

或る非線形常微分方程式に対する 正值解の存在性

広島大・理 内 藤 学 (Manabu Naito)

2 階の非線形常微分方程式

$$(1) \quad x'' + p(t)f(x) = 0, \quad t \geq t_0,$$

を考える。ここで、

$$(2) \quad p \in C[t_0, \infty), \quad p(t) \geq 0 \text{ for } t \geq t_0,$$

$$(3) \quad f \in C(0, \infty), \quad f(x) > 0 \text{ for } x > 0,$$

と仮定する。我々は、方程式 (1) に対する正值解 $x(t)$, $x(t) > 0$ on $[t_1, \infty)$ for some $t_1 \geq t_0$, の存在性について議論する。 $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) の場合に知られている重要な結果をまとめてみよう。

定理 F 1 $f(x) = x^\alpha$ とする。

(i) $\alpha > 1$ のとき、(1) が正值解 $x(t) > 0$ ($t \geq \exists t_1$) をもつための必要十

分条件は $\int_{t_0}^{\infty} tp(t)dt < \infty$ が成立することである (Atkinson [1]);

(ii) $\alpha < 1$ のとき、(1) が正值解 $x(t) > 0$ ($t \geq \exists t_1$) をもつための必要十

分条件は $\int_{t_0}^{\infty} t^\alpha p(t)dt < \infty$ が成立することである (Belohorec [2] 等)。

定理 F 2 $f(x) = x$ とする。このとき、 $\int_{t_0}^{\infty} p(t) dt = \infty$ ならば、(1)

は正値解をもたない (Fite [3])。

従って、残る場合は、 $f(x) = x$ かつ $\int_{t_0}^{\infty} p(t) dt < \infty$ の場合であるが、この場合は次の形の比較定理が成立する。

定理 F 3 二つの微分方程式

$$(4) \quad x'' + p_1(t)x = 0$$

$$(5) \quad y'' + p_2(t)y = 0$$

を考える。ここで、 $p_i \in C[t_0, \infty)$, $p_i(t) \geq 0$ for $t \geq t_0$ ($i = 1, 2$) かつ

$$\int_t^{\infty} p_1(s) ds \leq \int_t^{\infty} p_2(s) ds < \infty, \quad t \geq t_0,$$

とする。このとき、(5) が正値解 $y(t)$ をもてば、(4) も正値解 $x(t)$ をもつ (Hille [4])。

オイラーの方程式

$$(6) \quad x'' + \frac{\lambda}{t^2} x = 0, \quad t \geq 1, \quad (\lambda > 0 : \text{定数})$$

は、 $0 < \lambda \leq 1/4$ ならば正値解をもち、 $\lambda > 1/4$ ならば正値解をもたない。従って、方程式 (6) と

$$(7) \quad x'' + p(t)x = 0$$

に対して、定理 F 3 を適用して次の定理の (i) および (ii) が得られる。また、(iii) も容易に得られる：

定理 F 4 (2) を仮定する。また、 $\int_{t_0}^{\infty} p(t) dt < \infty$ とし、

$$Q(t) = t \int_t^{\infty} p(s) ds, \quad t \geq t_0,$$

と定める。このとき、

- (i) $\limsup_{t \rightarrow \infty} Q(t) < \frac{1}{4}$ ならば、(7) は正値解をもつ；
- (ii) $\liminf_{t \rightarrow \infty} Q(t) > \frac{1}{4}$ ならば、(7) は正値解をもたない；
- (iii) $\limsup_{t \rightarrow \infty} Q(t) > 1$ ならば、(7) は正値解をもたない。 (Hille [4])

定理 F 4 の (i) と (iii) を使えば、パラメータ $\lambda > 0$ を含む方程式

$$(8_{\lambda}) \quad x'' + \lambda p(t)x = 0 \quad (\lambda > 0 : \text{パラメータ})$$

に対して次がわかる。

定理 F 5 定理 F 4 と同じ仮定・記号のもとで、

- (i) $\limsup_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0$ ならば、任意の $\lambda > 0$ に対して、 (8_{λ}) は正値解をもつ；
- (ii) $0 < \limsup_{t \rightarrow \infty} Q(t) < \infty$ ならば、次をみたす $\lambda_0 > 0$ が存在する：

$$\begin{cases} 0 < \lambda < \lambda_0 \text{ なる } \lambda \text{ に対して、} (8_{\lambda}) \text{ は正値解をもつ、} \\ \lambda > \lambda_0 \text{ なる } \lambda \text{ に対して、} (8_{\lambda}) \text{ は正値解をもたない；} \end{cases}$$
- (iii) $\limsup_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \infty$ ならば、どんな $\lambda > 0$ に対しても、 (8_{λ}) は正値解をもたない。 (Nehari [6])

上述の結果、定理 F 1 ～ F 5、は非線形項 $f(x)$ を $f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) と限定して、(1) が正値解をもつための、 $p(t)$ についての条件を求めたものと思える。一方、係数 $p(t)$ を $p(t) = t^{\beta}$ ($\beta \in \mathbf{R}$) と限定して、(1) が正値解をもつための、 $f(x)$ についての条件を求める研究もある。

定理 P 1 $p(t) = t^\beta$ とする。

(i) $\beta < -2$ のとき、(1) は必ず正値解をもつ；

(ii) $\beta > -2$ のとき、(1) が正値解をもつための必要十分条件は $\int_1^\infty x^\beta f(x) dx < \infty$ が成立することである。
(Naito [5])

最近、筆者は、 $\beta = -2$ のとき、定理 F 3 ~ F 5 に対応して、以下の定理 P 3 ~ P 5 が成立することを明らかにした。

定理 P 3 二つの微分方程式

$$(9) \quad x'' + \frac{1}{t^2} f_1(x) = 0$$

$$(10) \quad y'' + \frac{1}{t^2} f_2(y) = 0$$

を考える。ここで、 $f_i \in C(0, \infty)$, $f_i(x) > 0$ for $x > 0$ ($i = 1, 2$) かつ $x_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) なる適当な点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ に対して

$$\int_{x_n}^x f_1(y) dy \leq \int_{x_n}^x f_2(y) dy, \quad x \geq x_n,$$

とする。このとき、(10) が正値解 $y(t)$ をもてば、(9) も正値解 $x(t)$ をもつ。

従って、方程式

$$(11) \quad x'' + \frac{1}{t^2} f(x) = 0$$

に対して次が得られる。

定理 P 4 (3) を仮定し、

$$G(x) = \frac{1}{x^2} \int_1^x f(y) dy, \quad x \geq 1,$$

と定める。このとき、

- (i) $\limsup_{x \rightarrow \infty} G(x) < \frac{1}{8}$ ならば、(11) は正値解をもつ；
- (ii) $\liminf_{x \rightarrow \infty} G(x) > \frac{1}{8}$ ならば、(11) は正値解をもたない；
- (iii) $\limsup_{x \rightarrow \infty} G(x) > \frac{1}{2}$ ならば、(11) は正値解をもたない。

定理 P 4 の (i) と (iii) を使えば、パラメータ $\lambda > 0$ を含む方程式

$$(12_\lambda) \quad x'' + \frac{\lambda}{t^2} f(x) = 0 \quad (\lambda > 0 : \text{パラメータ})$$

に対して次がわかる。

定理 P 5 定理 P 4 と同じ仮定・記号のもとで、

- (i) $\limsup_{x \rightarrow \infty} G(x) = 0$ ならば、任意の $\lambda > 0$ に対して、 (12_λ) は正値解をもつ；
- (ii) $0 < \limsup_{x \rightarrow \infty} G(x) < \infty$ ならば、次をみたす $\lambda_0 > 0$ が存在する：
- $$\begin{cases} 0 < \lambda < \lambda_0 \text{ なる } \lambda \text{ に対して、} (12_\lambda) \text{ は正値解をもつ、} \\ \lambda > \lambda_0 \text{ なる } \lambda \text{ に対しては、} (12_\lambda) \text{ は正値解をもたない；} \end{cases}$$
- (iii) $\limsup_{x \rightarrow \infty} G(x) = \infty$ ならば、どんな $\lambda > 0$ に対しても、 (12_λ) は正値解をもたない。

以下、定理 P 3 の証明を述べる。そのため、次の補題を用意しておく。

補題 (3) を仮定する。このとき、

- (i) 方程式 (11) の正値解 $x(t) > 0$ ($t \geq \exists t_1$) は次を満たす：
- $$x'(t) > 0 \quad \text{for } t \geq t_1 ;$$
- $$x(t) \geq x(t_1) + x'(t)(t - t_1) \quad \text{for } t \geq t_1 ;$$
- $$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = \ell \quad \text{for some } \ell \in [0, \infty).$$

(ii) 方程式 (11) が

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = \ell \quad \text{for some } \ell \in (0, \infty)$$

となるような正値解 $x(t)$ をもつための必要十分条件は

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} f(y) dy < \infty$$

が成立することである。

(Naito [5] 参照)

《定理 P 3 の証明》 二つの場合に分けて考える。

場合 1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} f_2(y) dy < \infty$ の場合。

この場合、簡単な計算によって、

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} f_1(y) dy < \infty$$

であることがわかる。従って、補題の (ii) によって、方程式 (9) は $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = \ell$ for some $\ell \in (0, \infty)$ となるような正値解 $x(t)$ をもつ。

場合 2. $\int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} f_2(y) dy = \infty$ の場合。

この場合、補題の (i) および (ii) によって、(10) の正値解 $y(t)$ は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty \quad \text{かつ} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0$$

を満たすことがわかる。さて、 $w(r) = y(e^r)$ とすると、 $w(r)$ は自励系の方程式

$$\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{dw}{dr} + f_2(w) = 0$$

を満たす。さらに、

$$(13) \quad \varphi(r) = w(r) - \frac{dw}{dr}(r)$$

とすると、

$$(14) \quad \frac{d\varphi}{dr}(r) = f_2(w(r))$$

であり、補題の (i) によって、 $\varphi(r) > 0$ (r : 十分大) であることがわかる。

$\frac{dw}{dr}(r) > 0$, $w(r) \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) であるから、 $r \in [r_*, \infty)$ と $w \in [w_*, \infty)$ は 1 対 1 に対応していることに注意して (ここで、 r_* , w_* は十分大)、独立変数を w に替えて考える。(13) と (14) より

$$\frac{d\varphi}{dw} = \frac{d\varphi/dr}{dw/dr} = \frac{f_2(w)}{w - \varphi}$$

すなわち

$$(15) \quad (w - \varphi) \frac{d\varphi}{dw} = f_2(w).$$

この式を $[w_*, w]$ 上積分して整理すると

$$(16) \quad \varphi(w) = \frac{1}{w} \left\{ c + \int_{w_*}^w \varphi(\rho) d\rho + \frac{1}{2} [\varphi(w)]^2 + \int_{w_*}^w f_2(\rho) d\rho \right\},$$

ここで、 $c = \varphi(w_*) \{ w_* - (1/2) \varphi(w_*) \} > 0$. 定理 P 3 の命題中の x_n で $x_n \geq w_*$ となるものを固定し、それを w_0 と置く。このとき、(16) より、

$$\varphi(w) = \frac{1}{w} \left\{ d + \int_{w_0}^w \varphi(\rho) d\rho + \frac{1}{2} [\varphi(w)]^2 + \int_{w_0}^w f_2(\rho) d\rho \right\}, \quad w \geq w_0,$$

ここで、 $d > 0$ は定数。

新たに、 $\psi = \psi(w)$ についての方程式

$$\psi(w) = \frac{1}{w} \left\{ d + \int_{w_0}^w \psi(\rho) d\rho + \frac{1}{2} [\psi(w)]^2 + \int_{w_0}^w f_1(\rho) d\rho \right\}, \quad w \geq w_0,$$

を考えると、この方程式は

$$0 < \psi(w) \leq \varphi(w), \quad w \geq w_0,$$

なる解 $\psi(w)$ をもつことがわかる (例えば、第一段関数として $\varphi(w)$ を取った逐次近似法を用いる)。 $\psi(w)$ は

$$(17) \quad (w - \psi) \frac{d\psi}{dw} = f_1(w)$$

を満たしている。さて、この ϕ と、 $v_0 > w_0$ となる v_0 に対して、 $v = v(r)$ についての初期値問題

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dr} = v - \phi(v) \\ v(1) = v_0 \end{cases}$$

を考える。(18) は $[1, \infty)$ 上で一意な解 $v(r)$ をもち、 $v(r) > 0$, $\frac{dv}{dr}(r) > 0$ for $r \geq 1$, であることが簡単に示せる。(17) と (18) によって、

$$\frac{d^2v}{dr^2} - \frac{dv}{dr} + f_1(v) = 0$$

であり、このことから、 $x(t) = v(\log t)$ は (9) の正值解になっていることが容易にわかる。 (証明終)

注意 我々は定理 P 3 ~ P 5 を (11) の形の方程式に対する結果として述べてきたが、もちろん、それらは

$$x'' - x' + f(x) = 0$$

の形の方程式に対するものとみなしてもよい。

References

- [1] F. V. Atkinson, On second-order nonlinear oscillations, Pacific J. Math., 5(1955), 643-647.
- [2] Š. Belohorec, Oscillatory solutions of certain nonlinear differential equations of second order, Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vied., 11(1961), 250-255.
- [3] W. B. Fite, Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 19(1918), 341-352.

- [4] E. Hille, Nonoscillation theorems, Trans. Amer. Math. Soc., 64(1948), 234-252.
- [5] M. Naito, Positive solutions of nonlinear differential inequalities, Hiroshima Math. J., 9(1979), 769-785.
- [6] Z. Nehari, Oscillation criteria for second-order linear differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 85(1957), 428-445.