

Occupation Time の動学的費用最小化問題への応用

三 田 光 星*

I Introduction

この論文ではある水準 y 以下で確率過程 X が過ごす時間である Occupation Time とその水準を最後に脱出した時刻である Last Exit Time の同時分布を斉時拡散過程について密度関数のラプラス変換の形で導出する。また導出された同時分布を用いて、企業が創設されてから業績が安定、IPO を行うまでの費用最小化問題へ応用することを考える。経営目標 y より下で過ごす時間である Occupation Time は当該企業の経営状態を測る指標として考えることができる。というのも、企業価値 X が y 以下の値をとることは企業の経営が想定よりも悪い状態であることを意味し、その時間が長ければ長いほど経営状態が芳しくないと考えられるからである。一方で Last Exit Time は企業がその経営目標を最後に脱出する時刻であるので、企業の状態が変化し十分に安定しはじめる点だと考えることができる。この 2 つの指標は水準 y に依存し、上方の点において確率過程 X が Kill される場合においては、水準 y が高くなればどちらも大きくなることが明らかである。

Occupation Time に関する先行研究は多く存在する。レヴィ過程が 0 以上の領域で過ごす Occupation Time の分布については Bertoin [1996] 等で一般化逆正弦分布となることが指摘されている。また一般のレヴィ過程について、ある水準以下で過ごす Occupation Time が経過時間の $\alpha\%$ になるための水準 “ α -quantile” y の分布は Dassios [2005] が特定している。Last Exit Time に関しては標準マルコフ過程については Gettoor and Sharpe [1973] 等で、Killing Boundary を持つ拡散過程の Last Exit Time については Egami and Kevkhishvili [2017] で指摘されている。

この論文で取り扱う問題は企業創設から IPO までにかかる費用の最小化である。問題の設定のために $t = 0$ において創設された企業は IPO 実施を目指すこととし、IPO の手助けを行うコンサルタントは水準 b を提示、 X が b に到達したときに IPO を行うように提案する場合を考える。このときの b を X の Killing Boundary とみなす。 b については過去の同業他社の企業データや信用格付等の外部要因から設定され、企業によって操作されないものと考えられる。便宜上時間を通じて b は一定としておく。実際、短期において業界構造の大幅な変化が起こることは稀であり、この仮定は現実在即していると言える。水準 b を初めて通過する First Passage Time T_b において企業は IPO を行うこととする。また、簡単化のために企業は倒産をしないものとする。

当論文は以下のような構成である。2 章では 3 章の結果を証明するために必要な理論的背景と命

* 京都大学大学院経済学研究科博士後期課程

題を紹介する。命題は具体的に First Passage Time と Occupation Time の同時密度のラプラス変換 (Proposition 1), Last Exit Time に関するパスの分解式 (Proposition 2) の 2 つである。3 章では Last Exit Time と Occupation Time の同時密度のラプラス変換を求め、 X が標準ブラウン運動の場合について数値計算で逆変換を行い、同時密度を近似する。そして最後に 4 章では費用最小化問題を定式化し、それをドリフト付きブラウン運動の場合について数値計算で解く。付録では 2 章で省略する技術的な部分について可能な限り詳しく記載する。

II 数学的なフレームワーク

本章では Main Theorem の証明に必要な数学の理論的背景と命題 2 つを紹介する。

はじめに基本の設定を与える。実現されうる事象の全体集合 Ω , Ω の σ -加法族 $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ 上の確率測度 $\mathbb{P}$, usual conditions を満たすフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ からなるフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ を考える。正則で斉時的な拡散過程 X は $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ に適合していて 0 時では x にいるとし、 X の状態空間を $\mathcal{S} = (l, r) \subset \mathbb{R}$ で l, r は natural boundary, 任意の $w \in \mathcal{S}$ について $\mathbb{P}_x(T_w < \infty) = 1$, X の Scale Function を $S(x)$, Speed Measure を m で表し、 m に対する X の推移確率密度を $p(t, x, y)$ としておく。 X の無限小パラメーター $\mu(x)$ と $\sigma^2(x)$ について作用素 $\mathcal{L}_X$ を

$$\mathcal{L}_X = \mu(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

で定義する。また T_z を z の First Passage Time とすると、 $(x-y)(x-z) < 0$ となる x, y, z について

$$\mathbb{P}_x(T_z < T_y) = \frac{S(x) - S(y)}{S(z) - S(y)}$$

が成立する。 b を終点とするときの Last Exit Time を $L_y := \sup\{t < T_b \mid X_t = y\}$, L_y までの Occupation Time を $A_y := \int_0^{L_y} \mathbb{1}_{\{X_u \leq y\}} du$ とする。通常通り、 $\sup \emptyset = 0$ と考える。また X が途中で Kill されるとき、Cemetery Point $\Delta \notin \mathcal{S}$ へ移動するものとし、 X の生存時間を $\xi := \inf\{t \mid X_t = \Delta\}$ で定義すると $\mathbb{P}_x(\xi < \infty) = 1$ である状況を考える。

1 First Passage Time と Occupation Time のラプラス変換

本節では First Passage Time T_z において Kill される過程について、その生存時間である T_z と Occupation Time の同時分布について求める。詳細は Zhang [2015] を参照のこと。

各 $\alpha > 0$ について、Sturm-Liouville 方程式 “ $\mathcal{L}_X(f) = \alpha f$ ” の解のうち単調増加のものを ϕ_α^+ , 単調減少のものを ϕ_α^- とする。加えて $w_\alpha \cdot S'(x) = (\phi_\alpha^+(x))' \phi_\alpha^-(x) - \phi_\alpha^+(x) (\phi_\alpha^-(x))'$ を満たす定数 $w_\alpha > 0$ について $W_\alpha(x, y)$ を,

$$W_\alpha(x, y) := w_\alpha^{-1} \det \begin{bmatrix} \phi_\alpha^+(x) & \phi_\alpha^+(y) \\ \phi_\alpha^-(x) & \phi_\alpha^-(y) \end{bmatrix}$$

と定義する。また、 $W_0(x, y) := S(x) - S(y)$ と定義しておく。 $W_{\alpha,1}(x, y) = \partial W_\alpha / \partial x$, T_z までの Occupation Time を $B_y^z := \int_0^{T_z} \mathbb{1}_{\{X_u \leq y\}} du$ と書くこととして、First Passage Time T_z と First Passage Time までの Occupation Time B_y^z の同時分布は以下のラプラス変換 $F_{\alpha, \beta}(x, y, z)$ の形で表現できる。

Proposition 1 (cf. Corollary 1 of Zhang [2015])

$x, y \in (l, z)$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ について以下が成立する。

$$\begin{aligned} F_{\alpha, \beta}(x, y, z) &:= \mathbb{E}_x[\exp(-\beta B_y^z - \alpha T_z)] \\ &= \frac{W_\alpha(x, y)}{W_\alpha(z, y)} + \frac{(W_\alpha(z, x)/W_\alpha(z, y))S'(y)}{W_{\alpha, 1}(y, z) + W_\alpha(z, y)(\phi_{\beta+\alpha}^{+'}(y)/\phi_{\beta+\alpha}^+(y))} & \text{if } x \in (y, b) \\ &= \frac{\phi_{\beta+\alpha}^+(x)}{\phi_{\beta+\alpha}^+(y)} \frac{S'(y)}{W_{\alpha, 1}(y, z) + W_\alpha(z, y)(\phi_{\beta+\alpha}^{+'}(y)/\phi_{\beta+\alpha}^+(y))} & \text{if } x \in (l, y] \end{aligned}$$

証明の概要は付録 A.1 で後述する。Sturm-Liouville 方程式 “ $\mathcal{L}_X(f) = \alpha f$ ” の単調解 $\phi^\pm$ は任意の固定された $\kappa \in \mathcal{S}$ についてそれぞれ

$$\phi_\alpha^+(x) = \begin{cases} \mathbb{E}_x[e^{-\alpha T_\kappa}] & \text{if } x \leq \kappa \\ 1/\mathbb{E}_\kappa[e^{-\alpha T_x}] & \text{if } x > \kappa \end{cases} \quad \phi_\alpha^-(x) = \begin{cases} 1/\mathbb{E}_\kappa[e^{-\alpha T_x}] & \text{if } x \leq \kappa \\ \mathbb{E}_x[e^{-\alpha T_\kappa}] & \text{if } x > \kappa \end{cases}$$

のように書けることが Zhang [2015] で指摘されている。解に登場する期待値は First Passage Time の分布のラプラス変換であるので、関数 $F_{\alpha, \beta}$ はスケール関数と First Passage Time の分布により特定することが可能である。また $\beta \rightarrow 0$ のとき、優収束定理と付録 A.1 の Lemma 1 から $F_{\alpha, \beta}(x, y, z) \rightarrow \mathbb{E}_x[\exp(-\alpha T_z)] = \phi_\alpha^+(x)/\phi_\alpha^+(z)$ である。

2 Last Exit Time とパスの分解

続いて Last Exit Time に関する命題について述べる。状態空間 $\mathcal{S}$ 内の全ての $x < y$ において $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = 1$ が成立する拡散過程 X を考える。これは拡散過程 X が 0 時における点から上方には確率 1 で有限時間内に到達するということを意味しており、下方の点への到達の条件は求められていない。生存時間 $\xi > 0$ である場合、 $z = \sup\{X_t \mid 0 \leq t < \xi\}$ で条件づけた X のパスの分布は、 T_z で Kill されるパスの分布と T_z で Kill されるものを時間反転したパスの分布という 2 つの独立なものに分解が可能である (付録 A.2)。この事実を用いて Last Exit Time まで生存するパスの分布に関する式を導出する。

x から始まる生存時間 ξ までのパスの空間上で定義される分布を $\mathbb{P}_x^\xi$ と書く。また、パスの空間上に定義される分布 Q と Q' について $Q^\wedge$ を Q の時間反転により得られる像、 $Q \circ Q'$ をそれぞれの分布に従う独立なパスを順番に連結したパスの分布というように書けば、生存時間が Last Exit Time L_y である X のパスの分布について以下が成立する。

Proposition 2

拡散過程 X は状態空間 $\mathcal{S}$ 内の全ての $x < y$ において $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = 1$ であり、*Killing Boundary* b を持つとする。このとき、任意の $x, y \in (l, b)$ について以下が成立する。

$$\mathbb{P}_x^{L_y}(\cdot, L_y > 0) = \frac{1}{S(b) - S(y)} \int_{x \vee y}^b S(dz) \mathbb{P}_x^{T_z} \circ (\mathbb{P}_y^{T_z})^\wedge(\cdot)$$

パスの分解や Last Exit Time の分布に関する詳細は付録 A.2 で後述する。

III Main Theorem

1 Main Theorem

前述の Proposition を使うことにより, Occupation Time と Last Exit Time の分布は以下のようなラプラス変換の形で得ることができる。

Theorem

斉時拡散過程 X は状態空間 $\mathcal{S}$ 内の全ての $x < y$ において $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = 1$ が成立し, *Killing Boundary* b を持つものとする。このとき, $x, y \in (l, b)$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ について以下が成立する。

$$\mathbb{E}_x[\exp(-\beta A_y - \alpha L_y) \mid L_y > 0] = \frac{1}{S(b) - S(x \vee y)} \int_{x \vee y}^b S(dz) F_{\alpha, \beta}(x, y, z) F_{\alpha, \beta}(y, y, z)$$

Proof. $\mathbb{E}_x[\exp(-\beta A_y - \alpha L_y) \mid L_y > 0] = \frac{1}{\mathbb{P}_x(L_y > 0)} \mathbb{E}_x[e^{-\beta A_y - \alpha L_y} \mathbb{1}_{\{L_y > 0\}}]$ である。Last Exit Time が 0, つまり $\{t < T_b \mid X_t = y\} = \emptyset$ となるのは y より先に b に到達してしまう場合であるので,

$$\mathbb{P}_x(L_y > 0) = \begin{cases} \frac{S(b) - S(x)}{S(b) - S(y)} & \text{if } x > y \\ 1 & \text{if } x \leq y \end{cases} \quad (1)$$

となる。また, 推移密度が対称であることから $(\mathbb{P}_{x,y}^t)^\wedge = \mathbb{P}_{y,x}^t$ が明らかであることに注意して,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[e^{-\beta A_y - \alpha L_y} \mathbb{1}_{\{L_y > 0\}}] &= \mathbb{E}_x^{L_y}[e^{-\beta A_y - \alpha L_y} \mathbb{1}_{\{L_y > 0\}}] \\ &= \frac{1}{S(b) - S(y)} \int_{x \vee y}^b S(dz) \mathbb{E}_x^{T_z}[e^{-\beta B_y^\circ - \alpha T_z}] \mathbb{E}_y^{T_z}[e^{-\beta B_y^\circ - \alpha T_z}] \\ &= \frac{1}{S(b) - S(y)} \int_{x \vee y}^b S(dz) F_{\alpha, \beta}(x, y, z) F_{\alpha, \beta}(y, y, z) \end{aligned} \quad (2)$$

なお $\mathbb{E}_x^\xi$ は生存時間を ξ とするパス空間上の測度での積分を表す。Proposition 1 は First Passage Time までについての命題であるので最後の等式が成立する。(1), (2) を合わせれば定理の式が得られる。□

2 ラプラス変換と同時密度関数の例

Occupation Time と Last Exit Time の同時密度は Theorem 1 で求めた関数に対して逆ラプラス変換を施すことで得られる。ここでは標準ブラウン運動 $X_t = B_t$ を例に, Quadrature Method で逆ラプラス変換を数値的に行った。詳細は付録 B のスクリプトを参照すること。ブラウン運動について Zhang [2015], Borodin and Salminen [2002] により, Scale Function を $S(x) = x$ で固定すれば

$$\begin{aligned}
S(dz) &= dz, \quad \phi_{\alpha}^{\pm}(x) = e^{\pm \sqrt{2\alpha}x}, \\
W_{\alpha}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}} \sinh(\sqrt{2\alpha}(x-y)), \quad W_0(x, y) = x-y \\
W_{\alpha,1}(x, y) &= \frac{1}{2} \cosh(\sqrt{2\alpha}(x-y)), \quad W_{0,1}(x, y) = 1
\end{aligned}$$

以上を用いて Theorem を適用する。4 章での費用最小化問題の設定において $x \leq y$ を仮定するので、それにならない $x \leq y$ の場合について考えることにすれば、 $\gamma_{\pm} = \sqrt{2(\alpha+\beta)} \pm \sqrt{2\alpha}$ として $\alpha > 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[e^{-\beta A_y - \alpha L_y}] &= \frac{1}{b-y} \int_y^b dz e^{\sqrt{2(\alpha+\beta)}(x-y)} \\
&\quad \times \left(\frac{2\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{2\alpha} \cosh(\sqrt{2\alpha}(z-y)) + \sqrt{2(\alpha+\beta)} \sinh(z-y)} \right)^2 \\
&= \frac{1}{\gamma_+(b-y)} \left[1 - \frac{2\sqrt{2\alpha}}{\gamma_+ \exp(2\sqrt{2\alpha}(b-y)) - \gamma_-} \right] e^{\sqrt{2(\alpha+\beta)}(x-y)}
\end{aligned}$$

であり、 $\alpha = 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[\exp(-\beta A_y)] &= \frac{1}{b-y} \int_y^b e^{\sqrt{2\beta}(x-y)} \left[\frac{1}{1 + \sqrt{2\beta}(z-y)} \right]^2 dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\beta}(b-y)} \left[1 - \frac{1}{1 + \sqrt{2\beta}(b-y)} \right] e^{\sqrt{2\beta}(x-y)}
\end{aligned}$$

となる。 $\beta \rightarrow 0$ において Last Exit Time L_y のラプラス変換と一致することより必要条件を満たしていることは容易に確認できる。この式に $x=0, y=3, b=10$ を代入して逆ラプラス変換を行った。そうして導出された 3 次元のグラフが図 1, $l \times 10^3 = 100, 500, 700$ の平面で切ったグラフが図 2 である。なお、計算の過程で Occupation Time a が Last Exit Time l より大きくなる領域においては 0 となるように設定してあるため、 $a > l$ の領域は 0 となっている。実際、定義より Occupation Time が Last Exit Time より大きくなることはない。加えて数値計算上の特異点の影響で負になる場所についても 0 を代入している。

IV 費用最小化問題への応用

この章では 3 章で求めた Occupation Time と Last Exit Time の同時分布を費用最小化問題へ応用する。当論文で考える費用最小化問題の設定は以下の通りである。

企業はまず経営目標 y を設定する。その目標 y を下回る間は信用格付が下がってしまい、借入に対して追加的な費用が課されるとする。対して、経営目標 y を最後に脱出した時から業績が安定しているとみなす水準の b に到達するまでの間は IPO への準備費用がかかり続けることとする。

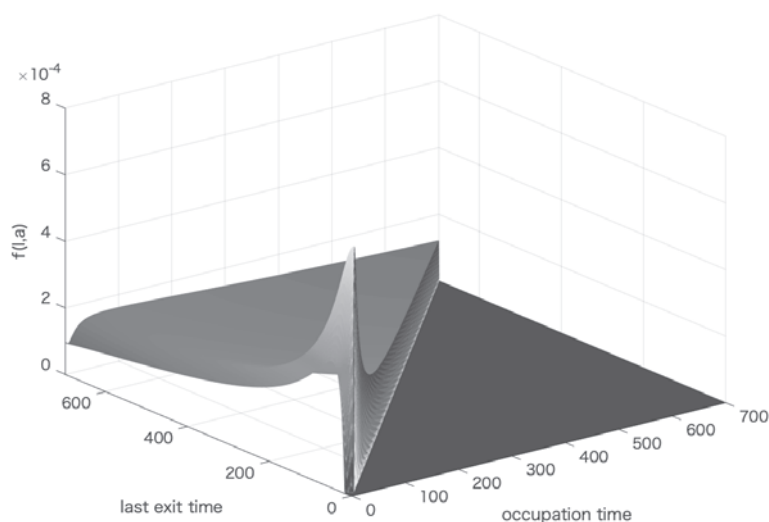


図 1 Last Exit Time と Occupation Time の同時密度関数。x,y 軸ともにスケールは 10^{-3}

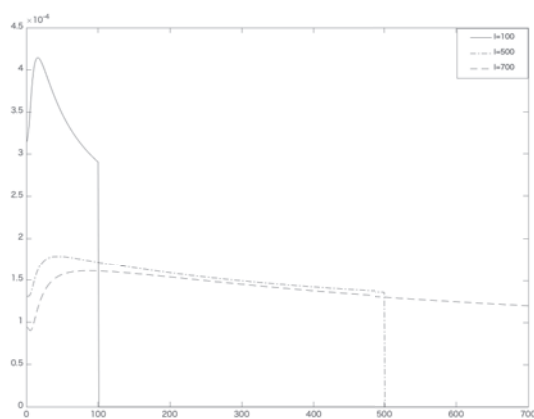


図 2 $L_y = l$ のときの Occupation Time の密度。横軸のスケールは 10^{-3}

このような設定においては経営目標 y を低く設定することで借入の追加費用が発生する時間、つまり Occupation Time を短くすることができ、借入の費用を下げるができる。その一方で最後に目標 y を脱出してから水準 b に到達するまでの時間は長くなってしまい、IPO の準備費用が余分にかかってしまう。このようなトレードオフ関係にある 2 つの費用を最小化する最適な y を設定することが目標となる。また経営目標という設定上、0 時における企業価値 x より下には設定できないようにしておく。つまり $x \leq y$ である。

1 定式化

上記設定において、費用は Occupation Time A_y と Last Exit Time L_y の 2 つを引数として考えることができる。というのも IPO の準備期間 $T_b - L_y$ に関して操作できる変数が y のみの場合、 y に依存しているのは L_y のみだからである。 L_y だけでなく T_b も確率変数であり $\omega \in \Omega$ に依存するので、扱う引数を $T_b - L_y$ ではなく L_y として ω に依存する変数を減らすことはモデルを単純にするという意味で有用であると考えられる。また $T_b - L_y$ の分布について Egami and Kevkhishvili [2017] でドリフト付ブラウン運動については特定されているが、一般の拡散過程については求められていない。また、ドリフト付ブラウン運動で特定されている分布もラプラス変換の形でしか導出されていない密度と極限を用いた形となっており扱いが非常に難しい。よって $T_b - L_y$ をそのままモデルに導入する場合はシミュレーションによる解法が考えられる。ここでドリフト付きブラウン運動 $X_t = t + B_t$ について $b = 10$ として 10 万回シミュレーションを行い $T_b - L_y$ と L_y をグラフにしたものがそれぞれ図 3, 図 4 である。図から明らかに 10 万回のシミュレーションでも両者と

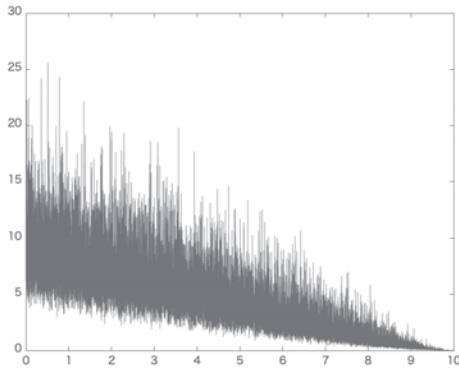


図 3 $T_b - L_y$ のグラフ

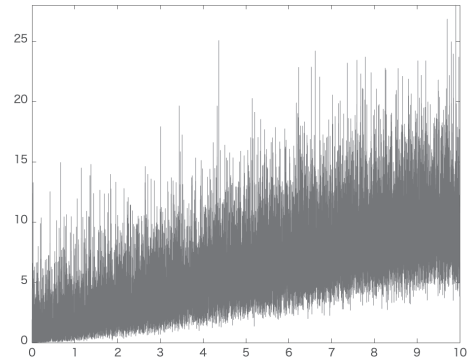


図 4 L_y のグラフ

もに分散が非常に大きく、シミュレーションで上記の引数をとる費用最小化問題を解くことは推奨されない。よってシミュレーションするほかに $T_b - L_y$ ではなく、Theorem で分布が導出できた L_y を使うことは合理的であると考えられる。

ここで $C(a, l | y)$ を a に関して増加、 l に関して減少で十分に滑らかな連続関数とする。定義と X の連続性より明らかに A_y と L_y は y に関して増加であるので、当該費用最小化問題における費用関数は $C(A_y, L_y | y)$ の形で書ける。よってこの費用最小化問題は

$$\min_{y \in (l, b)} \mathbb{E}_X[C(A_y, L_y | y)]$$

と定式化できる。

2 具体例

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ をドリフト付きブラウン運動, 費用関数を $C(a, l) = 1 - e^{-\beta a}(1 - e^{-\alpha l})$ と置く。この費用関数の第 2 項は a が減少すれば増加する $e^{-\beta a}$ と l が増加すれば増加する $(1 - e^{-\alpha l})$ の積で表されている。それぞれ A_y と $T_b - L_y$ に関してどの程度小さくできたかというスコアを表しており, C はそのスコアが大きければ大きいほど費用が小さくなるという関数である。この費用関数について費用最小化問題は

$$\min_{y \in (l, b)} \mathbb{E}_x[1 - e^{-\beta A_y}(1 - e^{-\alpha L_y})] = \min_{y \in (l, b)} (1 - \mathbb{E}_x[e^{-\beta A_y}] + \mathbb{E}_x[e^{-\beta A_y - \alpha L_y}])$$

という形でかける。Theorem を用いれば目的関数は

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{E}_x[e^{-\beta A_y}] + \mathbb{E}_x[e^{-\beta A_y - \alpha L_y}] &= 1 - \frac{1}{S(b) - S(y)} \int_y^b S(dz) F_{0, \beta}(x, y, z) F_{0, \beta}(y, y, z) \\ &\quad + \frac{1}{S(b) - S(y)} \int_y^b S(dz) F_{\alpha, \beta}(x, y, z) F_{\alpha, \beta}(y, y, z) \end{aligned}$$

となる。ここで Zhang [2015], Borodin and Salminen [2002] より $\delta := \mu/\sigma^2$, $\gamma_\alpha := \sqrt{\delta^2 + 2\alpha/\sigma^2}$ として Scale Function を $S(x) = (1 - \exp(-2\delta x))/\delta$ と固定しておくと,

$$\begin{aligned} S(dz) &= 2e^{-2\delta z} dz, \quad \phi_\alpha^+(x) = e^{(\gamma_\alpha - \delta)x}, \quad \phi_\alpha^-(x) = e^{-(\gamma_\alpha + \delta)x} \\ W_\alpha(x, y) &= 2e^{-\delta(x+y)} \frac{\sinh(\gamma_\alpha(x-y))}{\gamma_\alpha} \\ W_{\alpha,1}(x, y) &= -2\delta e^{-\delta(x+y)} \frac{\sinh(\gamma_\alpha(x-y))}{\gamma_\alpha} + 2e^{-\delta(x+y)} \cosh(\gamma_\alpha(x-y)) \end{aligned}$$

である。上式を見ると明らかだが, ドリフト付きブラウン運動は基本的に各パラメーターごとの比率によって形が決まる。よって $\sigma = 3, x = 0, b = 50, \alpha = \beta = 0.05$ を固定する。 μ を 0.5 から 2.5 まで 1 ずつ変化させた y と費用関数のグラフが図 5 である。

図を見ると明らかなようにドリフトが大きくなるほど最適な y も大きくなる。大きいドリフトは成長率が高いことを示唆するので, 急成長している企業に関しては営業目標を高い水準に設定することが最適となり, この事実は直観に反しない。

V 結論

Last Exit Time とそれまでの Occupation Time の分布のラプラス変換を, 上方の点への到達確率が 1 となる拡散過程のパスの分解を用いることで積分の形で求めることができ, さらに標準ブラウン運動についてはその積分を明示的に書くことができた。ラプラス変換は一意でありこれを逆変換することで Occupation Time と Last Exit Time の密度関数が得られるため, その密度関数を使ってこの 2 つの指標についてさまざまな応用が可能となる。ただし当論文では密度関数の形を特定,

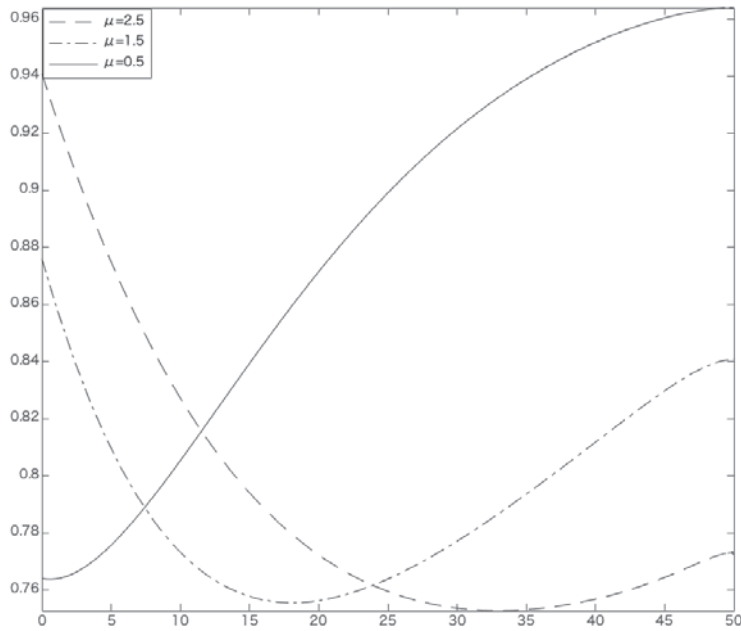


図5 費用関数と水準 y に関するグラフ。左上から $\mu = 2.5, 1.5, 0.5$

あるいは推定するまでには至っておらず、結果として費用最小化問題への応用においても費用関数の形が制限されている。今後の課題としては数値計算によって可能な限り正確に密度関数を導出し、一般の関数についても適用できるようにしていくことが考えられる。

なお、ラプラス変換の形でしか明示的に表せていない関数は多く存在する。この論文で示した式は状態空間上の上方の点に確率 1 で有限時間で到達する拡散過程すべてについて成立するので、ブラウン運動に限らずさまざまな拡散過程について適用できることは重要な点である。

また、当論文では簡単化のために倒産をする可能性を排除し必ず上場できる場合について考えたが、実際は上場できずに倒産をする場合もある。その場合についても下方方向の Killing Boundary a を設定し、Zhang [2015] の Proposition 3 を用いれば同様の議論を行うことができる。このとき Theorem の条件付期待値には倒産するか上場できるかが追加され、上場できる場合は $\mathbb{E}_x[e^{-\beta A_y - \alpha L_y} \mid L_y > 0, T_b < T_a]$ というように書かれる。

最後に Last Exit Time L_y は X から生成されるフィルトレーションに対して Stopping Time ではない。このため、 y より下を抜け出した時にその点が Last Exit Time である確率は Theorem の式に逆ラプラス変換を施すことで理論上計算できるが、上記の通り現状密度関数の導出には至っていない上、仮に導出が可能であったとしてもその点が実際に Last Exit Time であるかは b に到達するまでわからない。つまり IPO の準備に入るタイミングは経営者の意思決定に依存し、この費用最小化問題は最適停止問題の要素も含むこととなる。仮に意思決定のタイミングが Last Exit でない場合に、IPO の準備費用に加えて y を下回ってしまう場合の費用も追加でかかることや、Last Exit Time で IPO の準備を始めるという意思決定を行わずに b に達してしまった場合のペナルティも

問題に組み込むべきである。

最後に本稿執筆にあたり、有益なコメントと適切なアドバイスを与えて頂いた江上雅彦先生に深く感謝する。

付録 A 各 Proposition の証明

付録.A では本文で省略した内容について書くこととする。

A.1 Proposition 1 の証明

Proposition 1 の証明に入る前に必要な Lemma を 2 つ紹介する。これら Lemma の証明等、詳細は Zhang [2015] を参照のこと。

Lemma 1

$\mathcal{S}$ を X の状態空間とし、 $x, y, z \in I$ が $(x-y)(z-x) > 0$ を満たすとする。このとき $\alpha \geq 0$, $e_\alpha \sim \exp(\alpha)$ について以下を得る。

$$\mathbb{E}_x[e^{-\alpha T_y} \mid T_y < T_z] = \mathbb{P}_x(T_y < T_z \mid e_\alpha) = \frac{W_\alpha(x, z)}{W_\alpha(y, z)}$$

また $|z| \rightarrow \infty$ とすると、 $\mathbb{E}_x[e^{-\alpha T_y}] = \phi_\alpha^+(x)/\phi_\alpha^+(y)$ が成立する。

Lemma 2

$x, y, z \in \mathcal{S}$ と $\alpha > 0$ について以下が成立する。

$$\begin{aligned} W_\alpha(x, y) &= -W_\alpha(y, x) \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{W_\alpha(x, y)}{W_\alpha(x, z)} &= \frac{S'(x)}{W_\alpha^2(x, z)} W_\alpha(y, z) \end{aligned}$$

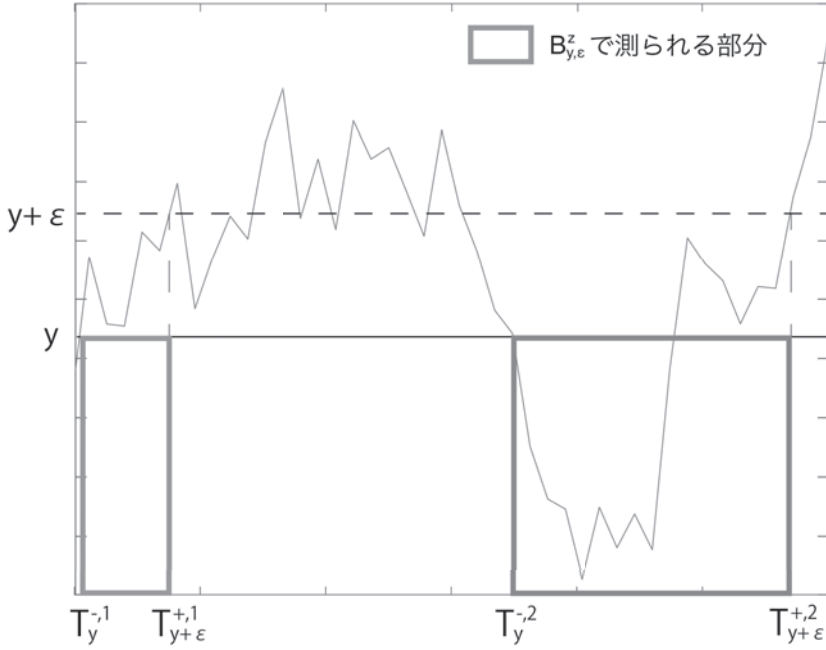
Proposition 1 の証明. 強マルコフ性と Lemma 1 を用いると以下のように分解できる。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[\exp(-\beta B_y^z - \alpha T_z)] &= \mathbb{E}_x[e^{-\alpha T_z} \mid T_z < T_y] + \mathbb{E}_x[\exp(-\beta B_y^z - \alpha T_z) \mid T_y < T_z] \\ &= \begin{cases} \frac{\phi_\alpha^+(x)}{\phi_\alpha^+(y)} \mathbb{E}_y[\exp(-\beta B_y^z - \alpha T_z)] & x \leq y \\ \frac{W_\alpha(x, y)}{W_\alpha(z, y)} + \frac{W_\alpha(x, z)}{W_\alpha(y, z)} \mathbb{E}_y[\exp(-\beta B_y^z - \alpha T_z)] & x > y. \end{cases} \end{aligned}$$

よって $\mathbb{E}_y[\exp(-\beta B_y^z - \alpha T_z)]$ について考えれば十分である。 $\varepsilon > 0$ を $y + \varepsilon < b$ となるようにとり、 $B_{y, \varepsilon}^z$ を B_y^z の近似として以下のように定義する (図 6)。

$$\begin{aligned} B_{y, \varepsilon}^z &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{y+\varepsilon}^{+,n} \wedge T_z - T_y^{-,n} \wedge T_z \\ T_{y+\varepsilon}^{+,n} &:= \inf\{t \geq T_y^{-,n} \mid X_t \geq y + \varepsilon\} \quad T_y^{-,n+1} := \sup\{t \geq T_{y+\varepsilon}^{+,n} \mid X_t \leq y\} \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

ただし $T_y^{-,1} = T_y$ であるとする。 $B_{y, \varepsilon}^z$ は図 6 の $T_y^{-,2} - T_{y+\varepsilon}^{+,1}$ のような上から下に抜けるまでの時

図6 $T_y^{-,n}$ と $T_{y+\epsilon}^{+,n}$ の関係について

間は含まないことに注意して、強マルコフ性と X の連続性から、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_y[\exp(-\beta B_{y,\epsilon}^z - \alpha T_z)] &= \mathbb{E}_y[\exp(-(\beta + \alpha)T_{y+\epsilon})] \mathbb{E}_{y+\epsilon}[\exp(-\beta B_{y,\epsilon}^z - \alpha T_z)] \\ &= \mathbb{E}_y[\exp(-(\beta + \alpha)T_{y+\epsilon})] (\mathbb{E}_{y+\epsilon}[\exp(-\alpha T_z) \mid T_z < T_y] \\ &\quad + \mathbb{E}_{y+\epsilon}[\exp(-\alpha T_y) \mid T_y < T_z] \mathbb{E}_y[\exp(-\beta B_{y,\epsilon}^z - \alpha T_z)]).\end{aligned}$$

であるので、 $\mathbb{E}_y[\exp(-\beta B_{y,\epsilon}^z - \alpha T_z)]$ について式を整理すると

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_y[\exp(-\beta B_{y,\epsilon}^z - \alpha T_z)] &= \frac{W_\alpha(y+\epsilon, y)}{W_\alpha(z, y)} \frac{\phi_{\beta+\alpha}^+(y)/\phi_{\beta+\alpha}^+(y+\epsilon)}{1 - (\phi_{\beta+\alpha}^+(y)/\phi_{\beta+\alpha}^+(y+\epsilon))(W_\alpha(y+\epsilon, z)/W_\alpha(y, z))} \\ &= \left\{ \frac{W_\alpha(y+\epsilon, y)}{W_\alpha(y+\epsilon, z)} \right\} \\ &\quad \times \frac{-1}{(W_\alpha(y, z)/\phi_{\beta+\alpha}^+(y))(\phi_{\beta+\alpha}^+(y+\epsilon)/W_\alpha(y+\epsilon, z) - \phi_{\beta+\alpha}^+(y)/W_\alpha(y, z))}\end{aligned}$$

$B_{y,\epsilon}^z$ は X が y 以下で過ごす時間と y から $y+\epsilon$ へ移動している時間の和であるが、 $\epsilon \rightarrow 0$ とすると後者が $\mathbb{P}_x$ について $a.s.$ で 0 に収束するため、 $B_{y,\epsilon}^z \rightarrow B_y^z$ である。また、 $0 < \exp(-\beta B_{y,\epsilon}^z - \alpha T_z) \leq 1$

より優収束定理から

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_y[\exp(-\beta B_y^z - \alpha T_z)] &= \mathbb{E}_y \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp(-\beta B_{y,\varepsilon}^z - \alpha T_z) \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}_y[\exp(-\beta B_{y,\varepsilon}^z - \alpha T_z)] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left\{ \frac{W_\alpha(y + \varepsilon, y)}{W_\alpha(y + \varepsilon, z)} \right\} \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{-1}{(W_\alpha(y, z)/\phi_{\beta+\alpha}^+(y))(\phi_{\beta+\alpha}^+(y + \varepsilon)/W_\alpha(y + \varepsilon, z) - \phi_{\beta+\alpha}^+(y)/W_\alpha(y, z))} \right] \\
 &= \frac{S'(y)}{W_{\alpha,1}(y, z) + W_\alpha(z, y)(\phi_{\beta+\alpha}^{+'}(y)/\phi_{\beta+\alpha}^+(y))}
 \end{aligned}$$

以上より示せた。 □

A.2 Proposition 2 の証明

Proposition 2 の証明のために 2 つの補題を紹介する。1 つは状態空間 $\mathcal{S} = [0, \infty)$ の拡散過程の橋についての調和式である。

Lemma 3 (Corollary 3 of Pitman and Yor [1996])

$x, y \in \mathcal{S}$ で $x < y$ を満たすとき, $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = 1$ であると仮定する。このとき, すべての $x, y \in \mathcal{S}$ について以下のパスの空間上の測度に関する調和式が成立する。

$$\int_0^\infty dt p(t, x, y) \mathbb{P}_{x,y}^t = \int_{x \vee y}^\infty S(dz) (\mathbb{P}_x^{T_z}) \circ (\mathbb{P}_y^{T_z})^\wedge$$

Lemma 1 は Excursion Theory における伊藤の Excurison Law の二つの表現法が同値であることを意味する式である。

(左辺): ある t を推移密度 $p(t, x, y)dt$ によって選び, 長さ t の X の橋を x から y まで走らせる

(右辺): z を $[x \vee y, \infty)$ に制限して Speed measure $S(dz)$ によって選び, X を x から T_z まで走らせたものと y から初めて T_z まで走らせたものを連結する

つまり (左辺) は生存時間で条件付けた場合についての式であり, (右辺) は最大値で条件付けた場合についての式となっている。詳しくは Williams [1979], Pitman and Yor [1982] 等を参照すること。Pitman and Yor [1996] では状態空間を $\mathcal{S} = [0, \infty)$ としているが, 実際は条件を満たす過程において空でなければ問題がない。その場合, z は $[x \vee y, r)$ に制限して積分すればよい。

もう 1 つの補題は Last Exit Time の密度についてである。

Lemma 4 (Proposition 3.1 of Egami and Kevkhishvili [2017])

$x, y \in (l, b)$ であるとする。 b を Killing Boundary として持つ拡散過程 X について, Last Exit Time の密度は speed measure m に対する推移密度 $p(t, x, y)$ を用いて以下のように表せる。

$$\mathbb{P}_x(L_y \in dt, L_y > 0) = \frac{p(t, x, y)}{S(b) - S(y)} dt.$$

証明の概要は以下の通りである。minimal excessive function h によって $T_y < T_b$ かつ生存時間が y の Last Exit Time となるように条件付けた拡散過程 X と同じ Law を持つ過程 X^h を生成すると、その X^h の生存時間 ξ が元の過程 X の Last Exit Time と同じ分布を持つ。その ξ の分布を Martin 関数を用いて特定する。詳しい議論については Egami and Kevkhishvili [2017], Salminen [1984] を参照すること。

Proof of Proposition 2. $\mathbb{P}_x^{L_y}(\cdot \mid L_y = t) = \mathbb{P}_x^t(\cdot \mid X_t = y)$ であるので、

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x^{L_y}(\cdot \cap L_y > 0) &= \int_0^\infty \mathbb{P}_x(L_y \in dt, L_y > 0) \mathbb{P}_x^{L_y}(\cdot \mid L_y = t) \\ &= \int_0^\infty dt \frac{p(t, x, y)}{S(b) - S(y)} \mathbb{P}_x^t(\cdot \mid X_t = y) \\ &= \frac{1}{S(b) - S(y)} \int_{x \vee y}^b S(dz) \mathbb{P}_x^{T_z} \circ (\mathbb{P}_y^{T_z})^\wedge \end{aligned}$$

最後の等号は Lemma 3 と Last Exit Time までにおける最大値は b 以上をとりえない事実から成立する。よって示せた。 $\square$

付録 B MATLAB の実行コード

付録.B では当論文で実行した MATLAB のスクリプト等を掲載する。

B.1 逆ラプラス変換

"Scriptforlapinv.m"

```
% LapLOStd は 3 章で Explicit に表せた標準ブラウン運動におけるラプラス変換
% quadrature method を用いる。Cohen [2007] や Wang and Xu [2005] 等参照
clear
a=10^-6; % 逆変換における定数
T=10^-3; % 最終的にどのスケールで見えるか
M=100; % 評価する点の数
N=100; % 評価する点の数
k=700; % Last Exit Time についてグラフをどの程度まで表示するかを表す指標
l=700; % Occupation Time についてグラフをどの程度まで表示するかを表す指標
h=2*T/N;
j=sqrt(-1);
I=40;
s1=zeros(10*N,1);
s2=zeros(10*M,1);
F=zeros(10*M,10*N);
% 必要な定数等の設定を行う
```

```

for n=1:10*N
for m=1:10*M
s1(n)=a+j*pi*(n-1)/N;
s2(m)=a+j*pi*(m-1)/M;
F(m,n)=LapL0Std(0,3,10,s1(n),s2(m));
% ラプラス変換からモーメント条件を作る
end
end

f=real(ifft2(F));
% モーメント条件の行列 F に対し 2 次元離散逆フーリエ変換を行う関数 ifft2 で評価
f1=zeros(k,l);
for m=1:k
for n=1:m
% m と n は等分されているので, m>n のところのみに値を代入していく
f1(m,n)=max(0,exp(a*m*T+a*n*T)*f(m,n)/M/h/pi);
% 元の時間軸のスケールに戻す, その際にマイナスになる部分は 0 としておく
end
end

mesh(f1) % 3 次元グラフ化
ylabel('last exit time');
xlabel('occupation time');
zlabel('f(l,a)');

```

B.2 $T_b - L_y$ と L_y のシミュレーション

"DriftTbL.m"

% Tb-Ly をシミュレーションで導出する

```
function [L]=DriftTbL(x, y,b,mu, sigma,dt, n)
```

counter=0; % Tb までのステップ数

lastcounter=0; % Last Exit するまでのステップ数 (離散なので最後に y より下にいた時刻)

Last=zeros(n,1); % 各サンプルにおける Last Exit の時刻ベクトル

X=x;

Tb=zeros(n,1); % 各サンプルにおいて Kill されるまでの時刻ベクトル

```
for i=1:n
```

```
while X < b % b に達したらブレイク
```

```

X=X+mu*dt+sigma*sqrt(dt)*randn; % dt ごとに分布に従って過程を作っていく
counter=counter+1;
if X < y % y より下にいる場合はまだ last exit していないので現在のステップ数で更新
    lastcounter=counter;
end
end
Tb(i)=counter*dt; % 時間のパーティションの幅をかけて時刻へと変換する
Last(i)=lastcounter*dt; % 上に同じ
end
L=mean(Tb-Last); % 期待値を取る

```

"DriftLast.m"

```

% Last Exit Time をシミュレーションで導出する
function [L]=DriftLast(x, y,b,mu, sigma,dt, n)
counter=0; % kill されるまでのステップ数
lastcounter=0; % Last Exit するまでのステップ数
Last=zeros(n,1); % Last Exit Time のサンプルベクトル
X=x; % X は dt 分過程を進めた時の値, x は初期値
for i=1:n
while X < b
    X=X+mu*dt+sigma*sqrt(dt)*randn;
    counter=counter+1;
    if X < y
        lastcounter=counter;
    end
end
Last(i)=lastcounter*dt; % 時間のパーティションの幅をかけて時刻へ変換
end
L=mean(Last); % 期待値を取る

```

"ScriptforSim.m"

```

x=0;
b=10;
mu=1;
sigma=1;

```

```

dt=10^-3;
n=10^5;
F=@(y)DriftTbL(x, y,b,mu, sigma,dt, n);% y に関する関数として定義する
G=@(y)DriftLast(x, y,b,mu, sigma,dt, n);
fplot(F, [x+10^-10, b-10^-10])
figure
fplot(G, [x+10^-10, b-10^-10])

```

B.3 費用最小化

```

"LapL0.m"
function[lap]=LapL0(mu, sigma, x, y,b,alpha,beta)
% ドリフト  $\mu \neq 0$  のブラウン運動を扱う
% Last Exit Time と Occupation Time のラプラス変換を数値計算で求める関数
func2=@(z)Scalediff(mu,sigma, z)...
    .*LapF0(mu, sigma, x,y,z,alpha,beta).*LapF0(mu, sigma, y,y,z,alpha,beta);
% 被積分関数を z で定義
% LapF0 は Zhang [2015] の式をドリフト付ブラウン運動について書き下したもの
lap=1./(Scale(mu,sigma, b)-Scale(mu,sigma, max(x,y)))...
    .*integral(func2,max(x,y),b);% Theorem の式

"CostFunction.m"
function[Cost]=CostFunction(mu,sigma,x,y,b,alpha,beta)
Cost=1+LapL0(mu, sigma, x, y,b,alpha,beta)-LapL0(mu, sigma, x, y,b,0,beta);
% 費用関数を 4 章の具体例に即して作成

"plotcost.m"
function[]=plotcost(mu,sigma,x,b,alpha,beta)
% y に関して費用関数のグラフを作る関数
z=@(y)CostFunction(mu,sigma,x,y,b,alpha,beta);
fplot(z, [x,b-10^-10])

"ScriptforCostmin.m"
clear;
sigma=3;

```

```

x=0;
b=50;
n=10;
alpha=0.05;
beta=0.05;
mu=0.5;
plotcost(mu,sigma,x,b,alpha,beta)% mu を 0.5 としたときのグラフ
hold on % グラフを同じ figure 内に描画する
mu=1.5;
plotcost(mu,sigma,x,b,alpha,beta)% mu を 0.5 としたときのグラフ
mu=2.5;
plotcost(mu,sigma,x,b,alpha,beta)% mu を 0.5 としたときのグラフ

```

参考文献

- [1] Bertoin, J [1996] *Lévy Processes*, Cambridge University Press
- [2] Borodin, A. N. and P. Salminen [2002] *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae*, Birkhäuser
- [3] Cohen, A. M. [2007] *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*, Springer
- [4] Csáki, E, A. Földes, and P. Salminen [1987]“On the joint distribution of the maximum and its location for a linear diffusion,” *Annales de l’I.H.P. Probabilités et statistiques*23(2), pp.179-194
- [5] Dassios, A. [2005] “On the quantiles of Brownian motion and their hitting times,” *Bernoulli*11(1), pp.29-36
- [6] Egami, M. and R. Kevkhishvili [2017]“An application of time reversal to credit risk management,” *ArXiv e-prints*, 1701.04565, <http://adsabs.harvard.edu/abs/2017arXiv170104565E>, (accessed 2018-10-01)
- [7] Gettoor, R. and M. Sharpe [1973], “Last Exit Times and Additive Functionals,” *The Annals of Probability*1(4), pp.550-569
- [8] Pitman, J. and M. Yor [1982], “A decomposition of Bessel bridges”, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*59, pp.425 – 457
- [9] Pitman, J. and M. Yor [1996] in *Itô’s Stochastic Calculus and Probability Theory*, ed. by N. Ikeda, S. Watanabe, M. Fukushima, and H. Kunita, Springer-Verlag, pp.293-310
- [10] Salminen, P. [1984]“ONE-DIMENSIONAL DIFFUSIONS AND THEIR EXIT SPACES,” *Mathematica Scandinavica*54(2), pp.209-220
- [11] Wang, Z. and D. Xu [2005] “Numerical inversion of multidimensional laplace transforms,” *A Journal of Chinese Universities*14(3), pp.267-276
- [12] Williams, D. [1979] *Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Vol. 1: Foundations*, John Wiley and Sons.
- [13] Zhang, H. [2015] “Occupation times, drawdowns, and drawups for one-dimensional regular diffusions,” *Advances in Applied Probability*47(1), pp.210-230.