

Uniqueness in Cauchy Problem

京大 数研 林田和也

§1. 微分作用素 L が elliptic のとき $Lu=0$ の解が Cauchy 問題の一貫性をみたしているかどうかは, 今までいろいろと研究されてきた。ここで Cauchy 問題の一貫性とは主に次の意味においてであった。

(A) 初期曲面 Γ 上の部分超曲面 (如何に小さくてもよい) 上で u の Cauchy data が 0 ならば $u \equiv 0$ 。

(B) ある一葉のまわりから, u がその葉で急激に 0 に減少すれば $u \equiv 0$ 。

Cauchy 問題の立場からみれば性質 (A) がいえていれば妥当なわけであるが, 性質 (B) はむしろ解の内部における一つの局所的性質を示しているものとみてよい。例えば, 1958 年に Calderón [2] が特性根が distinct のとき性質 (A) の意味で Cauchy 問題の一貫性を示したとき, 更に同じ場合に 1961 年 I. S. Bernstein [1] は性質 (B) をも証明した。

他方 Cauchy 問題の一貫性の研究がさかんになり始めた頃 (1956 ~) ロシアの数学者達 Morozov [9] Landis [7]

並びに Laurent [8] は L が 2 階 elliptic の場合に 性質 (A), (B) よりももっと精密な結果を得ていた。すなわち,

(C) 初期曲面 Γ 上の一点で u の Cauchy data が Γ に沿ってその点のまわりから、その点で急激に 0 に減少するならば $u \equiv 0$ 。

ここで従前の結果は 2 階でのみしか適用されない本質的な性質 (例えば 比較原理, Harnack の不等式 など) を用いている。そこで当然次の疑問が生じる:

L が高階 elliptic の場合にも性質 (C) は成立するか?

我々は 2 次元空間で L (単独又は system) の特性根が distinct の場合肯定的な結果を得た [5]。この事実 は Carleman [3] の結果の拡張にほかならない。我々の証明の中心は (B) における仮定 “ある一点のまわりから” を “その点を通る超曲面の片側で” という弱い仮定におきかえることである。

さてそれでは 2 次元空間で L の特性根が double の場合にはどうか。このとき A. Douglis は 1960 年に 性質 (A) を示している [4]。そこで我々は彼の結果を性質 (C) まで拡張しよう。特に L の特性根が double の場合には S. Mizohata [10] の idea によるところ大である。

§2. (x, y) 平面の原点の近傍で次の 1 階 elliptic system を考える。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_x + B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_y = H \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

但し B は Jordan 標準型で

$$B = \begin{pmatrix} \theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_s \end{pmatrix}.$$

といた場合, 各 block θ_k は $\theta_k = (\lambda_k)$ (simple) 又は $\theta_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \mu_k \\ 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$ (multiple) とする。

そして λ_k, μ_k は C^1 で H の element は有界可測函数, 更に $\operatorname{Im} \lambda_k \neq 0$ を仮定する。さて十分小さな $d > 0$ に対して中心 $(d/2, 0)$ 半径 $d/2$ の開円板を S_d で表す。我々の当面の目標は次の定理である。

Theorem 1. (1) の行列 B のみに依存する正数 δ が存在していて, $\overline{S_d}$ で C^1 なる (1) の解 u が S_d で次の条件をみたすならば $u \equiv 0$,

$$u_i = o(\exp(-r^{-\delta})) \quad (r \rightarrow 0, 1 \leq i \leq n).$$

この仮定をもっと弱くして

$$u_i = o(\exp(-(\frac{r^2}{x})^{-\delta})) \quad (\frac{r^2}{x} \rightarrow 0, 1 \leq i \leq n)$$

でおきかえてもよい。

この定理を証明するために少し準備を必要とする。 (x, y) 平面から (θ, ρ) 平面への次の変換を考える。

$$(2) \quad \theta = \tan^{-1}(y/x), \quad \rho = r^2/x.$$

R_d を (θ, ρ) 平面内の $|\theta| < \pi/2, 0 < \rho < d$ なる開矩形とすれば, 変換 (2) によって S_d と R_d は 1 対 1 に対応する。変換の様様

をみれば

$$x = p \cos^2 \theta, \quad y = \frac{1}{2} p \sin 2\theta$$

$$\begin{pmatrix} \theta_x & \theta_y \\ p_x & p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{p} \tan \theta & 1/p \\ 1 - \tan^2 \theta & 2 \tan \theta \end{pmatrix}$$

今度は $\bar{S}_d$ で次の単独方程式を考える。

$$(3) \quad u_x + \lambda u_y \equiv F.$$

ここで $\lambda \in C^1(\bar{S}_d)$ で $\inf \lambda \neq 0$ in $\bar{S}_d$ 。そのとき (3) 式は変換 (2) によって次の式に変換される。

$$(4) \quad u_p + \frac{1}{p} (Q + iP) u_\theta \equiv G.$$

但し、 $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ とおけば

$$P(\theta, p) = \lambda_2 f^{-1} \cos^2 \theta,$$

$$(5) \quad Q(\theta, p) = f^{-1} \cos \theta \{ \sin \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + \lambda_1 (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + 2|\lambda|^2 \cos^2 \theta \sin \theta \},$$

$$f = |p_x + \lambda p_y|^2 \cos^4 \theta.$$

更に (4) の右辺は

$$(6) \quad G = f^{-1} \cos^4 \theta (p_x + \bar{\lambda} p_y) F.$$

この f について $\lambda_2 \neq 0$ より次の事実が容易に分る。「 $f \in C^1(\bar{R}_d)$ で $\bar{R}_d$ で $f > m$ なる正の常数 m が存在する。」

さて次の命題を準備しておく。その証明は [5] をみられたい。

Proposition 1. (3) の u について次の条件を仮定する。

$$(7) \quad u = o(\exp(-r^{-\delta-\epsilon})) \quad (r \rightarrow 0) \text{ in } S_d.$$

あるいはもっと弱い仮定で

$$(7') \quad u = o(\exp(-(\frac{r^2}{x})^{-\delta-\epsilon})) \quad (\frac{r^2}{x} \rightarrow 0) \text{ in } S_d.$$

但し δ は λ にのみ依存する正数で、 ε はどんなに小さくてもよい正数。そのとき $\phi_n(\rho) = \exp(n\rho^{-\delta})$ とおけば

$$\begin{aligned}
 & \int_0^R \phi_n^2 \|u_\rho + \frac{1}{\rho} (Q + iP) u_0\|^2 d\rho \\
 (8) \quad & \geq n\delta(\delta+1-M) \int_0^R \frac{\phi_n^2}{\rho^{\delta+2}} \|u\|^2 d\rho \\
 & - C_1 n\delta \int_0^R \frac{\phi_n^2}{\rho^{\delta+1}} \|u\|^2 d\rho - \frac{C_2}{R} \phi_n^2(R) \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^R \left\| \frac{1}{\rho} \phi_n (iP u_0 - \phi_n' u) \right\|^2 d\rho.
 \end{aligned}$$

$C_1, C_2, \dots$ は n に依存しない正の常数で特に

$$(9) \quad M = \max |Q_0 + 1 - \frac{P_0 Q}{P}|.$$

Remark 1. このような評価式を導くに際して、従来 $P \neq 0$ すなわち $1/P$ が有界であるということが本質的であった。ここでは (5) から分るように $|\theta| = \pi/2$ で $P = 0$ になるから今までの方法は用いることは出来ない。しかし少し工夫すれば、 $1/P$ が bounded でなくとも $Q P_0 / P$ がそうであることにより困難をさけることが出来るのである。

Remark 2. u の原点における減少の order の限界が (8) 式の右辺における $\delta+1-M > 0$ である。特に 2 階 elliptic の場合原点で λ を $\pm i$ に変換して (9) における M を計算すれば、 $M = 2 + \varepsilon$ (ε はいくらでも小さく出来る) で §4 と合わせて考えれば Laurentév [8] の結果とよく合致している。

さて $R (< 1)$ も充分小さくとり固定し $0 \leq \rho \leq R$ で $u \neq 0$ と仮定する。 δ を大きくとり固定すれば (8) 式は次のように簡単になる。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^R \phi_n^2 \|u_\rho + \frac{1}{\rho} (Q + iP) u_0\|^2 d\rho \\
 (10) \quad & \geq \frac{1}{2} n\delta^2 \int_0^R \frac{\phi_n^2}{\rho^{\delta+2}} \|u\|^2 d\rho
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^R \left\| \frac{1}{\rho} \phi_n i P u_0 - \phi_n' u \right\|^2 d\rho.$$

この式は(1)における matrix B が simple block のみからなる場合に相当する評価式なのであってこれから multiple の場合に対しても適用されるような式を導かなければならない。

そのために [10] の結果を参考にしながら進んでゆくことにする。

§3. (10) 式右辺第2項を $\frac{1}{2} \int_0^R \left\| \rho^{\frac{\delta}{2}-1} \phi_n i P u_0 - \rho^{\frac{\delta}{2}} \phi_n' u \right\|^2 d\rho$ でおきかえ基準量として

$$I_n^2 = \int_0^R \left\| \rho^{\frac{\delta}{2}} \phi_n' u \right\|^2 d\rho,$$

$$\rho_n^2 I_n^2 = \int_0^R \left\| \rho^{\frac{\delta}{2}-1} \phi_n i P u_0 \right\|^2 d\rho.$$

とあければ

$$(11) \quad \int_0^R \phi_n^2 \left\| u_\rho + \frac{1}{\rho} (Q + iP) u_0 \right\|^2 d\rho$$

$$\geq \frac{1}{4n} (\rho_n^2 I_n^2 + I_n^2).$$

が得られる。今度は $\bar{S}_d$ で次の system を考える。

$$(12) \quad u_{1x} + \lambda u_{1y} + \mu u_{2y} \equiv F_1.$$

$$(13) \quad u_{2x} + \lambda u_{2y} \equiv F_2.$$

u_1, u_2 について Proposition 1 の条件 (7) あるいは (7') を仮定しておく。 (θ, ρ) 変数で (12) をかきかえ両辺に $\rho^{\frac{\delta}{2}}$ を掛けければ

$$\begin{aligned} & |\rho_x + \lambda \rho_y|^2 (\rho^{\frac{\delta}{2}} u_1)_\rho + (\theta_x + \lambda \theta_y) (\rho_x + \bar{\lambda} \rho_y) (\rho^{\frac{\delta}{2}} u_1)_\theta \\ &= (\rho_x + \bar{\lambda} \rho_y) \rho^{\frac{\delta}{2}} F_1 - \mu (\rho_x + \bar{\lambda} \rho_y) \rho^{\frac{\delta}{2}} (u_{2\rho} \rho_y + u_{2\theta} \theta_y) \\ &\quad + \frac{\delta}{2} |\rho_x + \lambda \rho_y|^2 \rho^{\frac{\delta}{2}-1} u_1. \end{aligned}$$

故に (4) より

$$\begin{aligned} & |(p^{\frac{\delta}{2}} u_1)_\rho + \frac{1}{\rho} (\theta + i P) (p^{\frac{\delta}{2}} u_1)_\theta| \\ & \leq C_3 (\delta |u_1| + |F_1| + \rho^{\frac{\delta}{2}} \cos^2 \theta (\frac{1}{\rho} |u_{2\theta}| + |\tan \theta| |u_{2\rho}|)). \end{aligned}$$

この式と (10) より又 (5) における P の形より

$$\begin{aligned} (14) \quad & C_4 \int_0^R \Phi_n^2 (\delta^2 \|u_1\|^2 + \|F_1\|^2 + \|\rho^{\frac{\delta}{2}-1} \cos^2 \theta u_{2\theta}\|^2 \\ & + \|\rho^{\frac{\delta}{2}} \sin \theta \cos \theta u_{2\rho}\|^2) d\rho \\ & \geq n \delta^2 \int_0^R \frac{1}{\rho^2} \Phi_n^2 \|u_1\|^2 d\rho. \end{aligned}$$

同じく (11), (13) より

$$\begin{aligned} (15) \quad & \int_0^R \Phi_n^2 \|F_2\|^2 d\rho \geq \frac{1}{4n} (\int_0^R \|\rho^{\frac{\delta}{2}-1} \Phi_n i P u_{2\theta}\|^2 d\rho \\ & + \int_0^R \|\rho^{\frac{\delta}{2}} \Phi_n' u_2\|^2 d\rho). \end{aligned}$$

他方 $|u_{2\rho} + \frac{1}{\rho} (\theta + i P) u_{2\theta}| \leq |F_2|$ より

$$|u_{2\rho}| \leq C_5 (|F_2| + \frac{1}{\rho} \cos \theta |u_{2\theta}|).$$

すなわち

$$\rho^{\frac{\delta}{2}} |\sin \theta \cos \theta| |u_{2\rho}| \leq C_6 (|F_2| + \rho^{\frac{\delta}{2}-1} |P| |u_{2\theta}|).$$

この不等式を (14) 式の左辺第 3 項に代入したものと (15) を組み合わせれば

$$\begin{aligned} & C_7 (\delta^2 + n \delta) \int_0^R \Phi_n^2 (\|F_1\|^2 + \|F_2\|^2) d\rho \\ & \geq n \delta^2 \int_0^R \Phi_n^2 (\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2) d\rho. \end{aligned}$$

この最後の評価式を始めの system (1) の各 block 毎に適用して組み合わせれば Theorem 1 が証明される。

§4. (1) の解はその Cauchy data によって如何に影響されるかをみてみよう。

$\Omega_a = S \cap \{0 < x < a\}$ とおく。 $\partial\Omega_a$ の弧状部分を Γ_a 線状部分を l_R とかくことにする。

Theorem 2. u は Ω_a で system (1) の解とする。そのとき Γ_a 上で $u_i = o(\exp(-r^{-2\delta-\epsilon}))$ ($r \rightarrow 0$, $\epsilon, \delta > 0$) を仮定すれば $S_{1/2} \cap \Omega_a$ 内で

$$u_i = o(\exp(-r^{-\delta})) \quad (r \rightarrow 0, 1 \leq i \leq n).$$

がなりたつ。

この定理の証明は特性根が *distinct* の場合に [5] で示されている。*double* の場合も同じ方針で進めばよいので、証明は略しておく。しかしこの定理への過程を明らかにするため 2つの命題を挙げよう。

Proposition 2. u は原点の近傍で system (1) の解とする。そのとき $1 < p < 2$ ならば

$$|u_i(0)| \leq C \sum_{j=1}^m R^{-1} \left(\iint_{r \leq R} |u_j|^2 dx dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \quad (1 \leq i \leq n)$$

がなりたつ。但し C は u, p に依存するかもしれないが R に依存しない数である。

証明の方針は (1) の左辺の微分作用素に対する原点における接しく作用素の基本解を作り、それによって u の原点における積分表示をし、その積分に Hölder の不等式を適用する。

Proposition 3. Ω_a で u は (1) の解とする。 Γ_a に沿って $u_i = o(\exp(-r^{-2\delta-\epsilon}))$ ($r \rightarrow 0$, $\delta > 1$, $\epsilon > 0$) ならば

$$\int_{\Omega_R} |u_i|^2 dx dy = o(\exp(-R^{-\delta})) \quad (R \rightarrow 0, 1 \leq i \leq n).$$

が成り立つ。

この命題も証明するには Γ_a 上で $v = u$ なる v を適当にとり

$w = u - v$ に対して 従来の Cauchy 問題の一貫性の証明 ([2], [6], [10]) をくり返せばよい。ここで $\delta > 1$ なる事が重要である。命題 3 の仮定のもとに $S_{1/2}$ で命題 3 を適用すれば 定理 2 が得られ 定理 1 と定理 2 を合わせれば我々の目標の定理が得られる。

Theorem 3. $u \in C^1(\bar{\Omega}_a)$ として Ω_a で system (1) の解とする。そのとき matrix B のみに依存する正数 δ が存在して Γ_a で

$$u_i = o(\exp(-r^{-\delta})) \quad (r \rightarrow 0, 1 \leq i \leq n)$$

ならば $u \equiv 0$

References

- [1] I. S. Bernstein, J. Math. & Mech. 10 (1961), 579-606.
- [2] A. P. Calderón, Amer. J. Math. 80 (1958), 16-36.
- [3] T. Carleman, Arkiv Mat. 26 B (1938), 1-9.
- [4] A. Douglis, Comm. Pure Appl. Math (1960), 593-607.
- [5] K. Hayashida Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Ser. A, 2 (1967), 429-449.
- [6] H. Kumano-go, Osaka Math. Jour. 14 (1962), 181-212.
- [7] E. M. Landis, Dokl. Akad. Nauk SSSR 107 (1956), 640-643.
- [8] M. M. Lavrentiev, Dokl. Akad. Nauk SSSR 112 (1957), 195-197.
- [9] S. N. Merglyan, Dokl. Akad. Nauk SSSR 107 (1956), 644-647.
- [10] S. Mizohata, Proc. Japan Acad. 34 (1958), 687-692.