

On arithmetic intersections and Green functions.

東大 数理 斎藤毅 (Takeshi SAITO)

H. Gillet - Ch. Soulé "Arithmetic Intersection Theory"

Publ Math IHES 72 (1990) p. 93-174.

の紹介である。数論的交点理論は height pairing とし、代数多様体の L 関数の関数等式の中心となる整数点での特殊値の予想 (一般化した Birch-Swinnerton-Dyer 予想) に現れる。

§1. 特殊値の予想

この節では上記特殊値の予想を

A.A. Beilinson "Height pairing between algebraic cycles"

Contemporary Math. 67 (1987) p. 1-24.

(or. Spr. LNM

に従って定式化する。X を代数体 F 上の射影非特異多様体とし、 $m \geq 1$ を整数とする。考える L 関数は

$L(H^{2m-1}(X), s) = \prod_v \det(1 - \text{Frob}_v \cdot q_v^{-s}; H^{2m-1}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell))$
 である. ここで v は X が good reduction を持つ F の有限素点
 を走り, Frob_v は v の geometric Frobenius, q_v は v の剰余体
 の位数, $\overline{F}$ は F の代数閉包. コホモロジーは v の剰余体の標
 数と異なる ℓ に関する ℓ 進 etale コホモロジーである. この
 L 関数は $\text{Re } s > m + \frac{1}{2}$ で収束し, さらに全平面に解析接続
 され, bad factor, F factor を適当に定義することにより,

$s \leftrightarrow 2m-s$ の型の関数等式を満たすと予想される. こ
 こでは $s=m$ の特殊値を考える. r を $s=m$ の $L(H^{2m-1}(X), s)$ の位
 数と ($L^*(H^{2m-1}(X), m) = \lim_{s \rightarrow m} L(H^{2m-1}(X), s) / (s-m)^r$) とおく. Weil 予想 (Deligne の定理) から r は必ず
 $L^*(H^{2m-1}(X), m) \bmod \mathbb{Q}^\times$ は決いた素点によらず well-defined
 となる.

はじめに本稿の Birch, Swinnerton-Dyer 予想を X が
 Abel 多様体で $m=1$ の場合を復習する.

Birch, Swinnerton-Dyer 予想

1° $r = \text{rank } A(F)$

2° $L^*(H^1(A), 1) = D_F^{-\frac{r}{2}} \times A \text{ の period} \times A(F) \text{ の height pairing の 判別式}$

右辺の記号の説明: $A(F)$ は A の F 有理点のなす群で Mordell
 Weil の定理により有限生成 Abel 群. D_F は F の絶対判別式

g は A の次元, ω は A の F 上有理的な正則 g 形式 (mod $F^\times$ で一意的). F の各無限素点 v に対し $\mu_v \in F_v$ の Lebesgue 測度とする. すると積分 $\int_{A(F_v)} |\omega| \mu_v^g$ が定まり. A の period はこの積分の各無限素点についての積. 最後に $A' \subseteq A$ の双対 Abel 多様体とすると height pairing $A(F) \times A'(F) \rightarrow \mathbb{R}$ が定義されこれらは非退化な双一次形式となる. 判別式とはこの (自由部分の) $\mathbb{Z}$ 上の基底に関する行列式である.

この場合 $L(H^1(A), s)$ はいわゆる A の L 関数. つまり $\det(1 - \text{Frob}_v T: H^1)$ は v の Frobenius の Abel 多様体の自己準同型としてこの固有変数である.

一般の場合に進む.

拡張した Birch-Swinnerton-Dyer 予想.

$$1^\circ \quad r = \text{rank } CH^m(X)_0$$

$$2^\circ \quad L^*(H^{2m-1}(X), m) = D_F^{-\frac{g}{2}} \times H^{2m-1}(X)(m) \text{ の period}$$

$$\times (H^m(X)_0 \text{ の height pairing の判別式})$$

右辺の説明: $CH^m(X)$ は X の余次元 m の Chow 群 (定義は次節) で有限生成 Abel 群と予想される. $CH^m(X)_0$ はこの homological に 0 に同値な部分. すなわち cycle 射 $CH^m(X) \rightarrow H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(m))$ の核である. ここで $X(\mathbb{C})$ は X を $\mathbb{C}$ 上のスキームと見たときの $\mathbb{C}$ 値点の集合を複素多様体と見たも

のデジホモロジ-は特異コホモロジ-。 D_F は前と同様 F の絶対判別式, $F^m \in \text{de Rham}$ コホモロジ- $H_{\text{dR}}^{2m-1}(X/F)$ の m 番目の Hodge filtration とすると $\dim H_{\text{dR}}^{2m-1}(X/F) = 2 \cdot \dim F^m$ で g は F^m の次元である。 period を定義する。 $X(\mathbb{C})$ 上の複素共役は特異コホモロジ- $H^{2m-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 上に involution F_0 を定義する。 $H_B^{2m-1}(X, \mathbb{Q}(m))^+$ は F_0 が identity で作用する部分を示す。 特異コホモロジ- と de Rham コホモロジ- の標準同型 $H^{2m-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong H_{\text{dR}}^{2m-1}(X/F) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ は同型 $H_B^{2m-1}(X, \mathbb{Q}(m))^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong H_{\text{dR}}^{2m-1}(X/F)/F^m \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ を与える。 period はこの同型の両辺の $\mathbb{Q}$ 上の基底に関する行列式である。

最後に height pairing を定義する。 $m' = \dim X + 1 - m$ とおく。 $\mathcal{X}$ は X の整数環 $\mathcal{O}_F$ 上射影的な正則モデルとする。 $\mathcal{X}$ の数論的 Chow 群 $\hat{CH}^m(\mathcal{X})$ を定義し (§3) 交点積 $(\hat{CH}^m(\mathcal{X}) \times \hat{CH}^{m'}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R})$ を定義し (§4)。 generic fiber とする射 $\hat{CH}^m(\mathcal{X}) \rightarrow CH^m(X)$ は全射である。 $\hat{CH}^m(\mathcal{X})_0$ を任意の fiber $\wedge$ の制限が 0 に homological に同値であるような元のな可部分群とする。 $\hat{CH}^m(\mathcal{X})_0 \rightarrow CH^m(X)_0$ は全射であると予想し。 交点積の $\hat{CH}^m(\mathcal{X})_0 \times \hat{CH}^{m'}(\mathcal{X})_0 \wedge$ の制限は $CH^m(X)_0 \times CH^{m'}(X)_0$ を経由する。 これは $\mathcal{X}$ のとり方によらないと予想し height pairing $CH^m(X)_0 \times CH^{m'}(X)_0$ を定義し。 これは有限生成 Abel 群の modulo torsion で非退化な pair

ring と予想される. 判別式はこれの基底に関する行列式である.

height pairing の定義はより具体的には次のように与えられる. $Y, Z \in X$ の余次元 m, m' の cycle と (交わり) σ を与える. σ と同じく Y, Z をそれぞれ σ の cycle の σ とあげとある. $g_Y \in Y$ に関する Green current (§3) となる $dd^c g_Y + \delta_Y = \omega_Y$ の smooth な $(m-1, m-1)$ current とある. g_Z も Z に関して同様とある. 積 $[Y], [Z] \in$

$$\sum_{i,j} (-1)^{i+j} \log \# H^i(X, \text{Tor}_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Z)) \\ + \frac{1}{2} (S_Z(\mathbb{C}) g_Y + S_X(\mathbb{C}) \omega_Y \wedge g_Z)$$

とあるとこれは一般には well-defined でないが, $[Y], [Z] \in (H^m(X)_0, (H^{m'}(X)_0)$ の場合, Y, Z をそれぞれ各 fiber の 0 に homological に同値であるようにとれば, これは Y, Z g_Y, g_Z のとり方によらず well-defined となり, height pairing $(H^m(X)_0 \times (H^{m'}(X)_0 \rightarrow \mathbb{R}$ を定義される.

§2. 幾何的な場合.

この節では体上の多様体についてその Chow 群と交点積の定義を復習する. F を体とし X を F 上の多様体とする. 一般の X と正整数 p に対し余次元 p の Chow 群 $(H^p(X))$ を余次元 p の cycle の群 $Z^p(X)$ を有理同値 $R^p(X)$ で割ることにより定

義される。 X が非特異かつ準射影的であれば moving lemma を使うことにより積 $(H^p(X) \times H^q(X) \rightarrow CH^{p+q}(X))$ が定義される。また proper 写射 $f: X \rightarrow Y$ に対し、順像 $f_*: (H^{p+\dim X - \dim Y}(X) \rightarrow CH^p(Y))$ が定義される。 X が射影非特異、 $q = \dim X - p$ のときは、この合成として交点積 $(H^p(X) \times H^q(X) \rightarrow CH^{\dim X}(X) \rightarrow CH^0(\operatorname{Spec} F) = \mathbb{Z})$ が定義される。

$Z^p(X)$ は X の整存 (既約かつ被約ということ) 閉部分スキーム (これは X のスキーム論的な点と 1 対 1 に対応する) の余次元 p のもの (すなわち生成点 x での局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ の Krull 次元 p) の集合を基底とする自由 Abelian 群である。 $R^p(X)$ は $\{ \operatorname{div} f \in Z^p(X) : Y \text{ は } X \text{ の余次元 } p-1 \text{ の整存閉部分スキーム, } f \text{ は } Y \text{ 上の } 0 \text{ でない有理関数} \}$ と定義される。 $x \in X$ の余次元 p の点 x で Y に含まれるとき、 $R(Y)$ を Y の有理関数体とする。 x は Y の余次元 1 の点であるから $\operatorname{ord}_x: R(Y)^* \rightarrow \mathbb{Z}$ が x で正則な Y の有理関数 f に対しては環 $\mathcal{O}_{Y,x}/f$ の長さに対応させるものとして一意的に定義される。これを使、 $\operatorname{div} f = \sum_{\substack{x \in Y \\ \text{余次元 } p}} \operatorname{ord}_x(f) [x] \in Z^p(X)$ と定義される。

例 $X = \mathbb{P}^n$ のとき、 $CH^p(X) \cong \mathbb{Z}$ ($0 \leq p \leq n$) である。生成元は余次元 p の線型部分空間の類である。

X が非特異、準射影的であるとて交点積 $(H^p(X) \times H^q(X) \rightarrow CH^{p+q}(X))$ を定義する。余次元 p の cycle Y と余次元 q の

cycle Z が proper に交わるとは其通部分と $\cap Z$ の余次元 $p+q$ であることである。このとき積 $[Y] \cdot [Z]$ は

$$\sum_{S \text{ 余次元 } p+q} \sum_i (-1)^i \text{length Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Z) \sigma$$

で定義する。ここでの σ は余次元 $p+q$ の X の整存閉部分スキーム S の生成点である。交点積 $(H^p(X) \times H^q(X) \rightarrow H^{p+q}(X))$ は proper に交わる cycle の積と上のようにおくことにより定まるものと (2-意的に定義される。一意的であることは moving lemma. 異なる 2 つの cycle は有理同値で適当に与えらるることにより、proper に交わるようにできることから従う。また well-defined であることは容易に確かめられる。

例 $X = \mathbb{P}^n$ のとき $(H^*(X) = \bigoplus_{i=0}^n H^i(X))$ は環として $\mathbb{Z}[h]/h^{n+1}$ と同型である。 h は超平面の類を表わす。

$f: X \rightarrow Y$ を proper 写射で $d = \dim X - \dim Y$ とおく。順像 $f_*: (H^{p+d}(X) \rightarrow H^p(Y))$ を定義する。 $Z \subset X$ を余次元 $p+q$ の整存閉部分スキームとする。 $f(Z) \subset Y$ が余次元 p のとき $f_*([Z]) = \deg(Z/f(Z)) \cdot [f(Z)]$ 。そうでないときは $= 0$ とおく。これが有理同値類を保つことは容易に確かめられて順像 f_* が定義される。 Y が基礎体 F の Spec のときは順像 $H^d(X) \rightarrow H^0(Y) = \mathbb{Z}$ は通常 degree である。

X が射影非特異で $p+q = d = \dim X$ のときは交点積 $(H^p(X) \times H^q(X) \rightarrow \mathbb{Z})$ が積 $(H^p(X) \times H^q(X) \rightarrow H^d(X))$ と degree

$(H^d(X) \rightarrow \mathbb{Z})$ の合成として定義される. Y と Z の類の積は

$$\sum_{i+j=d} (-1)^{i+j} \dim_F H^i(X, \text{Tor}_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Z))$$

で与えられる.

数論的多様体との類似のためには X から射影非特異曲線 Y への全射 $f: X \rightarrow Y$ を 1 つ固定する. 2 つの $\mathbb{Z}$ $\deg: (H^1(Y) \rightarrow \mathbb{Z})$ を用いて交点積 $(H^p(X) \times H^q(X) \rightarrow \mathbb{Z})$ は積 $(H^p(X) \times H^q(X) \rightarrow H^d(X))$ と順像 $(H^d(X) \rightarrow (H^1(Y) \rightarrow \mathbb{Z}))$ と degree $(H^1(Y) \rightarrow \mathbb{Z})$ の合成として表わされる.

§3. 数論的 Chow 群.

代数体 F の整数環 $\mathcal{O}_F$ 上有限型な正則スキーム X のことを数論的多様体とよぶ. この節では数論的多様体 X の数論的 Chow 群 $\hat{CH}^p(X)$ を定義する. これは Green current を使って定義される通常の Chow 群 $CH^p(X)$ の拡大である.

$\hat{CH}^p(X)$ は前節と同様に cycle の群 $\hat{Z}^p(X)$ と有理同値 $\hat{R}^p(X)$ であることにより定義される.

$$\hat{Z}^p(X) = \{ (Z, g) \in Z^p(X) \oplus \hat{D}^{p-1, p-1}(X_{\mathbb{R}}) ;$$

g は Z に関する Green current

$$\hat{R}^p(X) = \{ \text{div } f \in \hat{Z}^p(X) ; f \text{ は } X \text{ の余次元 } p-1 \text{ の整な閉部分スキーム } Y \text{ 上の有理関数 } \neq 0 \}$$

である. 右辺の定義とする. $Z^p(X)$ は前節と同様に X の余次元

元 P の整閉部分スキームの集合を基底とする自由 Abelian 群である。 $\mathcal{D}$ は current の空間を表わす。

以下しばらく X は複素多様体として current の復習をする。応用上は X は $\mathbb{C}P^n$ 上の X を $\mathbb{R}^n$ 上のスキームとみたときの $\mathbb{C}$ 値点のなす複素多様体である。 $A^n(X)$ は X 上の $\mathbb{C}$ 係数の smooth な n -形式の空間を表わす。実係数の形式はこの空間の $\mathbb{R}$ 構造を定める。 $A^{p,q}(X)$ は smooth (p,q) -形式の空間を表わす $A^n(X) = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}(X)$ である。 $A_c^n(X) \subset A^n(X)$ をコンパクトなものをなす部分空間とする。 $A_c^n(X)$ に相対コンパクトな各座標近傍での係数の各高階導関数の $\sup$ ノルム全体を $\mathcal{E}_n$ ノルムの族とすることにより局所凸空間の構造を与える。

n -current の空間 $\mathcal{D}_n(X)$ はこの空間 $A_c^n(X)$ の双対空間として定義される。 X の次元が d であるとき $\mathcal{D}^n(X) = \mathcal{D}_{d-n}(X)$ である。 $\mathcal{D}^{p,q}(X)$ も同様に定義され $\mathcal{D}^n(X) = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{D}^{p,q}(X)$ となり $T = \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ の向きをいふものように体積形式 $\frac{1}{2} dz \wedge d\bar{z} = dx \wedge dy$ であることにより $A^n(X)$ を $\alpha \mapsto (\beta \in A_c^{d-n}(X) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta)$ により $\mathcal{D}^n(X)$ の部分空間をなす。これにより $\mathcal{D}^n(X)$ は distribution 係数の n -形式とみなすことができる。また $\mathcal{D}^n(X)$ の

元が $A^n(X)$ に属するとき smooth であるという。外微分 $d: \mathcal{D}^n(X) \rightarrow \mathcal{D}^{n+1}(X)$ を形式の外微分 $A_c^{d-n-1}(X) \rightarrow A_c^{d-n}(X)$ の双対の $(-1)^{n+1}$ 倍と定める。この符号は $A^n(X) \subset \mathcal{D}^n(X)$ の制限をもと

のもので一致するからのものである。外微分 d は直和分解 $\mathcal{D}^q(X) = \bigoplus \mathcal{D}^{p,q}(X)$ に従って $\partial = d' : \mathcal{D}^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{D}^{p+1,q}(X)$ と $\bar{\partial} = d'' : \mathcal{D}^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{D}^{p,q+1}(X)$ の和 $d = d' + d''$ に分解される。 $d^c = \frac{i}{\pi}(d'' - d')$ と定義する。 $\tilde{\mathcal{D}}(X) = \mathcal{D}(X)/\text{Ind } d' + \text{Ind } d''$ とおく。

$Z \subset X$ を余次元 p の閉部分解析空間とする。実 (p,p) -current $\delta_Z \in \mathcal{D}^{p,p}(X)$ を $A_c^{d,p}(X) \rightarrow \mathbb{C} : \alpha \mapsto \int_Z \alpha|_Z$ で定める。ここで $\int_Z \alpha|_Z$ は Z の特異点解消 $\tilde{Z}$ への α の引き上げの積分として定義する。これは Z の非特異部分 Z^{ns} への α の制限の積分としても同じである。実 $(p-1, p-1)$ -current $g \in \mathcal{D}^{p-1, p-1}(X)$ が Z に関する Green current であるとは $\omega = dd^c g + \delta_Z$ が smooth であることと定義する。

例. $\mathcal{L}$ を X 上の可逆層、 $\|\cdot\|$ を $\mathcal{L}$ 上の smooth な Hermitian 計量とし、 $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}$ の有理切断とする。 $D = \text{div}(\mathcal{L})$ を $\mathcal{L}$ の因子とし、 D の外で定義された関数 $g = -\log \|\mathcal{L}\|^2$ を X 上の実 $(0,0)$ -current とみなす。このとき $\delta_D + dd^c g$ は $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ の「st chem 形式」とよばれる smooth な閉 1-形式であり、 g は D に関する Green current である。

もとにもとより X を $\mathbb{Q}_F$ 上の数論的多様体とし、 $\mathcal{D}^p(X)$ の定義に現れる current の空間 $\mathcal{D}^{p-1, p-1}(X_{\mathbb{R}})$ を定義する。 $X_{\mathbb{Q}}$ を X を $\mathbb{Z}$ 上のスキームと見たときの $\mathbb{Q}$ 値点全体のなす複素多

様体とする. 複素共役 F_∞ が $X_{\mathbb{C}}$ に作用する. $\mathcal{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}}) = \{ \alpha \in \mathcal{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{C}}) : F_\infty(\alpha) = (-1)^{p-1} \alpha \}$ とおき $\tilde{\mathcal{D}}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$ はこれの $\tilde{\mathcal{D}}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{C}}) = \mathcal{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{C}}) / \text{Im } d' + \text{Im } d''$ の像を定義する. $g \in \tilde{\mathcal{D}}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$ が $\mathbb{Z}$ に関する Green current であるとは上にあるとあり $dd^c g + \delta_Z(\mathbb{C})$ が smooth (p,p) -形式となることである.

最後に X の余次元 $p-1$ の整存閉部分スキーム Y 上の有理関数 $f \neq 0$ に対し $\hat{\text{div}} f = (\text{div } f, -i_* \log |f|^2) \in \hat{Z}^p(X)$ を定義する. $\text{div } f \in Z^p(X)$ の定義は前節と同様である. $i_* \log |f|^2$ を定義する. i は閉 immersion $Y \rightarrow X$ である. $\hat{Y} \subset Y$ の特異点解消とする. $\hat{Y}$ 上の局所可積分関数 $\log |f|^2$ を定める $\hat{Y}$ 上の実 $(0,0)$ -current の X への順像* $i_* \log |f|^2 \in \mathcal{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$ である. $-dd^c \log |f|^2 + \delta_{\text{div } f} = 0$ であるから $\hat{\text{div}} f \in \hat{Z}^p(X)$ となる.

例 $X = \text{Spec } \mathcal{O}_F$ のとき $\hat{Z}^1(X) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \text{ 素理想}} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p} \text{ 素理想}} \mathbb{R}$ で $\hat{H}^1(X) = F^\times / F^\times \text{ の理想群} / \text{極大コンパクト部分群}$. 特に $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}$ のときは $\hat{Z}^1(X) \ni (Z, g) \mapsto \log \#Z + \frac{1}{2}g \in \mathbb{R}$ により $\hat{H}^1(X) \cong \mathbb{R}$.

* current の順像の定義は次のとおりである. 写像 $\hat{Y} \rightarrow X$ は proper な $\mathbb{A}^1$ -スキーム $\mathbb{A}^1$ の形式の $\mathbb{A}^1$ を $\mathbb{A}^1$ により $\mathbb{A}^1$ になる. (したがって $\mathbb{A}^1$ の双対として順像が定義)

とれる.

§4 数論的交点積.

この積では数論的 Chow 群の積 $\hat{H}^p(X) \times \hat{H}^q(X) \rightarrow \hat{H}^{p+q}(X)$ を定義する. X が $\mathbb{Z}$ 上 proper かつ $p+q = \dim X$ のとき $\mathbb{Z}$ には ± 1 による $\hat{H}^{p+q}(X) \rightarrow \hat{H}^1(\text{Spec } \mathbb{Z}) = \mathbb{R}$ を合成することにより §2 と同様に交点積 $\hat{H}^p(X) \times \hat{H}^q(X) \rightarrow \mathbb{R}$ を定義される.

$(Y, g_Y) \in \hat{H}^p(X), (Z, g_Z) \in \hat{H}^q(X)$ と $(Y, Z, g_Y * g_Z) \in \hat{H}^{p+q}(X)$ を定義する. 実は X 全体の $\mathbb{Z}$ 上では moving lemma が知られていないため積は $\hat{H}^{p+q}(X)$ ではなく $\hat{H}^{p+q}(X)$ の $\otimes \mathbb{Q}$ でないと定義されない. ここでは簡単のため moving lemma はなりたつものとして話を進める. moving lemma を使って Y と Z が proper に交わるを仮定する. すると §2 と同様に積 $Y, Z \in Z^{p+q}(X)$ が定義される. 次に Green current の積 $g_Y * g_Z \in \hat{\mathcal{O}}^{p+q-1, p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$ を定義する. これは形式的には

$$g_Y * g_Z = g_Y \wedge \delta_Z + \omega_Y \wedge g_Z$$

と定義される. ここで $\omega_Y = dd^c g_Y + \delta_Y$ は Green current の定義により smooth であるので、第2項 $\omega_Y \wedge g_Z$ は形式と current の積として定義される. したがって $\int \omega_Y \wedge g_Z(\alpha) = \int g_Z(\omega_Y \wedge \alpha)$ と定義される curv

文である。第1項 $g_Y \wedge \delta_Z$ の定義には一般には対数型 Green
 形式の概念を導入する必要がある。しかし Y と Z が generic
 fiber 上は交わらないとせよ。例えば $p+q=\dim X$ かつ Y と Z
 が proper に交わるとせよには g_Y は Z で smooth と (2) かつ (2) の
 場合は問題なく定義される。一般の場合の $g_Y + g_Z$ の定義はこ
 の節の最後にまわして以下 $g_Y + g_Z$ が定義されたときのこととする。
 本稿については $dd^c(g_Y + g_Z) + \delta_{Y,Z} = \omega_Y \wedge \omega_Z$ となりた
 う ([G-S] Th 2.1.4) により、 $g_Y + g_Z$ は Y, Z に関す
 る Green current であり $(Y, Z, g_Y + g_Z) \in \bigwedge^{p+q}(X)$ とす
 る。 Y および Z を有理同値で動かしてこの積の有理同値類
 は変わらないことを確かめられ積 $\hat{H}^p(X) \times \hat{H}^q(X) \rightarrow$
 $\hat{H}^{p+q}(X)$ が定義される。

数論的多様体の射 $f: X \rightarrow Y$ が proper と (かつ) Y の generic
 fiber $f_F: X_F \rightarrow Y_F$ が smooth とする。 $p' = p + \dim X - \dim Y$
 とおく。このとき順像 $f_*: \hat{H}^{p'}(X) \rightarrow \hat{H}^p(Y)$ を次のよう
 に定義する。 cycle の順像 $f_*: Z^{p'}(X) \rightarrow Z^p(Y)$ は § 2 と同
 様に定義する。さらに f は proper と (2) であるから current の
 順像も前節と同様にコホモロジーの形式の置き換えと (2) の双対
 と (2) current の順像 f_* も定義される。 $(Z, g) \in Z^{p'}(X)$ とす
 る。すると f はさらに smooth と (2) であるから current の順
 像は形式を形式にうつすこととわかる。これは実際 fiber を

との積命で与えられる. このことから f_*g は f_*Z に関する Green current であること. したがって $(f_*Z, f_*g) \in \hat{Z}^p(Y)$ であることがわかる. これの高さであることにより順像 $\hat{H}^p(Y)$ が定義される.

$Y = \text{Spec } \mathbb{Z}$ かつ $p=1$ とすると前節の最後でみたように $\hat{H}^1(Y) = \mathbb{R}$ であるから. X が射影的で $d = \dim X$ とすると上のことから $\hat{H}^d(X) \rightarrow \mathbb{R}$ が定義される. $p+q=d$ である積 $\hat{H}^p(X) \times \hat{H}^q(X) \rightarrow \hat{H}^d(X)$ と合成することにより交点積 $\hat{H}^p(X) \times \hat{H}^q(X) \rightarrow \mathbb{R}$ が定義される. $(Y, g_Y) \in \hat{Z}^p(X)$, $(Z, g_Z) \in \hat{Z}^q(X)$ で Y と Z は generic fiber X_F 上では交わらないとすると積 $(Y, g_Y) \cdot (Z, g_Z)$ は具体的に

$$\sum_{i,j} (-1)^{i+j} \# H^i(X, \text{Tor}_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Z)) + \frac{1}{2} \left(\int_{Z \cap Y} g_Y \quad \int_{X \cap Y} \omega_Y \wedge g_Z \right)$$

で与えられる.

最後に対数型 Green 形式の定義を(これを使, Z と積の定義をする X を複素多様体とし $Y \subset X$ を閉部分解析空間とする $X-Y$ 上の smooth 実 $p-1, p-1$ 形式 $g \in A^{p-1, p-1}(X-Y)$ が Y に関する対数型 Green 形式であるとは次の 1, 2 を満たすこととする.

1. g の定める X 上の current $[g] \in \mathcal{D}^{p-1, p-1}(X)$ が Y に関する Green current である. したがって $dd^c[g] + \partial \bar{\partial} g$ は smooth.

2. X 上射影的な複素多様体 $Z \rightarrow X$ と $Z = \pi^{-1}(Y)$ 上 smooth な形式 φ で次の i) - iii) をみたすものが存在する.

i) $\pi^{-1}(Y)$ は smooth な多様体 Z の正規交叉因子で π の $Z = \pi^{-1}(Y)$ の制限は $X = Y$ 上 smooth. 正規交叉因子とは Z 上局所的に座標系 $(z_1, \dots, z_d)$ をとると $\pi^{-1}(Y)$ が $z_1 = \dots = z_d = 0$ で定義されることである.

ii) φ の順像 $\pi_* \varphi$ は $X = Y$ 上 g_1 に等しい. ここで順像は i) より fiber ごとく積分で定義される.

iii) φ は Z 上局所的に $\varphi = \sum \log |z_i|^2 \cdot \alpha_i + \beta$ の形にかけられる. ここで z_i は i) のような座標系であり, α_i, β は smooth な形式. α_i はさらに d あるいは d' に関し 2 閉形式である.

Y について, 写像に対数型 Green 形式は存在する (Th.

1.3.5) さらにこれから任意の Y に関する Green current $[g] \in \hat{\mathcal{D}}^{p-1, p-1}(X)$ に対し対数型 Green 形式 $g \in A^{p-1, p-1}(X-Y)$ で g の $\hat{\mathcal{D}}^{p-1, p-1}(X)$ での類が $[g]$ と一致するものが存在することかわかる.

対数型 Green 形式を使って $*$ -積 $g_1 * g_2 = g_1 \wedge g_2 + \omega_Y \wedge g_2$ を定義する. 上でみたように第 1 項 $g_1 \wedge g_2$ を定義すればよい. g_1 を対数型 Green 形式であるとしてよい. $\tilde{Z} \rightarrow Z$ を特異点解消とし, $\phi: \tilde{Z} \rightarrow X$ を合成射とする. すると $\tilde{Z} = \phi^{-1}(Y)$ 上の smooth な形式 $\phi^* g_Y$ が定まる. これを定める $\tilde{Z}$ 上の current

$[C^*g_Y]$ の順像 $\phi_*[C^*g_Y]$ を $g_Y \wedge \alpha_2$ と定義する. 順像は ϕ が proper により定義される. $g_Y \wedge \alpha_2$ は Σ のとりかたによらず $\cup$ として $g_Y * g_2$ が定義される.

参考文献 本文中 であげたもの他に交点理論については最近出た Soule の本

Lectures on Arakelov geometry. Cambridge Univ. Press 1992

がある. 特殊値の予想については Birch, Swinnerton-Dyer 予想については

Tate: "On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and ---", Séminaire. Bourbaki 306.

周期の定義など

Deligne "Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales"

Proc. Symp. Pure Math. 33 part 2 313-346

一般に Beilinson 予想については 本

"Beilinson's conjectures ---" ed by M. Rapoport et al.

Academic Press 1988

がある