

3 次元磁性流体における定常界面形状決定

北大大学院工学研究科 水 田 洋 (Yo Mizuta)

Grad. Sch. of Engineering, Hokkaido Univ.

1 はじめに

磁性流体自由表面現象の解析において、定常界面形状を決めたり動的解析を行う際には、流体と磁場の相互作用を考えることになる。流体を非粘性・渦なしとする場合、 φ を速度ポテンシャル、 ρ を流体密度、 S を重力 $G \cdot$ 表面張力 $C \cdot$ 磁気応力差 T の応力和、 ∇_F を界面方向偏微分とすれば、透磁率差のある界面上で、Bernoulli 方程式と力学的条件から「界面力学方程式」 $\nabla_F(\rho\partial\varphi/\partial t + S) = 0$ が導かれる [1, 2]。これは、磁気応力差を通して磁場から流体への作用を表している。磁気応力差は、 μ_j を透磁率 ($j=1$: 流体, $j=2$: 真空), $[\dots]$ を界面を横切る値の跳び ($2-1$) として、界面磁場 (接線磁場 $h_{X,Y} \cdot$ 法線磁束密度 b_Z) により $T = -[1/\mu_j]\{\mu_1\mu_2(h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2\}/2$ と表される。界面磁場は界面形状に応じて変化するため、「界面磁場解析」[3, 4, 5, 6] が流体から磁場への作用を決めることに相当する。

本研究で定常界面形状を決定したり界面現象の動的解析を行う場合、水平に近い界面では、Real Space における界面座標 $\mathbf{r}$ を Flat Space の座標 $\mathbf{R} = (X, Y)$ の関数として、

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^1 \end{pmatrix}, \quad z^1 = \Phi^{(rS)}(\mathbf{R})\tilde{z}^1, \quad \tilde{z}^1 \equiv \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{z}_{Sn}^1 \\ \vdots \\ \tilde{z}_{An}^1 \\ \vdots \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vdots \\ z_n^1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1)$$

のように、その z 成分のみを周期関数列

$$\Phi^{(rS)}(\mathbf{R}) \equiv (f_{Sn}(\mathbf{R}) | f_{An}(\mathbf{R})) \equiv (f_n(\mathbf{R}))$$

で展開する ($f_{Sn}(\mathbf{R}) = \cos \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{R}$ は対称な周期関数, $f_{An}(\mathbf{R}) = \sin \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{R}$ は反対称な周期関数)。このとき、展開係数ベクトル $\tilde{z}^1$ は、界面形状を一意的に特徴づけるパラメータ群となる。

$\tilde{z}^1$ を決めるには、定常界面の場合、「界面力学方程式」より導いた $\nabla_F S = 0$ を用いる。これは、重力・表面張力・磁気応力差がつりあって、応力和の分布が界面上で一様になることを示している。この条件は、界面座標 r と同じ周期関数列で各界面応力を

$$G(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R})\tilde{\mathbf{G}}, \quad C(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R})\tilde{\mathbf{C}}, \quad T(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R})\tilde{\mathbf{T}}$$

と展開するときの展開係数ベクトルで

$$\tilde{\mathbf{S}}(\tilde{z}^1) \equiv \tilde{\mathbf{G}}(\tilde{z}^1) + \tilde{\mathbf{C}}(\tilde{z}^1) + \tilde{\mathbf{T}}(\tilde{z}^1) = 0 \quad (2)$$

と書き換えられる [1, 2].

界面応力は界面形状に応じて変化するので、(2) に示すように、展開係数 $\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{T}}$ は $\tilde{z}^1$ の関数になる。 $G(\mathbf{R}), C(\mathbf{R})$ は界面形状の直接的な関数であり、 $\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{C}}$ の $\tilde{z}^1$ 依存性は比較的容易に決められる。これらとは対照的に、 $T(\mathbf{R})$ は界面磁場を通して界面形状に依存するため、「界面磁場解析」まで遡ることが必要になる。いずれにしても、(2) は $\tilde{z}^1$ に対する非線形連立方程式系となり、その解を求めるには、Newton 法を用いるのが一般的である。すなわち、

$$\tilde{z}_{k+1}^1 = \tilde{z}_k^1 + \Delta\tilde{z} = \tilde{z}_k^1 - \mathbf{H}^{-1}\tilde{\mathbf{S}}(\tilde{z}_k^1), \quad \mathbf{H} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \tilde{z}_1^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \tilde{S}_n}{\partial \tilde{z}_n^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \tilde{S}_N}{\partial \tilde{z}_N^1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

のように、 $\tilde{z}_k^1$ から $\tilde{z}_{k+1}^1$ を漸化的に求めていく。このとき、 $\tilde{\mathbf{S}}(\tilde{z}^1)$ およびその勾配行列 $\mathbf{H}$ を効率よく求める手順が必要となる [1].

定常界面形状決定・動的解析・安定性解析・界面形状遷移などへの適用に向けて以上のような準備を進めてきたが、本稿では、Rosensweig の線形安定性理論 [7] や Gailitis のパターン形成理論 [8] を念頭に置いて、これまでに構築してきた枠組の見直しを行う。

2 線形安定性理論における界面磁場解析との比較

流体 ($j=1$)・真空 ($j=2$) の各領域で、調和場 (磁束密度ベクトル) $\mathbf{f}_j$ を考え、界面上ではこれから界面磁場 $h_{X,Y} = \mathbf{t}_{X,Y} \cdot \mathbf{f}_j / \mu_j$, $b_Z = \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{f}_j$ を求める。ただし、 $\mathbf{t}_X = \mathbf{r}_X / |\mathbf{r}_X|$, $\mathbf{t}_Y = \mathbf{r}_Y / |\mathbf{r}_Y|$ は接線単位ベクトル ($\mathbf{r}_X = \partial \mathbf{r} / \partial X$,

$\mathbf{r}_Y = \partial \mathbf{r} / \partial Y$), $\mathbf{t}_Z = (\mathbf{t}_X \times \mathbf{t}_Y) / |\mathbf{t}_X \times \mathbf{t}_Y|$ は法線単位ベクトルである. 調和場と界面磁場は, 既知の印加磁場 $\mathbf{h}^0$ から直接求められる基本場 $\mathbf{f}_j^0 = \mu_j \mathbf{h}^0$, $h_{X,Y}^0, b_Z^0$ と, 基本場と合わせて界面条件 $[h_{X,Y}] = 0$, $[b_Z] = 0$ を満たす誘導場 $\mathbf{f}^1, h_{X,Y}^1, b_Z^1$ へ分離する. これより, 界面磁場は次のように表される.

$$\begin{cases} h_{X,Y} = \frac{\mathbf{t}_{X,Y} \cdot (\mathbf{f}_j^0 + \mathbf{f}_j^1)}{\mu_j} = \frac{\mathbf{t}_{X,Y} \cdot (\mu_j \mathbf{h}^0 + \mathbf{f}_j^1)}{\mu_j} = \mathbf{t}_{X,Y} \cdot \mathbf{h}^0 + h_{X,Y}^1, \\ b_Z = \mathbf{t}_Z \cdot (\mathbf{f}_j^0 + \mathbf{f}_j^1) = \mathbf{t}_Z \cdot (\mu_j \mathbf{h}^0 + \mathbf{f}_j^1) = \frac{\mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{h}^0}{P} + b_Z^1. \end{cases} \quad (4)$$

ただし今後, $P \equiv (1/\mu_2 + 1/\mu_1)/2$, $M \equiv (1/\mu_2 - 1/\mu_1)/2$ を用いる.

誘導場は, 次の **3次元界面磁場方程式** の解である [3, 4, 5, 6].

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & M\hat{G}_X \\ 0 & 1 & M\hat{G}_Y \\ 0 & 0 & 1+M\hat{G}_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_X^1 \\ h_Y^1 \\ b_Z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{G}_X \\ \hat{G}_Y \\ \hat{G}_Z \end{pmatrix} \tilde{h}_Z. \quad (5)$$

ここで $\hat{G}_I$ ($I = X, Y, Z$) は積分演算子で, 次のように定義される.

$$\hat{G}_I[f(\mathbf{R}')] \equiv \frac{\mathbf{t}_I}{P_I} \cdot \frac{1}{\alpha} \iint_F |\mathrm{d}\mathbf{S}'_R| (\nabla' \psi) f(X', Y'), \quad P_I = \begin{cases} 1 & (I=X, Y), \\ P & (I=Z). \end{cases} \quad (6)$$

$\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ を 界面 F 上の観測点とソース点とすれば (以後ソース点に関する量に"'"をつける), Poisson 方程式の基本解 $\psi(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ とその勾配は, 2次元・3次元で次のようになる.

$$\begin{cases} 2 \text{次元} : \psi = \frac{\ln |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{2\pi}, & \nabla' \psi = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{2\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2}, & |\mathrm{d}\mathbf{S}'_R| = |\mathbf{r}'_X| \mathrm{d}X', \\ 3 \text{次元} : \psi = \frac{-1}{4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}, & \nabla' \psi = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}, & |\mathrm{d}\mathbf{S}'_R| = |\mathbf{r}'_X| |\mathbf{r}'_Y| \mathrm{d}X' \mathrm{d}Y'. \end{cases}$$

Real Space の界面上の積分は, ここに示す $|\mathrm{d}\mathbf{S}'_R|$ で Flat Space 上の積分に変換する. また $\mathbf{r}$ の近傍で F が局所的に平面なら $\alpha = 1/2$ となる. 生成項 $\tilde{h}_Z$ は, 次のように, 印加磁場 $\mathbf{h}^0$ から直接決まる.

$$\tilde{h}_Z \equiv -\frac{M}{P} (\mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{h}^0) = -Mb_Z^0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{b_Z^0}{\mu_2} - \frac{b_Z^0}{\mu_1} \right) = -\frac{1}{2} [H_j] = -\frac{1}{2} M_0. \quad (7)$$

ただし, $H_j = b_Z^0 / \mu_j$ は法線磁場, $[H_j] = M_0$ は磁化である.

(5) から誘導界面磁場 $h_{X,Y}^1, b_Z^1$ を求めるには, これらを周期関数列で展開したときの展開係数に対する連立方程式を (5) から導きこれを解く代わりに,

未知量を分離した次の表式を用いてより直接的に求めることもできる [2].

$$\begin{cases} h_X^1 = \hat{G}_X (\hat{1} + M\hat{G}_Z)^{-1} \tilde{h}_Z, \\ h_Y^1 = \hat{G}_Y (\hat{1} + M\hat{G}_Z)^{-1} \tilde{h}_Z, \\ b_Z^1 = \hat{G}_Z (\hat{1} + M\hat{G}_Z)^{-1} \tilde{h}_Z. \end{cases} \quad (8)$$

ここで, Rosensweig の線形安定性理論 [7] における界面磁場解析との比較を行う. この解析は, 2次元 (x - z 面内), 無限深さ, 一様鉛直磁場, 線形近似可能な微小界面変形を仮定して, 次の接線単位ベクトル・法線単位ベクトル・磁場・磁束密度を用いる.

$$\mathbf{t}_X \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial z^1 / \partial x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_Z \simeq \begin{pmatrix} -\partial z^1 / \partial x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_j \end{pmatrix} + \mathbf{h}_j, \quad \mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_j \end{pmatrix} + \mathbf{b}_j.$$

ただし, $\mathbf{h}_j, \mathbf{b}_j$ は界面勾配 $\partial z^1 / \partial x$ と同程度の微小擾乱である. また, H_j, B_j は, 水平な界面があるときのそれぞれの領域における一様な法線成分で, 界面がないときの印加磁場 h^0 とは異なる. これらで界面磁場を表せば,

$$\begin{cases} h_X = \frac{\mathbf{t}_X \cdot \mathbf{f}_j}{\mu_j} = \mathbf{t}_X \cdot \mathbf{H}_j = (H_j + h_{jz}) \frac{\partial z^1}{\partial x} + h_{jx} \simeq H_j \frac{\partial z^1}{\partial x} + h_{jx}, \\ b_Z = \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{f}_j = \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{B}_j = B_j + b_{jz} - b_{jx} \frac{\partial z^1}{\partial x} \simeq B_j + b_{jz}. \end{cases} \quad (9)$$

界面磁場に対する界面条件から, 次の条件が導かれる ($[B_j] = 0, [H_j] = M_0$).

$$\begin{cases} 0 = [h_X] \simeq \left[H_j \frac{\partial z^1}{\partial x} + h_{jx} \right] = M_0 \frac{\partial z^1}{\partial x} + \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right] \Rightarrow \phi_2 - \phi_1 = -M_0 z^1, \\ 0 = [b_Z] \simeq [B_j + b_{jz}] = \left[\mu_j \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right] \Rightarrow \mu_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \mu_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z}. \end{cases} \quad (10)$$

ここで, ϕ_j は擾乱磁場を $\mathbf{h}_j = \nabla \phi_j$ と与えるポテンシャルである. これらは, Laplace 場に (10) を適用して, 次のように求められる.

$$\phi_2 = -\frac{M_0 z^1}{2P\mu_2} e^{-kz}, \quad \phi_1 = \frac{M_0 z^1}{2P\mu_1} e^{kz}, \quad k^2 \equiv -\frac{1}{z^1} \left(\frac{\partial^2 z^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z^1}{\partial y^2} \right). \quad (11)$$

ただし, ϕ_j が Laplace を満たすことを考慮して, k を上のように定義した. (9) の $h_{jx} = \partial \phi_j / \partial x, b_{jz} = \mu_j \partial \phi_j / \partial z$ にこのポテンシャルを用いれば, 界面磁場

は両領域で次のようになる ($M_0 = H_2 - H_1$, $1/\mu_2 = P + M$, $1/\mu_1 = P - M$).

$$h_X \simeq \begin{cases} H_2 \frac{\partial z^1}{\partial x} + h_{2x} = \left(H_2 - \frac{M_0}{2P\mu_2} \right) \frac{\partial z^1}{\partial x} = \left(\frac{H_2 + H_1}{2} - \frac{M M_0}{P} \right) \frac{\partial z^1}{\partial x}, \\ H_1 \frac{\partial z^1}{\partial x} + h_{1x} = \left(H_1 + \frac{M_0}{2P\mu_1} \right) \frac{\partial z^1}{\partial x} = \left(\frac{H_2 + H_1}{2} - \frac{M M_0}{P} \right) \frac{\partial z^1}{\partial x}, \end{cases} \quad (12)$$

$$b_Z \simeq \begin{cases} B_2 + b_{2z} = B_2 + \frac{M_0 k z^1}{2P}, \\ B_1 + b_{1z} = B_1 + \frac{M_0 k z^1}{2P}. \end{cases}$$

ここで (4) に

$$t_X \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial z^1 / \partial x \end{pmatrix}, \quad t_Z \simeq \begin{pmatrix} -\partial z^1 / \partial x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_0 \end{pmatrix}$$

を用いれば,

$$\begin{cases} h_X = t_X \cdot h^0 + h_X^1 \simeq H_0 \frac{\partial z^1}{\partial x} + h_X^1, \\ b_Z = \frac{t_Z \cdot h^0}{P} + b_Z^1 \simeq \frac{H_0}{P} + b_Z^1. \end{cases} \quad (13)$$

(13) を (12) と較べれば,

$$\begin{cases} h_X^1 = \left(\frac{H_2 + H_1}{2} - H_0 - \frac{M M_0}{P} \right) \frac{\partial z^1}{\partial x}, \\ b_Z^1 = B_1 - \frac{H_0}{P} + \frac{M_0 k z^1}{2P} = B_2 - \frac{H_0}{P} + \frac{M_0 k z^1}{2P}. \end{cases} \quad (14)$$

$M = 0$ としたとき $h_X^1 = 0$, $b_Z^1 = 0$ となるように, $(H_2 + H_1)/2 = H_0$, $B_1 = B_2 = H_0/P$ とする. さらに (7) を用いれば,

$$\begin{cases} h_X^1 = -\frac{M M_0}{P} \frac{\partial z^1}{\partial x} = \frac{M}{P} \frac{\partial z^1}{\partial X} \tilde{h}_Z, \\ b_Z^1 = \frac{M_0 k z^1}{2P} = -\frac{k z^1}{P} \tilde{h}_Z. \end{cases} \quad (15)$$

(15) は, (8) から求めた h_X^1 , b_Z^1 と比較すべき関係となっている. h_X^1 , b_Z^1 は, 界面変位とその勾配, および, 透磁率差と共に 0 に近づく.

3 2次元線形安定性解析との比較

x - z 面内で 2 次元線形安定性解析を行うときは, 流体の運動方程式の z 成分 (16) を $-\infty < z \leq z^1$ で積分してから, 界面 $z = z^1$ における運動学的条

件と力学的条件 (17) を適用する. ただし, ρ, v_z, p, p_0 は密度・流速の鉛直成分・圧力・大気圧である. また, $v_z \propto e^{kz}$ を仮定する.

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(G + p), \quad (16)$$

$$v_z = \frac{\partial z^1}{\partial t}, \quad p = C + T + p_0 \quad (z = z^1). \quad (17)$$

以上により以下の (18) が導かれ, 界面応力 G, C, T を z^1 について (19) のように線形化すれば, 線形分散関係 (20) が得られる.

$$-\frac{\rho}{k} \frac{\partial^2 z^1}{\partial t^2} - G - T - C = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\rho \omega^2}{k} z^1 - \rho g z^1 + M_0 b_Z^1 - \gamma k^2 z^1 = 0, \quad b_Z^1 = \frac{\mu_0 M_0 k z^1}{1 + \mu_0 / \mu}, \quad (19)$$

$$\rho \omega^2 = \rho g k + \gamma k^3 - \frac{k^2 \mu_0 M_0^2}{1 + \mu_0 / \mu}. \quad (20)$$

安定状態から不安定状態への遷移は, $\omega^2 = 0, \partial \omega^2 / \partial k = 0$ が同時に満たされるとき, すなわち

$$k = (\rho g / \gamma)^{1/2}, \quad M_0^2 = 4P (\rho g \gamma)^{1/2} \quad (21)$$

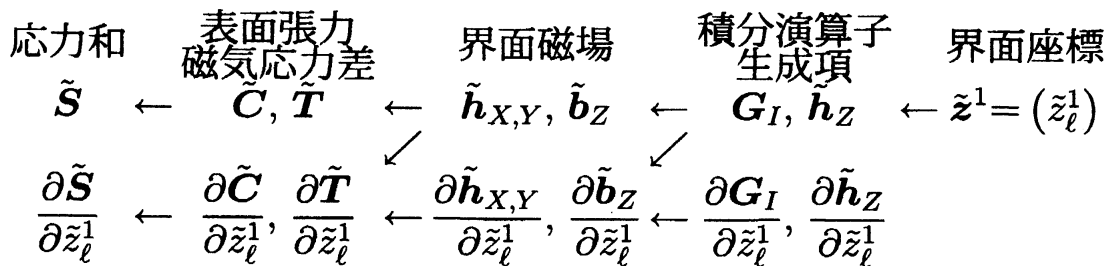
において生じる. (7) にしたがって, このときの磁化を法線磁束密度に換算すれば,

$$(b_Z^0)^2 = \left(\frac{M_0}{2M} \right)^2 = \frac{P}{M^2} (\rho g \gamma)^{1/2} \quad (22)$$

となる.

4 勾配行列の特性評価と利用

(3) のように, Newton 法を用いて界面座標の展開パラメータ $\tilde{z}^1$ を求める場合, 以下のような「依存関係の鎖」に基づいて, 界面応力和 $\tilde{S}(\tilde{z}^1)$ およびその勾配行列 H を求める手順が必要である [1].



それぞれの依存関係を具体的に記すと、次のようになる (勾配行列だけに
関係する量は略す) [1, 2]. なお, 勾配行列については, 解析的表式と数値的
差分による結果が基本的に一致することを確認している [9].

$$1. \text{ 表面張力: } C(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R})\tilde{C}, \quad \tilde{C} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_n \end{pmatrix},$$

$$C = \gamma(\kappa_1 + \kappa_2) = \gamma \frac{GL + EN - 2FM}{EG - F^2} \quad (\gamma: \text{表面張力係数}). \quad (23)$$

$$2. \text{ 磁気応力差: } T(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R})\tilde{T}, \quad \tilde{T} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T}_n \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}_n = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\mu_j} \right] \sum_{l,m} \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & [+ \tilde{d}(\mathbf{n}-\mathbf{l}-\mathbf{m}) + \tilde{d}(\mathbf{n}-\mathbf{l}+\mathbf{m})] \tilde{b}_{Zl}^S \tilde{b}_{Zm}^S \\ & + [- \tilde{d}(\mathbf{n}-\mathbf{l}-\mathbf{m}) + \tilde{d}(\mathbf{n}-\mathbf{l}+\mathbf{m})] \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^A \tilde{h}_{Xm}^A + \tilde{h}_{Yl}^A \tilde{h}_{Ym}^A) \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

3. 界面磁場:

$$h_{X,Y}(\mathbf{R}) = \Phi^{(hb)}(\mathbf{R})\tilde{h}_{X,Y}, \quad \tilde{h}_{X,Y}^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h}_{Xn,Yn}^1 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_{X,Y}(\mathbf{1} + M\mathbf{G}_Z)^{-1}\tilde{h}_Z,$$

$$b_Z(\mathbf{R}) = \Phi^{(hb)}(\mathbf{R})\tilde{b}_Z, \quad \tilde{b}_Z^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_{Zn}^1 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_Z(\mathbf{1} + M\mathbf{G}_Z)^{-1}\tilde{h}_Z.$$

$$4. \text{ 積分演算子行列: } \mathbf{G}_I \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & n & \dots & N \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{I,mn} \end{pmatrix}, \quad G_{I,mn} \equiv \left\langle f_m(\mathbf{R}) \hat{G}_I[f_n(\mathbf{R}')] \right\rangle,$$

$$G_{X,mn} = \frac{1}{2\alpha} \left\langle f_m(\mathbf{R}) \frac{f_{n,X}(\mathbf{R})}{k_n |\mathbf{r}_X|} \right\rangle, \quad G_{Y,mn} = \frac{1}{2\alpha} \left\langle f_m(\mathbf{R}) \frac{f_{n,Y}(\mathbf{R})}{k_n |\mathbf{r}_Y|} \right\rangle,$$

$$G_{Z,mn} = \frac{1}{4\alpha P} \left\langle f_m(\mathbf{R}) \frac{-\tilde{L} f_{n,YY}(\mathbf{R}) + 2\tilde{M} f_{n,XY}(\mathbf{R}) - \tilde{N} f_{n,XX}(\mathbf{R})}{k_n^3 (|\mathbf{r}_X| |\mathbf{r}_Y|)^2} \right\rangle. \quad (25)$$

$$5. \text{ 生成項: } \tilde{h}_Z \equiv -\frac{M}{P} (t_Z \cdot \mathbf{h}^0) = \Phi^{(hb)}(\mathbf{R})\tilde{h}_Z.$$

定常界面形状を決める際, $\tilde{S}(\tilde{z}^1) = \mathbf{0}$ を満たすパラメータ群 $\tilde{z}^1$ を求める
ため, (3) にしたがって $\tilde{z}_k^1$ から $\tilde{z}_{k+1}^1$ を決め, $\tilde{S}(\tilde{z}_{k+1}^1) \simeq \mathbf{0}$ となるまで繰り返す。

返す. この様子を N 次元空間中の点の移動と捉えるとき, 勾配行列 H の特性が不動点に達する前の点の動きを支配する. それを調べるためには, H の固有値解析が必要になる.

印加磁場の変化に応じて不連続的に界面形状パターンが変わる現象を解の分岐として扱う場合は, $\tilde{S}$ の変数に法線磁束密度 b_Z^0 をパラメータとして加え, $\tilde{S}(\tilde{z}^1, b_Z^0) = 0$ を満たす $\tilde{z}^1$ を b_Z^0 ごとに探す. ここから微小に離れた $b_Z^0 + \Delta b_Z^0$ でも $\tilde{z}^1 + \Delta \tilde{z}^1$ を探すとき,

$$0 = \tilde{S}(\tilde{z}^1 + \Delta \tilde{z}^1, b_Z^0 + \Delta b_Z^0) \simeq \tilde{S}(\tilde{z}^1, b_Z^0) + H \Delta \tilde{z}^1 + K \Delta b_Z^0 = H \Delta \tilde{z}^1 + K \Delta b_Z^0,$$

$$H \equiv \begin{pmatrix} 1 & \dots & \ell & \dots & N \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{S}_n}{\partial \tilde{z}_\ell^1} & & & & \end{pmatrix}, \quad K \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \frac{\partial \tilde{S}_n}{\partial b_Z^0} \\ \vdots \\ N \end{pmatrix}$$

より, $|H| \neq 0$ の場合に単一の解 (枝分かれしない 1 本の解) $\Delta \tilde{z}^1 \simeq -H^{-1}K \Delta b_Z^0$ が見つけられる. これより, 分岐点の候補を $|H(\tilde{z}^1, b_Z^0)| = 0$ から見つけるためにも, 勾配行列は利用できる.

5 まとめ

磁性流体の自由表面現象は流体と磁場の相互作用に基づくという見方から, 「界面磁場解析」と「界面力学方程式」から構成された解析の枠組を構築してきたが, 本稿では主に, 定常界面形状の遷移現象への適用を念頭に置いて, Rosensweig の線形安定性理論 [7] との比較を行った.

界面形状は, Real Space の界面座標を Flat Space の座標の関数として周期関数列で展開したときの展開係数ベクトル $\tilde{z}^1$ で特徴づけるが, $\tilde{z}^1$ を求めるためには, 定常界面条件から導いた非線形連立方程式系を Newton 法で解く. このために必要となる, 界面座標から積分演算子・生成項, 界面磁場, 表面張力・磁気応力差を経て応力和に至るまでの「依存関係の鎖」と, 勾配行列を整備した. $\tilde{z}^1$ を首尾よく見出すためには, 固有値解析による勾配行列の特性評価が欠かせない. また勾配行列は, 分岐点の候補を見つけるためにも利用される.

定常界面形状への漸近状況は, 界面応力・界面磁場の波数空間・実空間分

布で確認するが、このための監視態勢を整えた [5, 10].

参考文献

- [1] 水田 洋: 磁性流体 3 次元定常自由表面形状の決定過程; 日本流体力学会年会 2008 拡張要旨集
(<http://www.nagare.or.jp/nenkai2008/cd-rom/index.html>) (2008).
- [2] 水田 洋: 磁性流体 3 次元界面解析のためのいくつかの考察; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1594**, p.55 (2008).
- [3] 水田 洋: 複雑界面における調和場解析の次元間対応; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1483**, p.175 (2006).
- [4] 水田 洋: 磁性流体自由表面解析への 3 次元 Hilbert 変換の適用; 日本流体力学会年会 2006 講演要旨集
(<http://www.nagare.or.jp/nenkai2006/ronbun.html>), AM06-16-003 (2006).
- [5] 水田 洋: 「3 次元 Hilbert 変換」による界面磁場解析と磁性流体自由表面解析; 京都大学数理解析研究所講究録「波動現象の数理と応用」, **1543**, p.31 (2007).
- [6] Y.Mizuta: Interface magnetic field analysis for free surface phenomena of magnetic fluid; **Magnetohydrodynamics*, **44**(2), p.155 (2008).
- [7] R.E.Rosensweig: *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge), Chap.7 (1985).
- [8] A.Gailitis: Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field; *J. Fluid Mech.*, **82**(3), p.401 (1977).
- [9] 水田 洋: 磁性流体表面における界面形状変化の影響; 磁性流体連合講演会講演論文集, **22**, p.48 (2008).
- [10] 水田 洋: 界面形状と界面磁場の相互関係を用いた磁性流体自由表面解析; 日本流体力学会年会 2007 講演要旨集
(<http://www.nagare.or.jp/nenkai2007/cd-rom/index.html>), 2-3-5-1 (2007).