$ の自己同型からなる群 Π で剰余したものとして得られる ($\theta \cong \mathbb{Z}T/\Pi$) [Riedtmann structure theorem]. T は θ から一意的に定まり, θ の tree class と呼ばれる. 例えば, $T = A_\infty$ の場合には $\mathbb{Z}A_\infty$ は次のようなクイバーである:

$A_\infty: \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$



群環 RG (R は $\mathcal{O}$ または k) の tree class については Webb が次の定理を示した [We].

定理 [Webb] $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ は代数閉体で, 群環 RG のブロック B は無限表現型であるとする. このとき, B の AR-成分 θ の tree class は A_∞ かまたは

$$D_\infty: \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \cdots, \quad A_\infty^\infty: \cdots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \cdots$$

か, あるいは Euclidean diagram である.

また, もし θ が射影的 RG -表現加群を含んでいなければ, θ の tree class は A_∞ , D_∞ , A_∞^∞ のいずれかである.

ブロック B が無限表現型であるとは, 直既約 B -表現加群の同型類が無限個存在するときを言う. kG のブロック B が無限表現型となるのは, B の“不足群”が巡回群でないときである. さらに, $p = 2$ で不足群が dihedral, semidihedral, generalized quaternion ならば tame 表現型であり, それ以外の時は wild 表現型であることが知られている ([E1] 参照). また $\mathcal{O}G$ のブロック B については, その不足群が巡回群でないかまたは位数が p^3 以上であれば無限表現型であることが知られている (詳しくは Dieterich[D2] 参照).

そして, モジュラー表現 ($R = k$) の場合には Erdmann が次の重要な定理を証明した [E2].

定理 [Erdmann] もし k が代数閉体で kG のブロック B が wild 表現型であれば, B の任意の AR-成分の tree class は A_∞ である.

なお, kG のブロック B が有限表現型のとき, B の AR-クイバーの tree class は A_n である. また, $p = 2$ で B の不足群が dihedral または semidihedral ならば, B の tube ではない AR-成分の tree class は A_∞^∞ , $\tilde{A}_{12}$, D_∞ のいずれかである [E2].

一方で, 整数表現 ($R = \mathcal{O}$) の場合には, $\mathcal{O}G$ の有限表現型のブロック B に対しては, Dieterich[D1] や Wiedemann[Wi1], [Wi2] らが Auslander-Reiten クイバーを調べている.

そこで, 以下では $\mathcal{O}G$ の無限表現型のブロック B の AR-成分について考察していきたい. 係数環 $\mathcal{O}$ は冒頭に述べた条件 (#) を満たすものと仮定する. まず, B の AR-成分で tree class の知られている例を列挙しておこう.

- 例** (i) 自明な表現加群 $\mathcal{O}_G$ を含む AR-成分の tree class は A_∞ である [IK].
(ii) 自明なソースを持つ表現加群を含む AR-成分の tree class は A_∞ である [K4].
(iii) 階数が p で割り切れず, $\text{mod } \pi$ で簡約化しても直既約であるような B -表現加群を含む AR-成分の tree class は A_∞ である [K5].

自明な加群 $\mathcal{O}_G$ とは、 $\mathcal{O}$ に群 G を (右から) 自明に作用させることで得られる $\mathcal{O}G$ -加群のことである ($x \in \mathcal{O}$, $g \in G$ に対し $xg = x$). また、自明なソースを持つ加群とは、ソースが自明な加群である直既約加群のことをいう。(換言すれば、ある置換加群の直既約因子となっている表現加群のことである。ソースについては後述する.)

定理 [K3] 係数環 $\mathcal{O}$ は条件 (#) を満たし、 B は $\mathcal{O}G$ の無限表現型のブロックで、 Θ を $\Gamma(B)$ の AR-成分とする。もし Θ が Heller 表現加群を含めば、 Θ の tree class は A_∞ である。

群多元環 kG 上の加群 V に対して、 V を整群環 $\mathcal{O}G$ 上の加群と見なして射影被覆 P_V を取ったとき、その核 Z_V を V の Heller 表現加群と呼ぶ：

$$0 \rightarrow Z_V \rightarrow P_V \rightarrow V \rightarrow 0 \text{ (完全).}$$

ここで P_V は $\mathcal{O}G$ -表現加群なので、その $\mathcal{O}$ -部分加群である Z_V も $\mathcal{O}G$ -表現加群である。

例として、単純な kG -加群 S の Heller 表現加群を考えよう。 S の kG -加群としての射影被覆 $\bar{P}$ は、 $\mathcal{O}G$ -加群 P に持ち上げ可能である： $P/\pi P \cong \bar{P}$ 。即ち、 P が S を $\mathcal{O}G$ -加群と見たときの射影被覆である。よって P の根基 $\text{rad}(P)$ が S の Heller 表現加群である。 $(K, \mathcal{O}, k)$ が条件 (#) を満たしているとき、Heller 表現加群は直既約である [K2, K2']。

系 係数環 $\mathcal{O}$ は条件 (#) を満たし、 B は $\mathcal{O}G$ の無限表現型のブロックとする。このとき、 $\Gamma(B)$ の AR-成分の tree class は A_∞ , D_∞ , A_∞^∞ のいずれかである (Euclidean の可能性を除外できる)。

証明 もし AR-成分 Θ が射影加群を含んでいなければ、 Θ の tree class は Webb の定理から A_∞ , D_∞ , A_∞^∞ のいずれかである。また、もし AR-成分 Θ がある射影加群 P を含めば、(埋込 $\text{rad}(P) \hookrightarrow P$ は既約写像なので) Θ は P の根基 $\text{rad}(P)$ も含む。 $\text{rad}(P)$ は Heller 表現加群であるので、上の定理から、 Θ の tree class は A_∞ である。□

B を群環のブロックとし、 D を B の不足群とする。このとき、 M が B 上の表現加群であれば、ある RD -加群 S が存在して、 M は誘導加群 $S \otimes_{RD} RD$ の直和因子として現れる。ブロックの不足群は p -群であることが知られている。 p^a を G の Sylow p -部分群の位数とし、 p^d を不足群 D の位数とすれば、 $\text{rank}_R M$ は p^{a-d} で割り切れることが分かる。

定義 B 上の表現加群 M の高さ $h(M)$ とは

$$(\text{rank}_R M)_p = p^{a-d+h(M)}$$

を満たす非負整数として定義する。ここで $(\text{rank}_R M)_p$ は $(\text{rank}_R M)$ の p -part を表す。

直既約な RG -表現加群 L に対して、ヴァーテックスとソースが定義される。 G の部分群からなる集合

$$\{ H \leq G \mid \exists RH\text{-表現加群 } S \text{ が存在して } L \text{ は誘導加群 } S \otimes_{RH} RG \text{ の直和因子} \}$$

の極小元を L のヴァーテックスと呼ぶ。ヴァーテックスは共役を除いて一意に決まる。また H が L のヴァーテックスのとき、 $S \otimes_{RH} RG$ が直和因子として L を持つような RH -加群 S を L の H -ソースと呼ぶ。ソースも共役を除いて一意に決まる。

高さ 0 の表現加群について、次が成り立つ（証明については [Kn, Proof of Corollary 4.7] など参照）。

命題 ブロック B は高さ 0 の表現加群を持つ。高さ 0 の直既約な表現加群のヴァーテックスは B の不足群 D と一致し、その D -ソースの階数は p で割り切れない。

Carlson-Jones[CJ] は $\mathcal{O}G$ 上の表現加群の exponent と、exponential property という特性を定義した。

定義 [Carlson-Jones] $\mathcal{O}G$ -表現加群 L に対し、 $\pi^a \text{Id}_L (\in \text{End}_{\mathcal{O}G}(L))$ が projective となる（即ち、ある射影加群を通過する）ような最小の累乗 π^a を L の exponent と呼び、 $\exp(L) = \pi^a$ と書く。また、 L が exponential property を持つとは、 $\exp(L) = \pi^a$ で $\pi^{a-1} \text{Id}_L$ が almost projective となるとき、即ち、 L の射影被覆の $\pi^{a-1} \text{Id}_L$ による pull back によって概分裂列 $\mathcal{A}(L)$ が構成できるときをいう：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}(L): 0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & m(L) & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & \text{pull back} & \downarrow \pi^{a-1} \text{Id}_L \\ 0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & P_L & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \end{array}$$

$\mathcal{O}G$ -表現加群 L が既約 (irreducible) であるとは、 $K \otimes_{\mathcal{O}} L$ が既約な KG -加群となるときをいう。Knörr[Kn] は既約性を拡張して virtually irreducible という概念を導入した。この概念は、 $(K, \mathcal{O}, k)$ が条件 (#) を満たしている仮定の下では、Carlson-Jones による exponential property と同値である [CJ, Section 4]。

定義 [Knörr] L を $\mathcal{O}G$ 上の表現加群とし、 $\text{tr} = \text{tr}_L : \text{End}_{\mathcal{O}}(L) \rightarrow \mathcal{O}$ をトレース写像とする。次の条件を満たすとき L は virtually irreducible であると言う：

任意の $\alpha \in \text{End}_{\mathcal{O}G}(L)$ に対して $\nu(\text{tr } \alpha) \geq \nu(\text{rank}_{\mathcal{O}} L)$ が成り立ち、
等号が成立するのは α が同型のときに限る。（ ν は $\mathcal{O}$ の離散付値）

- 例** (1) OG -表現加群 L が既約 (irreducible) ならば virtually irreducible である.
 (2) 直既約な OG -表現加群 L の階数が p で割り切れなければ virtually irreducible である.

Knörr は次の定理を示した [Kn, 4.5 Theorem].

定理 [Knörr] B は OG のブロックで不足群 D を持つとする. 直既約な B -表現加群 L は D をヴァーテックスとして持ち, S を L の D -ソースとする. このとき, L が virtually irreducible であるための必要十分条件は S が virtually irreducible であることである.

この定理から次のことが系として言える.

系 L を高さ 0 の OG -表現加群とする. L の属するブロック B は不足群 D を持つとし, S を L の D -ソースとする.

(1) [Kn, 4.7 Corollary] L は virtually irreducible である. また, S も virtually irreducible で, $\text{rank}_O S$ は p で割り切れない.

(2) $\exp(L) = \exp(S)$ (即ち, $\exp(L) = \exp(S) = \pi^a$ のとき, $\pi^{a-1}\text{Id}_L, \pi^{a-1}\text{Id}_S$ はともに almost projective である).

高さ 0 の OG -表現加群を含む AR-成分に関して, 次の結果が得られた.

定理 L は高さ 0 の OG -表現加群で, L の属するブロックを B とする. B は不足群 D を持つとし, S を L の D -ソースとする. L が含まれている AR-成分を Θ とおき, S が含まれている ($\Gamma(OD)$ の) AR-成分を Ξ とおく. このとき, Θ の tree class が A_∞ であることと Ξ の tree class が A_∞ であることは同値である.

証明の概略 OG の Auslander-Reiten クイバーに関して興味深いと思われる事実を紹介しつつ, この定理の証明の概略を述べたい. 次の補題は [K2, Proposition 4.5] で示された.

補題 1 L が Heller 表現加群でなければ, 概分裂列 $\mathcal{A}(L)$ を modulo π で簡約化した kG -加群の短完全列 $0 \rightarrow \Omega L / \pi \Omega L \rightarrow m(L) / \pi m(L) \rightarrow L / \pi L \rightarrow 0$ は分裂する.

OG -表現加群 M に対して, $\alpha(M)$ で kG -加群 $M / \pi M$ の直既約分解における直和因子の個数を表すことにしよう. Θ と Ξ には Heller 表現加群が含まれないことが確かめられるので, 補題 1 から次のことが言える.

補題2 写像 $\alpha|_{\Theta}: \Theta \ni M \mapsto \alpha(M) \in \mathbb{N}$ および $\alpha|_{\Xi}: \Xi \ni N \mapsto \alpha(N) \in \mathbb{N}$ は Ω -periodic additive function である.

L は高さ 0 の B -表現加群なので, $L/\pi L$ の直既約因子として高さ 0 の kG -加群が現れるが, その因子のヴァーテックスは D である. このことと補題1から次の事実も導かれる.

補題3 Θ に含まれるすべての B -表現加群のヴァーテックスは D である.
また, Ξ に含まれるすべての $\mathcal{O}D$ -表現加群のヴァーテックスも D である.

Inoue-Hieda は, Green 対応が AR-成分の間にグラフとしての同型を引き起こすことを示した [IH]. この事実と補題3から, D は G の正規部分群であると仮定してもよいと分かる.
では, Θ の tree class が A_{∞} であるとき, Ξ の tree class も A_{∞} であることを示そう.

$$T = T_{\Theta}: L_1 \leftarrow L_2 \leftarrow \cdots \leftarrow L_{2n} \leftarrow L = L_{2n+1} \leftarrow L_{2n+2} \leftarrow \cdots \leftarrow (\subset \Theta)$$

を, L_{i+1} が $m(L_i)$ ($m(L_i)$ は $\mathcal{A}(L_i)$ の中間項) の直和因子で $\Theta = \mathbb{Z}T$ となるように取る. 階数を計算すると, $p^{a-d} \parallel \text{rank}_{\mathcal{O}} L_{2i+1}$ (従って L_{2i+1} は高さ 0) で特に L_{2i+1} は virtually irreducible であり, 一方では $p^{a-d+1} \mid \text{rank}_{\mathcal{O}} L_{2i}$ であることに注意しておく. $D \trianglelefteq G$ から $L \downarrow_D = \bigoplus_g S^g$ (g は G のいくつかの元を渡る) と書けるが, Knörr の定理の系 (ii) から

$$\mathcal{A}(L) \downarrow_D = \bigoplus_g \mathcal{A}(S^g)$$

が成り立つ. 同様に, S_t を L_t の D -ソースとすると, $m(L) = L_{2n+2} \oplus \Omega^{-1} L_{2n}$ なので

$$m(L) \downarrow_D = \bigoplus_g (S_{2n+2} \oplus \Omega^{-1} S_{2n})^g$$

となり, また Knörr の定理の系 (ii) から

$$\mathcal{A}(L_{2n+3}) \downarrow_D = \bigoplus_g \mathcal{A}(S_{2n+3})^g$$

が成り立つので

$$m(L_{2n+3}) \downarrow_D = \bigoplus_g (S_{2n+4} \oplus \Omega^{-1} S_{2n+2})^g$$

も言える. ここで $S_{2n+2} \mid m(S)$, $S_{2n+3} \mid m(S_{2n+2})$ を満たすように取っておく. 繰り返して $m(S_i)$ の直和因子 S_{i+1} を選んで

$$T_{\Xi}: \cdots \leftarrow S_{2n} \leftarrow S = S_{2n+1} \leftarrow S_{2n+2} \leftarrow \cdots \leftarrow (\subset \Xi)$$

のような walk を得る. ここで AR-成分の tree class が A_{∞} であるための必要十分条件は, AR-成分が unbounded Ω -periodic additive function を持つことに留意しておこう. さて補題2で定義した additive function $\alpha|_{\Theta}$ について, Θ の tree class は A_{∞} と仮定したので,

$\{\alpha(L_i) \mid i = 1, 2, \dots\}$ は unbounded であり, $\{\alpha(S_i) \mid i = 1, 2, \dots\}$ も unbounded となる. このことから Ξ の tree class も A_∞ であると分かる.

こんどは逆に, Ξ の tree class が A_∞ であるとする.

$$T = T_\Xi : S_1 \leftarrow S_2 \leftarrow \dots \leftarrow S_{2n} \leftarrow S = S_{2n+1} \leftarrow S_{2n+2} \leftarrow \dots \leftarrow (\subset \Xi)$$

を, S_{i+1} が $m(S_i)$ ($m(S_i)$ は $A(S_i)$ の中間項) の直和因子で $\Xi = \mathbb{Z}T$ となるように取る. 階数を計算すると, $p \nmid \text{rank}_O S_{2i+1}$ で特に S_{2i+1} は virtually irreducible であり, また一方で $p \mid \text{rank}_O S_{2i}$ であることに注意しておく. $e = e_B$ を B の中心的原始冪等元とすると, $G \supseteq D$ であって $S_{2i+1} \uparrow^G \downarrow_D = \bigoplus_{g \in G/N} S_{2i+1}^g$ なので, S_{2i+1} は B -表現加群 $(S_{2i+1} \uparrow^G)e = \bigoplus_\lambda L_\lambda$ のすべての直既約因子 L_λ (当然 $L \mid S \uparrow^G e$) の D -ソースである. 特に Knörr の定理から, $(S_{2i+1} \uparrow^G)e$ のすべての直和因子 L_λ は virtually irreducible である. 従って

$$(A(S_{2i+1}) \uparrow^G)e = \bigoplus_\lambda A(L_\lambda)$$

が成り立つ. それゆえ, $S_t \uparrow^G e$ のある直和因子 L_t ($t = 1, 2, \dots$) を取ってきて,

$$T_\Theta : L_1 \leftarrow L_2 \leftarrow \dots \leftarrow L_{2n} \leftarrow L = L_{2n+1} \leftarrow L_{2n+2} \leftarrow \dots \leftarrow (\subset \Theta)$$

のような walk を Θ のなかで辿ることができる. いま, 補題 2 で定めた additive function $\alpha|_\Xi$ について, $\{\alpha(S_i) \mid i = 1, 2, \dots\}$ が unbounded なので, $\{\alpha(L_i) \mid i = 1, 2, \dots\}$ も unbounded である. このことから Θ の tree class も A_∞ である. $\square$

この定理に関連して, いくつか注意を述べたい. 定理と同じ仮定・記号を以後も引き継ぐ.

注意 1 もし kG -加群 $S/\pi S$ が直既約かまたはその直既約分解において p' -次元の因子がただ一つしか現れなければ, S を含む AR-成分 Ξ の tree class は A_∞ である [K5, Theorem 3.1]. 従って Θ の tree class も A_∞ である.

注意 2 $p = 2$ のとき, 奇数階数の OG -表現加群を含む AR-成分の tree class は A_∞ である [K5, Proposition 3.4]. 特に S を含む AR-成分 Ξ の tree class は A_∞ であり, 従って Θ の tree class も A_∞ である.

注意 3 定理の仮定につけ加えてさらに, $L/\pi L$ は直既約と仮定する. このとき概分裂列 $A(L)$ の中間項 $m(L)$ は直既約なことが分かる: 実際, $m(L) = X \oplus Y$ と仮定してみよう. $A(L)$ は modulo π で分裂するので, $X/\pi X = L/\pi L$ ($Y/\pi Y = \Omega L/\pi \Omega L$) としてよい. このとき階数を見て X, Y は高さ 0 であると分かり, 特に virtually irreducible である. しかしこれは [CJ, Theorem 2.4] に矛盾する. 従って $\Theta (\ni L)$ の tree class は A_∞ かまたは D_∞

である. さらに, p' -階数の直既約 OD -表現加群を含む AR-成分 (特に Ξ) の tree class は D_∞ ではない [K5, Lemma 3.2] ので, 次が成り立つ:

Θ の tree class は $D_\infty \iff \Xi$ の tree class は A_∞^∞ .

なお, OG のブロック B は, 任意の既約な通常指標 $\chi \in \text{Irr}(B)$ に対して次の 2 条件を満たす既約な B -表現加群 V を持つことが Thompson によって指摘されている [Tho].

- (i) V は χ を与える.
- (ii) $V/\pi V$ は直既約な kG -加群である.

注意 4 注意 3 において, Θ の tree class が D_∞ であるとする. このとき $N_G(D)/D$ の位数は偶数である. 従って, もし $|N_G(D)/D|$ が奇数で $L/\pi L$ が直既約ならば, Θ の tree class は A_∞ である.

証明 もし Θ の tree class が D_∞ ならば $|T(\Theta) : D|$ (ここで $T(\Theta) := \{x \in N_G(D) \mid \Theta^x = \Theta\}$) は偶数であることを示す. $G = N_G(D)$ としてよい. また注意 2 から, $p \neq 2$ としてよい. L は $\Theta \cong \mathbb{Z}D_\infty$ の end に位置しているので, Θ 内の walk

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 (= L) & \longleftarrow & L_2 & \longleftarrow & L_3 & \longleftarrow & \cdots \longleftarrow L_t \longleftarrow \cdots \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \tilde{L} & & & & \end{array}$$

で L_{i+1} が $m(L_i)$ の直和因子となるものが取れる ($i = 1, 2, \dots$). 階数を end から計算すると

$$\text{rank}_O L_{2i+1} \equiv \pm 2 \text{rank}_O L \pmod{p^{a-d}}$$

となり ($i = 1, 2, \dots$), 今 $p \neq 2$ なので $p^{a-d} \parallel \text{rank}_O L_{2i+1}$, 即ち各 L_{2i+1} は高さ 0 で Knörr の定理より virtually irreducible である. よって, $D \trianglelefteq G$ から $L \downarrow_D = \bigoplus_g S^g$ (g は G の元のいくつかを渡る) となり, Knörr の定理の系から

$$A(L) \downarrow_D = \bigoplus_g A(S^g)$$

が成り立つ. 従って

$$L_2 \downarrow_D \cong \bigoplus_g m(S)^g$$

が成り立つ. 注意 3 から Ξ の tree class は A_∞^∞ なので, $A(S)$ は, L_2 のある D -ソース S_2 とある $g \in G$ を用いて

$$0 \rightarrow \Omega S \rightarrow S_2 \oplus S_2^g \rightarrow S \rightarrow 0$$

と書ける. また同様に, L_{2i+1} の D -ソースを S_{2i+1} とおくと

$$A(L_{2i+1}) \downarrow_D = \bigoplus_g A(S_{2i+1}^g)$$

が成り立つ ($i = 1, 2, \dots$). 従って, Ξ の中に

$$\cdots - S_i^g - \cdots - S_2^g - S = S_1 - S_2 - \cdots - S_i - \cdots \quad (\exists g \in G)$$

のような walk を取ることができる. また Θ は無限個の Ω -orbits を持つ ($\{\Omega^m L_i\}_{m \in \mathbb{Z}} \neq \{\Omega^m L_j\}_{m \in \mathbb{Z}}$ ($i \neq j$)) から

$$\{\Omega^m S_i\}_{m \in \mathbb{Z}} \neq \{\Omega^m S_j\}_{m \in \mathbb{Z}} \quad (i \neq j)$$

が言えるので, Ξ も無限個の Ω -orbits を持ち, 特に $\Xi \cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty$ と分かる. そして g は $\Xi (\cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty)$ の graph isomorphism を引き起こし, その位数は $(\text{Aut}(\Xi))$ において 2 である. $\square$

参考文献

- [ASS] Assem, I., Simson, D. and Skowroński, A.: Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1, Techniques of Representation Theory, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [ARS] Auslander, M., Reiten, I. and Smalø, S.: Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Studies in Advanced Math. 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [B] Benson, D. J.: Representations and cohomology I, Cambridge Studies in Advanced Math. 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [CJ] Carlson, J. F. and Jones, A.: *An exponential property of lattices over group rings*, J. London Math. Soc. **39**(1989), 467–479.
- [D1] Dieterich, E.: *Construction of Auslander-Reiten quivers for a class of group rings*, Math. Z. **184**(1983), 43–60.
- [D2] Dieterich, E.: *Representation types of group rings over complete discrete valuation rings* II, In: Reiner, I. and Roggenkamp, K.W.(Eds.), Orders and their Applications (Oberwolfach, 1984), pp. 112–125, Lecture Notes in Math. 1142, Springer, Berlin, 1985.
- [E1] Erdmann, K.: Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Note in Math. 1428, Springer, Berlin/New York, 1990.

- [E2] Erdmann, K.: *On Auslander-Reiten components for group algebras*, J. Pure Appl. Algebra **104**(1995), 149–160.
- [IH] Inoue, T. and Hieda, Y.: *A note on Auslander-Reiten quivers for integral group rings*, Osaka J. Math. **32**(1995), 483–494.
- [IK] Inoue, T. and Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and trivial modules for integral group rings of p -groups*, J. Algebra **203**(1998), 374–384.
- [K1] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and projective lattices of p -groups*, Osaka J. Math. **38**(2001), 487–499.
- [K2] Kawata, S.: *On Heller lattices over ramified extended orders*, J. Pure Appl. Algebra **202**(2005), 55–71.
- [K2'] Kawata, S.: *Erratum to “On Heller lattices over ramified extended orders”*, J. Pure Appl. Algebra **212**(2008), 1849–1851.
- [K3] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and Heller lattices for integral group rings*, Algebr. Represent. Theory **9**(2006), 513–524.
- [K4] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and trivial source lattices for integral group rings*, J. Algebra **322**(2009), 1395–1405.
- [K5] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and splitting trace lattices for integral group rings*, J. Algebra **359**(2012), 69–79.
- [Kn] Knörr, R.: *Virtually irreducible lattices*, Proc. London Math. Soc. **59**(1989), 99–132.
- [NT] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.
- [Tho] Thompson, J.G.: *Vertices and sources*, J. Algebra **6**(1967), 1–6.
- [We] Webb, P.J.: *The Auslander-Reiten quiver of a finite group*, Math. Z. **179**(1982), 97–121.
- [Wi1] Wiedemann, A.: *The Auslander-Reiten graph of integral blocks with cyclic defect two and their integral representations*, Math. Z. **179**(1982), 407–430.
- [Wi2] Wiedemann, A.: *A remark on the structure of the Auslander-Reiten quiver of orders, blocks with cyclic defect two and the Dynkin diagram E_6* , Arch. Math. **45**(1985), 211–218.
- [Y] 山形邦夫: 有限次元自己入射多元環の表現とその周辺, 数学 **61**(2009), 270–292.