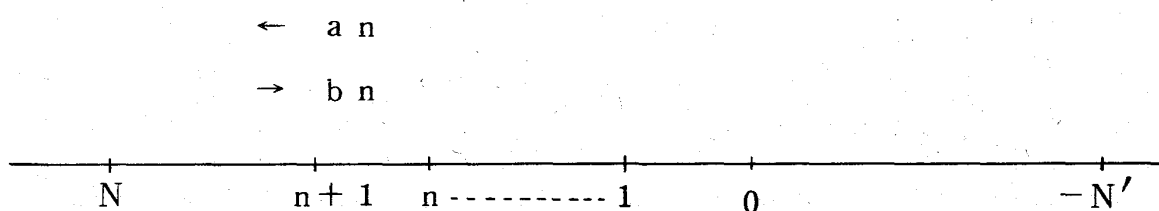


「局在解の matching 条件と固有値方程式」

芝浦工大(教養物理) 広 田 徹

Mott & Twose¹⁾ 及び Mott²⁾ は次の conjecture を行なった。『一次元 random 系の固有関数はすべて localize する。しかし多次元系の固有関数は、energy band 内で mobility edge と名付けられる値を境目として localized region と extended region とに分けられる。』この conjecture は Anderson³⁾ が random spin 系の non-diffusion を示した 1958 年の論文に基くものであるが、問題についてはっきりした結論は得られていない。一次元系について Borland⁴⁾、Motsuda & Ishii⁵⁾、Hori & Minami⁶⁾ 等により理論的にも数値解析の上からも可成りの所迄調べられているが Mott の conjecture が正しいか否かという点になると明確な解答はないように思われる。そこで一次元の Kronig-Penney model を取上げ、transfer matrix の性質を使い、localized solution の条件 (matching の条件) と、periodic boundary 条件を付けた場合の固有値方程式の関係を調べてみた。Matsuda-Ishii による random matrix の積のノルムについての “exponential growth”⁵⁾ を使用すると、この二つは系の長さが十分に長い極限に於て一致することが示される。



ポテンシャルを $V(x) = \sum V_n \delta(x - x_n)$ とすると x_n と x_{n+1} との間の波動関数 $\psi(x)$ は

$$\psi(x) = a_n e^{ik(x-x_n)} + b_n e^{-ik(x-x_n)} \quad (1)$$

と書けるが、 $x = x_{n+1}$ に於ける結合条件より (a_n, b_n) と (a_{n+1}, b_{n+1}) の間の関係式が生ずるが、繰返し演算により

$$\begin{aligned} a_N &= M_{11}(N-1, 0) a_0 + M_{12}(N-1, 0) \cdot b_0 \\ b_N &= M_{21}(N-1, 0) a_0 + M_{22}(N-1, 0) b_0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{又は、 } a_{-N'} &= I_{11}(-1, -N') a_0 + I_{12}(-1, -N') b_0 \\ b_{-N'} &= I_{21}(-1, -N') a_0 + I_{22}(-1, -N') b_0 \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。 $M(N-1, 0)$ は N 個の transfer matrixの積で unimodular 性を持った Cayley matrix であることがわかる。 $I(-1, -N')$ は $M(-1, -N')$ の逆マトリックスである。localized solutionの条件は、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = \lim_{N \rightarrow \infty} b_N = \lim_{N' \rightarrow \infty} a_{-N'} = \lim_{N' \rightarrow \infty} b_{-N'} = 0 \quad (4)$$

でなければならないので

$$\frac{M_{11}(\infty, 0)}{M_{12}(\infty, 0)} = \frac{M_{21}(\infty, 0)}{M_{22}(\infty, 0)} = \frac{I_{11}(-1, -\infty)}{I_{12}(-1, \infty)} = \frac{I_{21}(-1, \infty)}{I_{22}(-1, \infty)} \quad (5)$$

となる。上の極限値の存在は容易に示される。上式が成立するためには unimodular 性を考慮すると (M) 、 (I) の各部分の大きさが無限に大きくなければならないが、Matsuda-Ishiiの“exponential growth”を使用するとこの事が示される。 (M) と (I) の成分間の関係より(5式は

$$M_{11}(\infty, -\infty) = 0 \quad (6)$$

となる。 N, N' が非常に大きい場合には

$$M_{11}(N-1, -N') = O(1) \quad (7)$$

と書くことが出来る。一方固有値方程式の方は periodic boundary 条件 ($a_N = a_{-N'}, b_N = b_{-N'}$) をつけると

$$\text{Tr} M(N-1, -N') = \text{Re} M_{11}(N-1, -N') = 2 \quad (8)$$

従って、 $M_{11}(N-1, -N')$ の絶対値の大きさが $O(1)$ であるとする、固有値方程式(8)は局在解の条件 (matching の条件) (7)に帰着する。この事は容易に証明出来

る。即ち、もし $M_{11}(N-1, -N')$ の絶対値の大きさが充分大きいとすると a_N 、 b_N が $a_{N'}$ 、 $b_{-N'}$ に対し decay しなければならないからである。(boundary 条件を満たすことは不可能になる。) 一般に解が decay するとき、その幅が $I/L(E)$ ($L(E)$ は局在度) によって表わされることは Minami & Hori によって conjecture されており、Matsuda-Ishii により示されているが、この方法論により明らかにされる⁷⁾。(7)と(8)の一致を示すのに使った性質は matrix M の unimodularity Cayley 性及び “exponential growth” である。従って、この結論は一般の一次元系について主張出来ると思われる。即ち Mott & Twose の一次元系についての conjecture は成立すると思われる。

文 献

- 1) N. F. Mott and W. D. Twose, Adv. in Phys. 10 (1961) 107
- 2) N. F. Mott,
- 3) P. W. Anderson, Phys. Rev. 109 (1958) 1492
- 4) R. E. Borland, Proc. Roy. Soc. A274 (1963) 529
- 5) H. Matsuda and K. Ishii, Prog. Theor. Phys. Suppl.
45 (1970) 56
- 6) S. Minami and J. Hori, Prog. Theor. Phys. Suppl.
45 (1970) 87
- 7) T. Hirota, 物性研究 16 (1971) 487

三 次 元 無 秩 序 系 に 於 ける 局 在 度 Ⅱ

北 大 理 藤 田 武 彦

§ 1 序 論

前論文¹⁾では三次元 Anderson model に於いて局在度 $L(E)$ を Green 関数の非対角要素の比の対数 (アンサンブル) 平均で定義した。他方、Thouless²⁾ は一次元 Anderson model に対して両端の振幅の積の幾何平均の対数で固有状態の fall-