

リー群の almost free action について

国際基督教大 山川あい子 (Aiko Yamakawa)

§ 1. 背景

多様体及び作用はすべて C^∞ -多様体、 C^∞ -作用とする。

リー群 G の多様体 M への almost free action (即ち、イソトピー群がすべて 0 次元の作用) は、 M 上に各軌道も葉とする葉層構造を実現する。特に、 G が連結中零リー群のとき、その葉層構造は nilfoliation、可解リー群のとき、solvifoliation とよぶことがある。nilfoliation に関する以下の結果がある。

< G. Hector, E. Ghys, Y. Moriyama: Topology vol.28, 1989 >

G を連結中零リー群、 M を (コンパクト) 閉多様体とし、 π を G の M 上の almost free action によって定まる余次元 1 nilfoliation とする。このとき

- (1) M は多様体として、 S' 上のファイバー・バンドルとなる (そのファイバーを F とする)。

更に

- (2) $\mathcal{F}$ のある葉 L が非自明なホロノミーを持てば、 L は F と微分同相なコンパクト多様体となる。
- (3) $\mathcal{F}$ がホロノミーを持たないならば
- (i) ファイバー F はすべて $\mathcal{F}$ の葉 (よって葉はコンパクト) である。
 - (ii) すべての葉が微分同相で、それらは各々、 M で稠密となる。

この結果から、内多様体上の余次元 1 *nilfoliation* $\mathcal{F}$ は、非コンパクトな葉で非自明なホロノミーを持つものは存在しないことがわかる。ところが $\mathcal{F}$ が *solvfoliation* のときは、その様相が異なる。例えば、 G が連結可解リー群で中零でないもののうち最も簡単な 2 次元アファイン群 $G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+ \right\}$ の場合でさえ、その *almost free action* によって内多様体上に非自明なホロノミーを持つ非コンパクトな葉が存在する余次元 1 葉層構造を実現することができる。この *solvfoliation* については、 $\langle C. Camacho, A. L. Neto, "Geometric Theory of Foliations" VIII, §5, Birkhäuser \rangle$ に詳しく述べられているので参照されたい。

この事実から推しても、もっと一般の中零でない、連結可解

リー群 G に関する、内多様体上へのその *almost free action* によって、非コンパクトな葉が非自明なホロノミーを持つ余次元 1 葉層構造を実現し得るだろうと思われる。しかし、これらについては、今の所、ほとんど論じられていないようである。

そこで、我々は、次節において、ある簡単な可解リー群 G を対象として、非コンパクトな葉が非自明なホロノミーを持つ余次元 1 葉層構造を実現するような、内多様体上への *almost free G -action* の構成法を紹介する。そして第 3 節で、その方法を使った具体例もいくつか与えることにする。

§2. 非コンパクトな葉が非自明なホロノミーを持つ余次元 1 葉層構造を実現する内多様体上への *almost free action*

2.1 群 G を加法群 $\mathbb{R}^l$ と $\mathbb{R}^n$ の半直積、即ち準同型写像 $\psi_G: \mathbb{R}^l \rightarrow \text{Aut } \mathbb{R}^n$ によって定まる $\mathbb{R}^l$ の $\mathbb{R}^n$ による分解する *extension* とする。このとき $G = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n$ (集合として) の群演算は

$$(\$, \#) \cdot (\$, \Upsilon) = (\$ + \$, \# + \psi_G(\$)(\Upsilon)) ,$$

$$(\$, \#), (\$, \Upsilon) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n$$

で与えられ、 ψ_G は l 個の可換な $n \times n$ 実行列 A_i ($i=1, \dots, l$)

によって

$\psi_G((t_1, \dots, t_\ell)^t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\ell} t_i A_i\right), \quad (t_1, \dots, t_\ell)^t \in \mathbb{R}^\ell$
と書きあらわされる。明らかに G は可解群で、次の補題が単純計算によって得られる。

補題 2.1. G が中零り-群 $\iff$ 各 A_i が中零行列

2.2. G を各 A_i が対角行列 $\text{diag}(\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \dots, \lambda_{ni})$ で与えられる $\mathbb{R}^\ell$ と $\mathbb{R}^n$ の半直積とし、 λ を (k, i) 成分が λ_{ki} である $n \times \ell$ 行列とする。以下、このような G を $G = (\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^n; \lambda)$ と記すことにする。

$G = (\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^n; \lambda)$ に対し、次の条件 A を考える。

条件 A : (1) $\alpha P = \lambda$ を満たす $n \times \ell$ 実行列 α と $\ell \times \ell$ 実正則行列 P が存在する。

(2) ℓ 個の同時対角化可能な $(n+1) \times (n+1)$ 実行列 $\tilde{A}_i$ ($i=1, \dots, \ell$) で、その対角形が $\text{diag}(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni}, -\sum_{k=1}^n \alpha_{ki})$ となるものが存在する。 α_{ki} は α の (k, i) 成分。

(3) (2) の $\tilde{A}_i$ は $\exp \tilde{A}_i$ が行列式 1 の整数行列となる。

補題 2.2 $G = (\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^n; \lambda)$ が条件 A を満たすとき、 G と同

型な部分群を含み、更に *uniform discrete subgroup* を含む $\mathbb{R}^l$ と $\mathbb{R}^{n+1}$ の半直積で与えられるリー群 $\tilde{G}$ が存在する。

(証明) 条件 A-(2)(3) より、準同型 $\psi: \mathbb{R}^l \rightarrow \text{Aut } \mathbb{R}^{n+1}$ が、

$\psi((x_1, \dots, x_l)^t) = \exp\left(\sum_{i=1}^l x_i \tilde{A}_i\right)$ で与えられる $\mathbb{R}^l$ と $\mathbb{R}^{n+1}$ の半直積を $\tilde{G}$ とおくと、 $\tilde{G}$ は $\psi|_{\mathbb{Z}^l}: \mathbb{Z}^l \rightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}$ により定まる $\mathbb{Z}^l$ と $\mathbb{Z}^{n+1}$ の半直積を離散部分群として含む。この部分群を Γ と記せば、明らかに $\tilde{G}/\Gamma$ は (コンパクト) 多様体である。即ち Γ は $\tilde{G}$ の *uniform discrete subgroup* となっている。実際、 $\tilde{G}/\Gamma$ は T^l 上のファイバ - T^{n+1} のバンドルになっている。またこの $\tilde{G}$ に対し、条件 A-(1), (2) によって G から $\tilde{G}$ への単射準同型写像 $\varphi: G \rightarrow \tilde{G}$ を

$$\varphi(\mathcal{S}, X = (x_1, \dots, x_n)^t) = \left(P\mathcal{S}, \sum_{k=1}^n x_k U_k \right),$$

$$(\mathcal{S}, X) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n, \quad U_k \in \mathbb{R}^{n+1}$$

によって与えることができる。ここで U_k ($k=1, \dots, n$) は行列 $\tilde{A}_i$ の固有値 α_{ki} に対する単位固有ベクトルとする。

以下 $\tilde{G}_\alpha, \Gamma_\alpha$ によって、 $G = (\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^n; \lambda)$ に対して補題 2.2 の証明中にある方法で、条件 A-(1) を満たす一組 α から構成された群 $\tilde{G}, \Gamma$ を表すものとする。また φ を通して G を $\tilde{G}_\alpha$ の部分群とみなすと、 G は $\tilde{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$ に G の $\tilde{G}_\alpha$ への左移動

によって自然に作用するが、この作用を ξ_G と記す。即ち

$$\begin{aligned} & \xi_G((\mathcal{S}, \mathcal{X}), (\mathcal{t}, \mathcal{Y})P) \\ &= ((P\mathcal{S}, \sum_{k=1}^n x_k V_k) \cdot (\mathcal{t}, \mathcal{Y}))P \\ &= (P\mathcal{S} + \mathcal{t}, \sum_{k=1}^n x_k V_k + \exp(\sum_{i=1}^{\ell} (\sum_{j=1}^{\ell} P_{ij} S_j) \tilde{A}_i)(\mathcal{Y}))P \end{aligned}$$

----(2.2)

$$(\mathcal{S} = (s_1, \dots, s_{\ell})^t, \mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)^t) \in \mathbb{R}^{\ell} \times \mathbb{R}^n$$

$$(\mathcal{t}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{R}^{\ell} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{\ell 1} & \dots & P_{\ell \ell} \end{bmatrix} : \ell \times \ell \text{ 行列}$$

この ξ_G が almost free で各軌道が $\tilde{G}/P_{\alpha}$ で余次元 1 となっていることは明らか。

2.3 2.2 で構成した $\tilde{G}/P_{\alpha}$ 上の G の almost free action ξ_G の様相を調べよう。 $G = (\mathbb{R}^{\ell}, \mathbb{R}^n; \lambda)$, $\tilde{G}_{\alpha}$ に対し条件 A の他に、更に次の条件 B を付加する。

条件 B: $\tilde{A}_i$ の固有値 α_{ki} ($k=1, \dots, n$) に対する固有ベクトル V_k ($k=1, \dots, n$) で張られる $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間 W に直交するベクトルを $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1})^t$ とすると ω_s/ω_t が無理数となる s, t が存在する。

補題 2.3 G が条件 A を満たし、 $\hat{G}_\alpha$ が条件 B を満たすとき、
 (2.2) の $\mathbb{S}_G$ の各軌道は非コンパクト多様体で、 $\hat{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$ に稠密
 に埋め込まれている。

(証明) 今 $H = \mathbb{R}^n \triangleleft G$ とおく。 $\mathbb{S}_G$ を H に制限した作用に
 よる実 $(0, \infty)\Gamma_\alpha \in \hat{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$ の軌道は (2.2) と条件 B より、 T^ℓ
 上の T^{n+1} -バンドルである $\hat{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$ のファイバー T^{n+1} に既に非
 コンパクト多様体として稠密に埋め込まれていることがわか
 る。 実際条件 B の Ω によって、それは $T^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ ($k_1 + k_2 = n$,
 $k_2 > 0$) のタイプの多様体となっている。 よって補題が成
 立する。

次に $\mathbb{S}_G$ によって実現される商多様体 $\hat{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$ 上の余次元 1
 葉層構造のホロノミーについて考察する。 条件 A, B に更に
 次の条件 C を付け加える。

条件 C : 条件 A の α のある列の和 $\sum_{k=1}^n \alpha_{k_i}$ は零ではない。

このとき今までの結果を加えて次の定理が得られる。

定理 $G = (\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^n; \chi)$ が条件 A, B, C を満たすとする。 このと

き、非コンパクトな葉が非自明なホロノミーを持つ余次元1葉層構造を実現する、南多様体上への almost free G -action が存在する。

(証明) $\widehat{G}_\alpha, T_\alpha$ を G に対し 2.2 で構成された群とすると、補題 2.2 より (2.2) で与えられる G の $\widehat{G}_\alpha/T_\alpha$ 上への almost free action ξ_G が存在する。よって補題 2.3 より、この ξ_G によって実現される葉層構造が非自明なホロノミーを持つ葉を持つことが証明されればよい。実 $(0, u = \sum_{j=1}^{n+1} z_j v_j) \in \widehat{G}_\alpha$ を一つ定め、 G の元 $(\delta = (s_1, \dots, s_\ell)^t, 0)$ をとる。

(v_j ($j=1, \dots, n+1$) は $\widehat{A}_i$ の固有値 α_{ji} に対する固有ベクトルで、 v_{n+1} は $-\sum_{j=1}^n \alpha_{ji}$ に対する固有ベクトルである。)

今、 $P\delta = (m_1, m_2, \dots, m_\ell)^t \in \mathbb{Z}^\ell$ とし、 ξ'_G を ξ_G を誘導する G の $\widehat{G}_\alpha$ への左移動とすると

$$\begin{aligned} & \xi'_G((\delta, 0), (0, u = \sum_{j=1}^{n+1} z_j v_j)) \\ &= ((m_1, m_2, \dots, m_\ell)^t, \underbrace{\sum_{j=1}^n z_j e^{\sum_{i=1}^{\ell} m_i \alpha_{ji}} v_j + z_{n+1} e^{\sum_{i=1}^{\ell} m_i \beta_i} v_{n+1}}_{\beta_i = -\sum_{j=1}^n \alpha_{ji}}) \end{aligned}$$

と書ける。よって

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n z_j v_j + \sum_{j=1}^n x_j v_j + (n_1, n_2, \dots, n_{n+1})^t} \dots (2.3.1)$$

を満たす $x_j \in \mathbb{R}$, $n_j \in \mathbb{Z}$ が存在するとすると、実 $(0, u)T_\alpha \in \widehat{G}_\alpha/T_\alpha$ を通る ξ_G によって定まる葉 L_u は非自明な基本

群を持つ。実際、 $\pi_1(L_u, u)$ には、 $\pi_1(T^L, \pi(u)) \cong \mathbb{Z}^L$ で $\mathbb{Z}^L \ni (m_1, \dots, m_L)$ に対応する $\pi_1(T^L, \pi(u))$ の元 $[\sigma]$ の σ を $\tilde{G}_u/P_u$ に引き上げた loop σ_{L_u} によって定まる 0 ではない元 $[\sigma_{L_u}]$ がある。ここで π はバンドル $\tilde{G}_u/P_u \rightarrow T^L$ の射影とする。またここで $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底 e_i ($i=1, \dots, n+1$) が $\{U_j, j=1, \dots, n+1\}$ の一次結合として $e_i = \sum_{j=1}^{n+1} c_{ji} U_j$ とあらわされているとすると、上の等式 (2.3.1) は行列を使い

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1, n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n+1, 1} & \dots & \dots & c_{n+1, n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 (e^{\sum_{i=1}^L m_i \alpha_{1i}} - 1) - x_1 \\ \vdots \\ z_n (e^{\sum_{i=1}^L m_i \alpha_{ni}} - 1) - x_n \\ z_{n+1} (e^{\sum_{i=1}^L m_i \beta_i} - 1) \end{bmatrix} \quad \dots (2.3.2)$$

と書き変えられる。これより $e^{\sum_{i=1}^L m_i \beta_i} \neq 1$ 、即ち $\sum_{i=1}^L m_i \beta_i \neq 0$ ならば、(2.3.2) を満たす z_{n+1} は多くとも可算個しかないことがわかる。また

$$z_{n+1} = \frac{1}{e^{\sum_{i=1}^L m_i \beta_i} - 1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} c_{n+1, j} n_j \right) \quad \dots (2.3.3)$$

でありさえすれば、 $z_1, \dots, z_n$ が (2.3.2) を満たすように $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ を選ぶことができる。これらの事より、 $\sum_{i=1}^L m_i \beta_i \neq 0$ のとき、(2.3.3) を満たす z_{n+1} を持った実 $(0, u = \sum_{j=1}^{n+1} z_j U_j) P_u$ を通る葉 L_u は σ_{L_u} に沿って非自明なホロノミーを持つことになる。実際、 $\mathbb{R} = \{u + y U_{n+1} \mid y \in \mathbb{R}\}$ とおくと L_u の

ホロノミ-写像 $h: \pi_1(L_u, u) \rightarrow \text{Diff } \mathbb{R}$ は

$$h([\sigma_{L_u}])(y) = e^{\sum_{i=1}^d m_i \beta_i} y \quad (e^{\sum_{i=1}^d m_i \beta_i} \neq 1)$$

で与えられている。さてまた、条件 C より $\beta_j \neq 0$ となる j が存在することが保証されているから、 $m_i = 0$ ($i \neq j$)、 $m_j = 1$ とおけば $\sum_{i=1}^d m_i \beta_i \neq 0$ とすることができ、よって定理が導かれる。

注意: 今 $G = (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n; \lambda)$ が中零リ-群であるとする。補題 2.1 より $\lambda = 0$ となり、条件 A を満たす λ もまた零行列となる。故に各 $\tilde{A}_i$ も零行列で、このような G に対しては条件 B, C は成立し得ない。上の定理で条件 A, B, C が成立するならば必然的に G は中零でない可解リ-群でなければならぬことになる。

§3. 例

この節では §2 の条件 A, B, C を満たす、従って §2 の定理が成立する可解リ-群 $G = (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n; \lambda)$ の簡単な例をいくつか挙げる。

G が $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \lambda, \text{rank } \lambda = n)$ であるとき、条件 A-(2), (3)、及び条件 B, C を満たす $n \times n$ 正則行列 λ がとれ

れば、条件 A-(1) は $P = X^{-1}\Lambda$ とすることでも成立する。

例 1 $G = (\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1; \Lambda = [1])$ とする。

$X = \left[\log \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right]$ とすると、 $\hat{A}_1 = \log \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ は固有値 $\log \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ を持ち、その固有ベクトルは $(1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2})^t$ で、互いに直交している。よって、この X を使えば、 G は条件 A, B, C を成立せしめる。それ故、§2 定理が成立する。

この G は 2次元アファイン群 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \mid x, t \in \mathbb{R} \right\}$ で、 $G \cong \tilde{G}_{\frac{1}{\sqrt{5}}}$ は、§1 で言及した C. Canacho, A.L. Neto の本にある例と G -同型である。

例 2 $G = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2; \Lambda, \text{rank } \Lambda = 2)$ とする。

α, β, γ を $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ の 3 根とすると 3 次方程式の根の判別式 $D = 9^2$ となり、 α, β, γ は 3 実根で、 β, γ は α の整係数多項式で書けるからわかる。よって $\mathbb{Q}(\alpha)$ ($\{1, \alpha, \alpha^2\}$ が基底の $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみる) の一次変換 $T(x) = \alpha x$, $T'(x) = \beta x$ の基底 $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ に関する行列は可換で、行列式 $= -1$ の整数行列となる。

実際、その行列は $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ となり

$$\alpha = 2 \cos \frac{2}{9}\pi, \quad \beta = 2 \cos \frac{4}{9}\pi, \quad \gamma = \frac{-1}{\alpha\beta} \quad \text{となる。}$$

$$\text{また } U_1 = (1, \alpha^2, \alpha)^t, \quad U_2 = (1, \beta^2, \beta)^t, \quad U_3 = (1, \gamma^2, \gamma)^t \\ \text{となる。}$$

$$[U_1 \ U_2 \ U_3]^{-1} A^2 [U_1 \ U_2 \ U_3] = \text{diag}(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$$

$$[U_1 \ U_2 \ U_3]^{-1} B^2 [U_1 \ U_2 \ U_3] = \text{diag}(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)$$

となる。そこで

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \log \alpha^2 & \log \beta^2 \\ \log \beta^2 & \log \gamma^2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_1 = \log A^2, \quad \tilde{A}_2 = \log B^2$$

とおけば、 $\text{rank } \mathcal{A} = 2$ となる。このように $\mathcal{A}$ に対しては条件 A、B、C は成立し、よってこの G に対しては §2 の定理が成立する。ここで $\text{rank } \mathcal{A} = 2$ で、 $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることに注意しておく。

例 2 の議論は $G = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathcal{A}, \text{rank } \mathcal{A} = n)$ の場合にも拡張できるだろう。

例 3 $G = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^2; \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \lambda \neq 0)$ とする。

$f(x) = x^3 + px^2 + qx - 1$ を整係数多項式で、 $\mathbb{Q}$ 上既約で、正の 3 実根 α, β, γ をもつものとする。このとき、

必然的に α, β, γ は異なり、すべて無理数となる。この

$f(x)$ に対し、 3×3 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -q \\ 0 & 1 & -p \end{bmatrix}$ とすると、

A の行列式は 1 で、 α, β, γ を固有値とし、その固有ベクトルとして $(1, \alpha^2 + p\alpha, \alpha)^t, (1, \beta^2 + p\beta, \beta)^t, (1, \gamma^2 + p\gamma, \gamma)^t$ がとれる。よって $\lambda = \frac{\log \beta}{\log \alpha}$ とあるとき、 $X = \begin{bmatrix} \log \alpha \\ \log \beta \end{bmatrix}$ 、 $\hat{A}_i = \log A$ とすれば条件 A, B, C が成立する。故に $\lambda = \frac{\log \beta}{\log \alpha}$ とする正実数 α, β を根にもつ $\mathbb{Q}$ 上既約な整係数多項式 $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 1$ が存在し得る $G = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^2; \lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix})$ に対して §2 の定理は成立する。

例 3 の議論は $G = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n; \lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix})$ なる群に対しても拡張できる。

このようにして定理を満たす G の具体例はまだまだ挙げられるが、現在、 $G = (\mathbb{R}^t, \mathbb{R}^n; \lambda)$ のどのような λ に対して条件 A, B, C が成立するか、言いかえれば条件 A, B, C を満たす n 個の整数行列 $\hat{A}_i$ が存在し得るかを、もっと統一的に考察したいと考えている。更には §2 の議論を、より一般の可解群にも拡張したいと考えている。