

多変数フーリエ解析

東大教養学部 竜沢周雄

さき「数論汎智」に Bocher による Poisson summation formula の変形とみられる次の定理を述べた。

定理 $f(x_1, \dots, x_n)$ が各変数について周期 1, unit cube で有界かつ可積分とする。且 $(x_1, \dots, x_n)$ で $f(x_1, \dots, x_n)$ が連続であるかぎり, そこで $f(x_1, \dots, x_n)$ のフーリエ級数が収束するならば極限値は $f(x_1, \dots, x_n)$ に等しい。

この定理は, たとえば有限次代数体における Hecke theta-formula を導く場合に用いられる (T. Tatzawa; On the extended Hecke theta-formula, Proc. at the International Conference on Number theory, Moscow, 1971)。また, (竜沢周雄; 整数論と解析的方法, 日本数学会誌論説) にも応用例がみられる。

こゝではフーリエ解析の問題として, 有界という仮定を除くこと, また不連続点まで考えることを問題とする。そしてフーリエ級数が収束するとき何に収束するかという問題を内

題とする。これについて1変数の場合は彌永記念号に筆者が
書いている (T. Tatsuzaawa; On a theorem in the theory of
Fourier series, Journ. of the Fac. of Sci., Univ. of Tokyo,
1968). そのとき, 多変数の場合にはどうもできなかった。

こゝでは始めの定理を拡張したことはならないが多少考
えを述べてみる。簡単のため $n=2$ の場合について
要旨を述べる。

(1) $f(x, y)$ は各変数について周期1, unit cube

$$I = \{(x, y); 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$$

で可積分とする。

そのとき

$$a(m, n) = \iint_I f(x, y) e^{-2\pi i(mx+ny)} dx dy$$

を $f(x, y)$ の Fourier 係数とし、部分和

$$s(k, l) = \sum_{|m| \leq k} \sum_{|n| \leq l} a(m, n) e^{2\pi i(mx+ny)}$$

を定義し、形式的無限和

$$\lim_{k \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty} s(k, l), \text{ ときには } \sum \sum_{(m, n)} \text{ と略記}$$

を $f(x, y)$ の Fourier 級数と名付ける。又 $f(x, y)$ において

(2) すべての k について $\lim_{l \rightarrow \infty} s(k, l)$ が存在する

(3) すべての l について $\lim_{k \rightarrow \infty} s(k, l)$ が存在する

(4) $\lim_{k \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty} s(k, l)$ が存在する。換言すれば $f(x, y)$ は

いて, $f(x, y)$ の Fourier 級数が収束する。

以上 (1), (2), (3), (4) の仮定のもとに

定理 1. そのとき

$$\lim_{\rho \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} \frac{1}{(2\rho)^2 (2\tau)^2} \int_{x-\rho}^{x+\rho} \int_{y-\tau}^{y+\tau} \left\{ \int_{u-\rho}^{u+\rho} \int_{v-\tau}^{v+\tau} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} du dv$$

が存在し, $f(x, y)$ の Fourier 級数はこの値に収束する。

始めにこの定理を証明する方針を述べる。 ρ, τ をそれぞれ

$\frac{1}{2}$ より小さい任意の正数とし

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\rho} \frac{1}{2\tau} \int_{x-\rho}^{x+\rho} \int_{y-\tau}^{y+\tau} f(u, v) du dv$$

とすると, $\varphi(x, y)$ も各変数について周期 1 であり, この前の「数論汎関」の始めに述べたような手段により上述のように積分で定義された関数は必ず Fourier 展開可能になることを利用する。 $\varphi(x, y)$ の Fourier 係数は

$$\begin{aligned} b(m, n) &= \iint_I \varphi(u, v) e^{-2\pi i(mu + nv)} du dv \\ &= \iint_I e^{-2\pi i(mu + nv)} \left\{ \frac{1}{2\rho} \frac{1}{2\tau} \int_{u-\rho}^{u+\rho} \int_{v-\tau}^{v+\tau} f(x, y) dx dy \right\} du dv \\ &= \frac{1}{2\rho} \frac{1}{2\tau} \iint_I f(x, y) \left\{ \int_{x-\rho}^{x+\rho} \int_{y-\tau}^{y+\tau} e^{-2\pi i(mu + nv)} du dv \right\} dx dy \end{aligned}$$

$$= f(m) \tau(n) a(m, n)$$

ただし,

$$f(m) = \frac{\sin 2\pi m \rho}{2\pi m \rho}, \quad \tau(n) = \frac{\sin 2\pi n \tau}{2\pi n \tau}$$

と略記した。別の証明は (T. Tatsuura; some results in the Fourier analysis, Nagoya math. jour., 1966) をみられた。同様に

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\rho} \frac{1}{2\tau} \int_{x-\rho}^{x+\rho} \int_{y-\tau}^{y+\tau} g(u, v) du dv$$

も Fourier 展開可能で, その Fourier 係数は

$$c(m, n) = f(m) \tau(n) b(m, n) = f(m)^2 \tau(n)^2 a(m, n)$$

で与えられる。かくて, (1) だけの仮定から

$$\begin{aligned} & \sum_{(m, n)} \sum f(m)^2 \tau(n)^2 a(m, n) e^{2\pi i (mx + ny)} \\ (5) \quad &= \frac{1}{(2\rho)^2 (2\tau)^2} \int_{x-\rho}^{x+\rho} \int_{y-\tau}^{y+\tau} \left\{ \int_{u-\rho}^{u+\rho} \int_{v-\tau}^{v+\tau} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} du dv \end{aligned}$$

が求められた。ここで左辺の級数が $|s| < \frac{1}{2}$, $|t| < \frac{1}{2}$ で一様収束するに与えられれば, $\rho \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ として定理 1 がえられる。かくて, (2), (3), (4) の仮定から (5) の左辺の一様収束性を導くことは以下の問題となるのである。

(4) により, $\varepsilon > 0$ に対して M, N が存在して

$$K > M, \quad L > N$$

なるとき,

$$|\delta(K, L) - \delta(M, N)| < \varepsilon$$

となる。したがって,

$$\sum_{M < |m| \leq K} \sum_{N < |n| \leq L} a(m, n) e^{2\pi i(m\alpha + n\beta)}$$

$$= \delta(K, L) - \delta(K, N) - \delta(M, L) + \delta(M, N)$$

の絶対値は 2ε をこえない。

こゝで,

$$S(l) = \sum_{M < |m| \leq K} \sum_{N < |n| \leq l} a(m, n) e^{2\pi i(m\alpha + n\beta)}$$

とよければ

$$\sum_{M < |m| \leq K} \sum_{N < |n| \leq L} \tau(n)^2 a(m, n) e^{2\pi i(m\alpha + n\beta)}$$

$$= \sum_{N < l \leq L} \tau(l)^2 \{S(l) - S(l-1)\}$$

$$= \sum_{N < l \leq L} S(l) \{ \tau(l)^2 - \tau(l+1)^2 \} - \tau(N+1)^2 S(N) + S(L) \tau(L+1)^2$$

したがって,

$$\tau(l)^2 - \tau(l+1)^2 = \int_{2\pi(l+1)\tau}^{2\pi l\tau} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$$

に注意すれば

$$(6) \quad \left| \sum_{M < |m| \leq K} \sum_{N < |n| \leq L} \tau(n)^2 a(m, n) e^{2\pi i(mx+ny)} \right|$$

$$< 2(A+2)\varepsilon, \quad \text{for } L, \quad A = \int_0^\infty \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right| dx.$$

5.12

$$T(\ell) = \sum_{M < |m| \leq \ell} \sum_{N < |n| \leq L} \tau(n)^2 a(m, n) e^{2\pi i(mx+ny)}$$

2.1.12

$$\sum_{M < |m| \leq K} \sum_{N < |n| \leq L} \rho(m)^2 \tau(n)^2 a(m, n) e^{2\pi i(mx+ny)}$$

$$= \sum_{M < \ell \leq K} \rho(\ell)^2 \{T(\ell) - T(\ell-1)\}$$

2.1.12

$$(7) \quad \left| \sum_{M < |m| \leq K} \sum_{N < |n| \leq L} \rho(m)^2 \tau(n)^2 a(m, n) e^{2\pi i(mx+ny)} \right|$$

$$< 2(A+2)^2 \varepsilon$$

が求められる。

次に仮定 (2) により, $\varepsilon > 0$ に対し $N' \geq N$ なるある N' が存在し, $L > N'$ なるとき $0 \leq k \leq M$ なるすべての k に対し

$$\left| \sum_{|m| \leq K} \sum_{N' < |n| \leq L} a(m, n) e^{2\pi i(mx+ny)} \right| < \varepsilon$$

これより (6), (7) を導くことができる。

$$(8) \quad \left| \sum_{|m| \leq M} \sum_{N' < |n| \leq L} f(m)^2 \tau(n)^2 a(m, n) e^{2\pi i(mx+ny)} \right|$$

$$< (A+2)^2 \varepsilon$$

が導かれる。

また仮定 (3) から同じようにして

$$(9) \quad \left| \sum_{|m| \leq N} \sum_{M' < |n| \leq K} f(m)^2 \tau(n)^2 a(m, n) e^{2\pi i(mx+ny)} \right|$$

$$< (A+2)^2 \varepsilon$$

が導かれる。

こゝで右の図をみられたい。

(7) において K, L のかわり

に M', N' とおいても成立つ。

そのようにしてえられた不
等式を (7)' とすれば, (7), (7)'

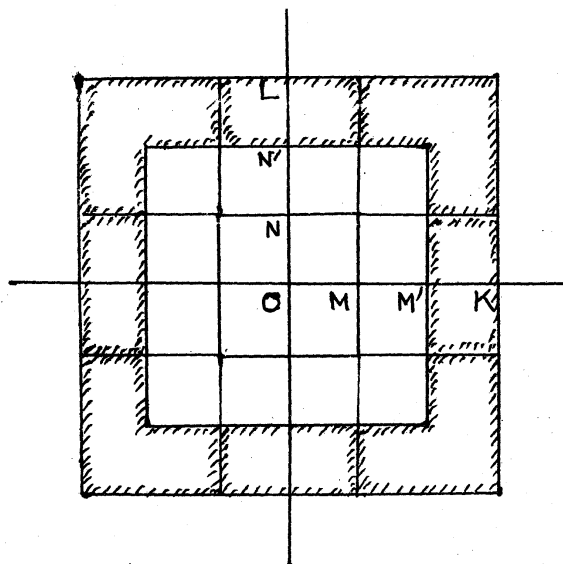
(8), (9) より次の不等式が
求められる。

$$\left| \sum_{|m| \leq K} \sum_{|n| \leq L} - \sum_{|m| \leq M} \sum_{|n| \leq N} \right|$$

$< 6(A+2)^2 \varepsilon$, 左辺 $\sum \sum$ は

$$f(m)^2 \tau(n)^2 a(m, n) e^{2\pi i(mx+ny)}$$

の上に出る和である。そしてこれは (5) の左辺の級数が f, τ に與へ一樣収束を示す關係にほかならない。



定理1における極限值はかなり複雑な形を示している。
もし $f(x, y)$ の有界性の仮定をつければ 幾分簡単にすることもできる。

定理2 定理1の極限値を

$$\lim_{\rho \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} \frac{1}{(2\rho)(2\tau)} \int_{x-\rho}^{x+\rho} \int_{y-\tau}^{y+\tau} f(u, v) du dv$$

におきかえることができる。ただし、正数 B, C が存在し
 ρ と τ とはつねに

$$(10) \quad B \leq \left| \frac{\rho}{\tau} \right| \leq C$$

なる関係をもつて0に収束するようにする。

Lebesgue の定理によれば

$$\lim_{\rho \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} \frac{1}{(2\rho)(2\tau)} \int_{u-\rho}^{u+\rho} \int_{v-\tau}^{v+\tau} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

は unit cube のほとんどいたるところで $f(u, v)$ に収束する。
ただし Vitali の定理を使う関係で (10) のような正
規性の条件が必要である。もし $f(u, v)$ が有界な仮定
をみたすなら Egoroff の定理を使って定理1から定理2
が導けるであろう。