

回転球面上の 2 次元乱流における周極渦の形成

京都大学大学院 理学研究科 余田 成男 (YODEN Shigeo)

東京大学大学院 数理科学研究科 石岡 圭一 (ISHIOKA Keiichi)

東京大学大学院 数理科学研究科 林 祥介 (HAYASHI Yoshi-Yuki)

東京大学大学院 数理科学研究科 山田 道夫 (YAMADA Michio)

1. はじめに

大気や海洋の大規模な運動は地球の自転効果と重力による密度成層効果をうけて準水平 2 次元である。地球惑星流体力学においては、2 次元の流体という枠組みはそれなりに具体性のあるものである。3 次元乱流とは対照的に、エネルギーとエンストロフィーの保存則に基づく 2 次元乱流の統計理論はエンストロフィーカスケード領域では k^{-3} 、エネルギー逆カスケード領域では $k^{-5/3}$ というエネルギースペクトルの巾則を予言した (Kraichnan, 1967; Leith, 1968; Batchelor, 1969)。それ以来、数値実験による検証が行われてきたが、高分解能の数値モデルを用いて直接的な比較が行なえるようになったのは、コンピュータが高速・大容量化したここ 10 年ほどのことである (例えば, Brachet et al., 1988; Borue, 1993 など)。減衰性乱流の時間発展では、秩序渦が形成されて一様性の仮定が崩れることが明らかとなった (McWilliams, 1984)。

また、無限平面領域のみならず惑星の自転の緯度依存性を考慮した“ β 平面”領域や回転球面領域においても 2 次元乱流の性質が調べられてきた。1970 年代後半になると、そのような乱流計算の結果として、東西にのびた帯状縞構造が出現することが認識され (Rhines, 1975)、木星型惑星のもつ帯状縞構造を説明しうる学説のひとつとなった (Williams, 1978)。しかし、当時の計算機資源は限られたものであり、球面全域を覆う高分解能の数値計算は近年になってようやく可能になった (Yoden and Yamada, 1993; Cho and Polvani, 1996 など)。

このような研究の流れのなかで Yoden and Yamada (1993) は、減衰性乱流で惑星自転が十分大きな場合には西向きの周極渦が形成されることを見出した。周極渦の形成は強制乱流の数値実験 (Nozawa and Yoden, 1997a) や回転水槽実験 (Rhines, 1998) においても確認されている。しかし、減衰性乱流実験での初期値の与え方には問題点が残し、帯状縞構造の形成にはあまり注意が払われていなかった。そもそも、どうして周極渦が形成されるのかという力学的説明は与えられていない。本研究では、さらに高分解能のモデルを用いて、回転球面上の減衰性 2 次元乱流の数値実験を行なう。初期エネルギーを十分に高波数領域で与えて、真にエ

エネルギー逆カスケードの結果としてのパターン形成を観察する。また、1次元および2次元エネルギースペクトルの時間発展の初期値・自転角速度依存性をみる。

2. モデルと数値計算法

回転球面上の2次元非圧縮流れは次の渦度方程式(鉛直成分)に支配される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{a^2} J(\psi, \omega) + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = (-1)^{p+1} \nu_{2p} \left(\Delta + \frac{2}{a^2} \right)^p \omega. \quad (1)$$

ここで、 $\psi(\lambda, \mu, t)$: 流れ関数, $\omega(\lambda, \mu, t)$: 渦度の鉛直成分 ($\equiv \Delta\psi$), λ : 経度, μ : サイン緯度, t : 時刻, $J(A, B)$: 水平ヤコビアン, Δ : 水平ラプラシアン, a : 惑星半径, Ω : 惑星自転角速度, ν_{2p} : 超粘性係数, p : 超粘性の次数, である。非粘性の場合には, ポテンシャル渦度 $q \equiv \omega + 2\Omega\mu$ のラグランジュ的保存を表わすことになる。

従属変数を球面調和関数で展開 ($\psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^n \psi_n^m(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda}$) して, 展開係数 $\psi_n^m(t)$ に対する連立常微分方程式系からなるスペクトルモデルを構築する(余田・他, 1990)。非線型項は実空間で計算し, フーリエ-ルジャンドル変換で波数空間に戻す変換法を用いる。全球面域を 1024×512 の格子点で覆い, 全波数 $N = 341$ で切断する。

減衰性乱流の実験では, ある初期乱流場を与えて時間発展をみることになる。エネルギー密度を $E(n, t) = \frac{1}{2} n(n+1) \sum_{m=-n}^n |\psi_n^m(t)|^2$ として, 初期のエネルギースペクトルが

$$E(n, t=0) = \frac{An^5}{e^{-n/2}}, \quad \text{または,} \quad E(n, t=0) = \frac{An^{\gamma/2}}{(n+n_0)^\gamma}, \quad (2)$$

となるような条件のもとで, 各帯状波数 m 成分の振幅と位相は乱数で与える。前者は Yoden and Yamada(1993) で与えたもの(略称: yy1993)であり, 後者は Cho and Polvani(1996) によるスペクトル表式である。係数 A は無次元化した全運動エネルギー $\mathcal{E}(t=0) = \sum_{n=2}^{341} E(n, t=0)$ が1となるように定める。 $a = 1$ とし, 自転角速度 Ω を実験パラメータとして, 0, 25, 50, 100, 200, 400 の6つの値で与える。惑星は単位時間あたり $\Omega/(2\pi)$ 回転することになる。

本研究で用いるパラメータ値を表1に, 初期エネルギースペクトルを図1に示す。図1中の5本の縦線は, 渦度方程式(1)の非線型ヤコビアン項が線型の自転効果項と同程度の大き

表1 初期エネルギースペクトルのパラメータ値。

実験セットの略称	yy1993	cpn010	cpn050	cpn100	cpg100
	標準実験				
中心波数 n_0	—	10	50	100	50
スペクトル幅 γ	—	1000	1000	1000	100

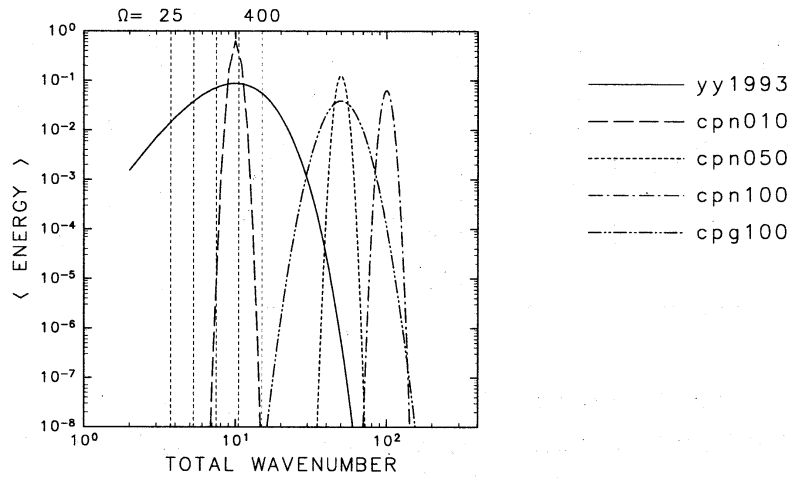


図1 初期エネルギースペクトル. 凡例は実験セットの略称(表1)で表示. 図中の5本の縦線は Ω を25から400まで変えたときの $n_\beta = \sqrt{\pi\Omega/(4\sqrt{2})}$ の値.

さとなる波数 $n_\beta \equiv \sqrt{\pi\Omega/(4U)} = \sqrt{\pi\Omega/(4\sqrt{2}\mathcal{E})}$ を各 Ω について示す. これより低波数域では線型項が卓越することになる. yy1993 で用いた初期値では, 惑星自転角速度が大きい場合に初期エネルギーピークの波数域で線型項が非線型項より卓越し, 必ずしも乱流によるエネルギー逆カスケードとならない. 一方, Cho and Polvani(1996) の表式では, 中心波数 n_0 の付近に限って初期エネルギーを与えることができる. γ はスペクトル幅をきめるパラメータで, 大きい値ほど初期エネルギーを狭い波数帯に限ることになる. ここでは yy1993 の追試も含めて5通りの与え方をし, $(n_0, \gamma) = (50, 1000)$ を標準実験 (cpn050) とする. cpn050, cpn100 および cpg100 の実験セットでは, $\Omega = 400$ でも初期エネルギーピークの波数域で非線型項が卓越している.

数値粘性は, $p = 8$, $\nu_{2p} = 1 \times 10^{-38}$ で与える. 異なる乱数列を用いた10個の初期値をそれぞれの実験セット毎に用意し, 時間発展を $t = 5$ まで計算する. エネルギースペクトルなどは各10個のアンサンブル平均で表示する. 時間積分には4次精度のルンゲ-クッタ法を用い, 時間刻みは $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ とする.

地球大気を念頭に置いて特徴的な長さスケールを $L \sim a \sim 6 \times 10^6 \text{m}$, 速度スケールを $U \sim \sqrt{2\mathcal{E}} \sim 10 \text{ms}^{-1}$, 時間スケールを $T \sim L/U \sim 7 \text{days}$ とすると, $\Omega = 50$ がほぼ地球の自転に相当する.

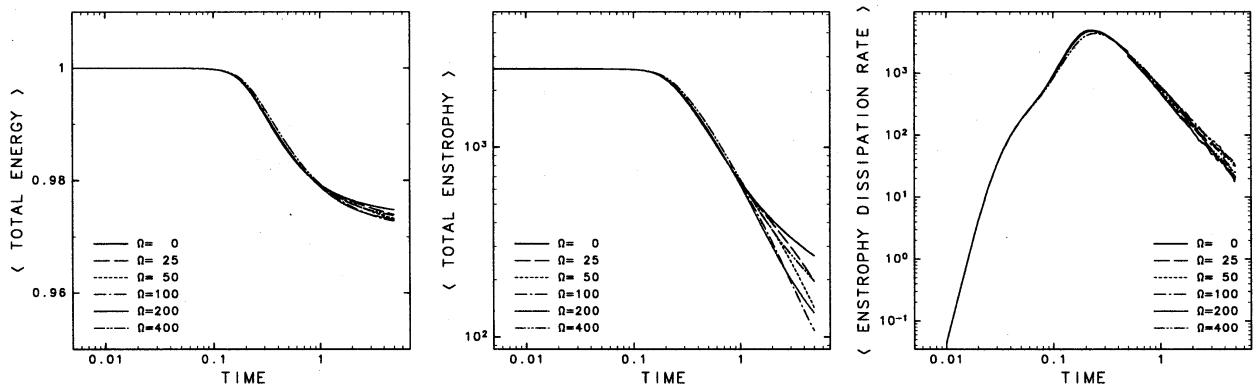


図2 全運動エネルギー $\mathcal{E}(t)$ (左), 全エントロフィー $Q(t)$ (中), および, エントロフィー散逸率 dQ/dt (右) の時間変化 (標準実験の場合). 自転角速度 Ω を6つの値で与え, それぞれに10個の初期値から時間発展を行なってアンサンブル平均をとったもの.

3. 結果

3.1 エネルギースペクトル

図2は全運動エネルギー $\mathcal{E}(t)$, 全エントロフィー $Q(t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{341} n^2(n+1)^2 \sum_{m=-n}^n |\psi_n^m(t)|^2$, およびエントロフィー散逸率 dQ/dt の時間変化を標準実験の場合について示したものである. これらの時間発展は惑星自転角速度にあまり依存していない. 全運動エネルギーは $t=1$ までに2%程度散逸するだけで, それ以降はほぼ保存的である. 一方, 全エントロフィーは, $t=0.2$ 頃に散逸率が最大となり, それ以降は Q が t^{-1} に比例して減少する.

各実験セットの時間発展で得られた全運動エネルギーおよび全エントロフィーの変化を表2に示す. すべて $\mathcal{E}(t=0) = 1$ であるが, $Q(t=0)$ は n_0 が大きいほど大きな値を示す (第2行目). 第4行目以下は $t=5$ まで時間積分したときの $\mathcal{E}$ および Q の初期値に対する比で, 低波数に初期エネルギーのピークがある場合 (yy1993, cpn010) には, エネルギーがほとんど保存される. $n_0 = 100$ にしても (cpn100), 約1割のエネルギーが散逸するだけである. 一方, エントロフィーの散逸は各実験セットによって大きく異なる. 初期エネルギーのピークが低波数にあるほど, エントロフィー散逸が起りにくく, とくに大きな自転角速度の場合はそうである. yy1993 や cpn010 の場合, dQ/dt の極大は $t=1$ 以降に現れる. これに対して $n_0 = 50$ や 100 の場合にはすみやかにエントロフィー散逸が起り, $t=5$ で1~2桁小さな値に減少する.

全波数 n に対する1次元エネルギースペクトル $E(n, t)$ の時間発展は, 初期エネルギースペクトルの与え方と自転角速度に依存している (図3). 非回転 ($\Omega = 0$) の場合, 初期エネルギーピークの波数が低波数で与えられる (cpn010, yy1993) ならばおよそ n^{-3} の巾則が得られるが, それが十分高波数で与えられる (cpn050, cpn100, cpg100) と, 両側に十分なカスケード

表 2 全運動エネルギーおよび全エンストロフィーの変化: $\mathcal{E}(t=5)/\mathcal{E}(t=0)$ および $Q(t=5)/Q(t=0)$ を % で表示. それぞれ 10 個の時間積分結果のアンサンブル平均.

実験セット	yy1993		cpn010		cpn050		cpn100		cpg100	
$Q(t=0)$	180.0		111.7		2590.7		10262.1		2992.0	
Ω	$\mathcal{E}[\%]$	$Q[\%]$	$\mathcal{E}[\%]$	$Q[\%]$	$\mathcal{E}[\%]$	$Q[\%]$	$\mathcal{E}[\%]$	$Q[\%]$	$\mathcal{E}[\%]$	$Q[\%]$
0	99.8	25.9	99.9	35.4	97.5	10.3	89.7	5.3	97.1	10.5
25	99.8	24.8	99.9	40.6	97.4	7.6	89.6	4.3	97.0	7.8
50	99.8	29.9	99.9	51.3	97.3	5.5	89.5	3.1	96.9	5.6
100	99.9	40.8	100.0	67.9	97.3	4.2	89.3	1.8	96.9	4.0
200	99.9	53.3	100.0	78.4	97.3	5.1	89.3	1.4	96.9	4.6
400	99.9	65.3	100.0	87.7	97.4	7.6	89.3	1.9	96.9	6.5

領域があるにもかかわらず強制乱流 (Nozawa and Yoden, 1997b) のような明瞭な巾則が得られない. 中心波数 n_0 より高波数のエンストロフィーカスケード領域では n^{-5} 程度, 低波数のエネルギー逆カスケード領域ではおよそ n^{-2} 程度で, だらだらと変化している.

一方, 回転がある場合, とくに自転角速度が大きな値 ($\Omega = 400$) の場合には, 幅広い波数領域で n^{-4} の巾則が得られる. この巾則は初期エネルギースペクトルの与え方に依存せず, 5 つの実験セットすべてに共通する特徴である. cpn010 や yy1993 の場合には, その領域が n_β よりも低波数にまで広がっている. 自転の効果により低波数域でのエネルギー逆カスケードは抑制されるはずなので, この巾則の出現は純粋な乱流カスケードとは異なる過程によると考えられる.

惑星の自転がある場合, 場は非等方になり流れも非等方性をもつので, エネルギースペクトルも球面調和関数の帯状 (東西) 波数 m と全波数 n (南北波数のかわり) の 2 次元波数空間でみる必要がある. 図 4 は標準実験で Ω が 0, 50, 400 の場合の 2 次元エネルギースペクトルを $n \leq 30$ の低波数域だけ示したものである. 非回転 ($\Omega = 0$) の場合には, 流れ場が等方的であるために 2 次元エネルギースペクトルは基本的に m に依存しない分布となっている. 一方, 回転がある場合にはエネルギー分布は非等方的になり, 全波数が同じ値ならば東西波数が小さな成分の方が大きなエネルギーをもつ.

また, $\Omega = 400$ の場合には, $m \sim n < 8$ 付近にエネルギーがほとんど輸送されない翼状の領域が現れる. Vallis and Multrad (1993) は, “ β 平面” 領域モデルでは 2 次元エネルギースペクトルに垂鈴型の空白域が出現することを初めて指摘したが, 彼らの “波-乱流境界” を表わす理論曲線を援用すると, 回転球面モデルにおける翼状の領域の存在を定性的には説明できる

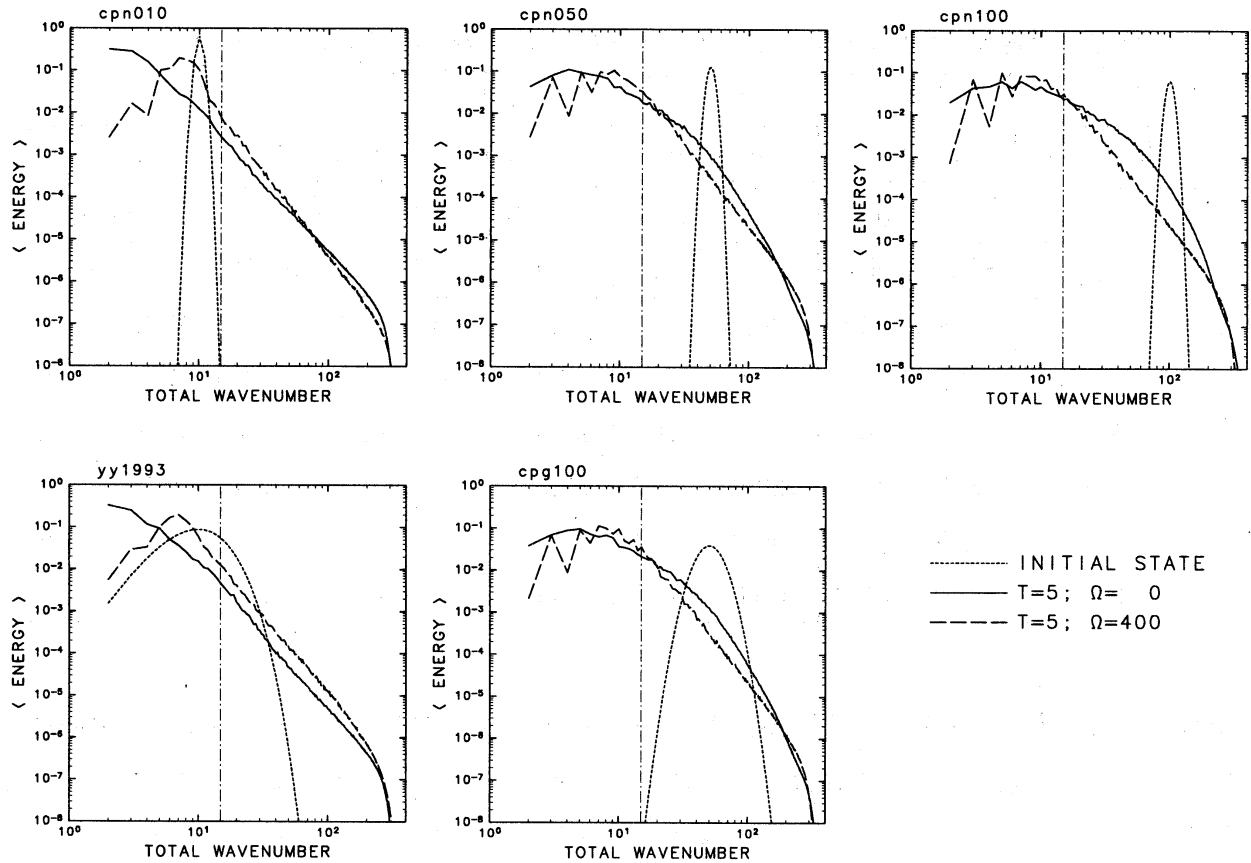


図3 1次元エネルギースペクトル $E(n, t)$ の初期エネルギースペクトルの与え方に対する依存性 (実験セットの略称をそれぞれの左上に示す). 初期値は点線で示し, $t = 5$ でのスペクトルを自転角速度 $\Omega = 0, 400$ について表示. それぞれ 10 個の時間積分結果のアンサンブル平均.

(Nozawa and Yoden, 1997b; Huang and Robinson, 1998). この境界線は $m = Ro \times n^2(n+1)$ (ただし, ロスビー数 $Ro \equiv U/(2\Omega a)$) で与えられ, 図4(中, 右)の曲線になる. $t = 0.3$ 頃のエネルギー逆カスケードはこの境界線より大きな n 側に沿って起こるが, $t = 5$ では境界線内にまでエネルギーが入り込んでいる.

系の回転がある場合のエネルギー分布の非等方性は, 線型項つまり惑星の自転効果項の寄与がほとんどない高波数域においても顕著にみられる. あらゆる空間規模で南北スケールよりも東西スケールが長くなり, 東西に引き伸ばされた構造となっている. このような高波数域での非等方的なエネルギー分布は, 図4に示した低波数域での非等方性と非線型項を通して直接的に関連していると考えられる.

3.2 周極渦・帯状縞構造の形成過程

実空間での流れ場の時間発展をポテンシャル渦度場の変化をとおして概観する. 図5は, 標準実験のなかの非回転の場合の一例で, 渦度場のスナップショットである. 初期の渦度分布

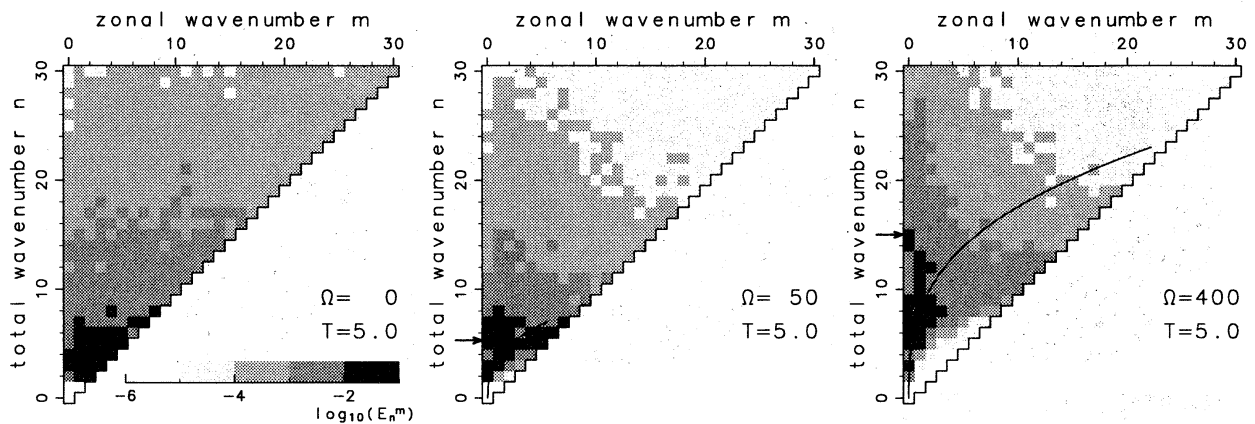


図4 2次元エネルギー Spektral の自転角速度依存性. $\Omega = 0$ (左), 50 (中), 400 (右) について表示. それぞれ 10 個の時間積分結果のアンサンブル平均. (中, 右) 内の曲線は“波-乱流境界”.

は一様等方的であり, $n \sim n_0 = 50$ 付近の構造がみえる. $t = 1$ では渦が引き伸ばされてエンストロフィーの散逸している様子がわかる. 平面領域での数値実験結果 (McWilliams, 1984) と同様に, やがて秩序渦が形成されて, 渦の融合や相互作用がみられるようになる.

流れ場の時間発展は自転角速度に決定的に依存するが, 相対渦度 ω と惑星渦度 $2\Omega\mu$ の比をあらわす無次元数が Ro である (非回転なら $Ro = \infty$). 図6は同一の初期値から時間発展したポテンシャル渦度場 $\omega + 2\Omega\mu$ で, $t = 5$ でのスナップショットである. 非回転の場合 (図6左) には, 図5右 ($t = 2$) から時間が経って秩序渦の融合とエンストロフィー散逸がすすんでいる. $\Omega = 50$ の場合, 惑星渦度の方が主となり緯度とともにポテンシャル渦度が増加する傾向となる. ポテンシャル渦度のうねり (帯状平均からの偏差) は, 回転球面上の波動である“ロスビー波”として伝播している. しかし, 中・低緯度域には, 非回転の場合に見られたような秩序渦構造を認めることもできる. $\Omega = 400$ では $Ro \ll 1$ となり, 等ポテンシャル渦度線はほぼ緯度円に平行である. 秩序渦構造は存在せず, ロスビー波の力学が卓越している.

帯状平均した帯状角運動量の時間発展をみると, 自転角速度が大きな値の場合 ($\Omega \geq 100$) には, 少なくとも一つの半球の高緯度域で西向き強い周極渦が形成されるのがわかる (図7). また, 中・低緯度域では, 西向き流れと東向き流れが南北に交互に並んだ帯状縞構造が出現する. これらの周極渦や縞の位置 (緯度) は時間によってほとんど変化せず, その位置を時間積分の初期の段階 ($t \sim 0.5$) まで遡ることができる. 惑星の自転角速度が大きいほど縞の幅が狭く, その本数が多くなる.

自転角速度が大きな値の場合に形成される中・低緯度域の帯状縞の位置は初期値に大きく依存している. すなわち, 乱数列をかえた 10 個の初期値から時間発展した結果は, それぞれ

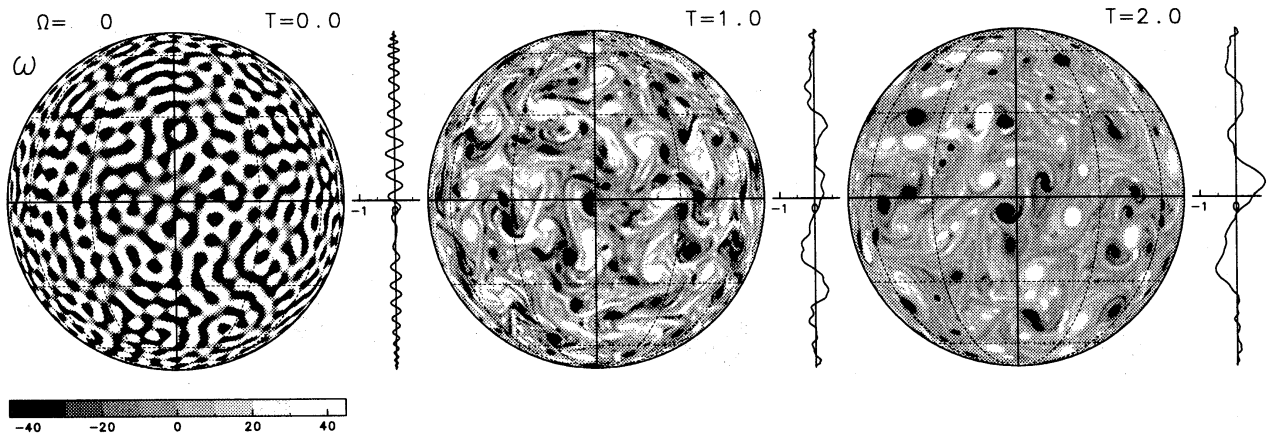


図5 渦度場の時間発展の一例. 標準実験で非回転の場合. $t = 0$ (左), 1 (中), 2 (右) について表示. 正射図法で, 緯線経線は 30 度毎. それぞれの右側の曲線は帯状平均した帯状角運動量.

異なる緯度に西向き/東向き流れが出現する. これに対して, 高緯度域の西向き周極渦の出現位置はあまり初期値に依存しない.

図8は形成される周極渦が初期エネルギースペクトルの与え方と自転角速度にどのように依存するかを示したものである. それぞれの曲線は (10 個の初期値) $\times$ (南・北半球) の 20 個の平均なので, 中・低緯度域の帯状渦構造は見えなくなっているが, 高緯度域の西向き周極渦は明瞭に残っている. また, 角運動量保存の束縛により, 高緯度域に西向き周極渦が出現する場合には, アンサンブル平均の結果として中・低緯度域で東向き流れとなっている. この図より, 自転角速度が大きな場合の西向き周極渦の形成が初期エネルギースペクトルの与え方に依らないことがわかる. とくに中心波数 n_0 を 50 や 100 の高波数で与えた場合には, Ω が 50 から 400 まで大きくなるにつれて, 周極渦の西向き角運動量が大きくなり, 流れのピークとなる緯度が 50 度付近から 70 度近くまで極に近づく, という一般的傾向がある.

4. 考察

今回の数値実験により, 西向き周極渦の形成は初期エネルギースペクトルの与え方に依存せず, 自転角速度が大きな場合の球面上の減衰性 2 次元乱流の普遍的な特徴であることがわかった. このような西向き周極渦の形成は, 基本的に極域におけるポテンシャル渦度の混合によって説明できる (Rhines, 1998). 北半球の場合を例にとると, 低緯度側の低ポテンシャル渦度の流体が極域の高ポテンシャル渦度の流体と混合して均一化されれば, 惑星渦度は時間変化しないので相対渦度が極域で負になり西向きの周極渦が形成されることになる. このとき, 混合がロスビー波の働きによるのか乱流によるかの詳細にかかわらず, ポテンシャル渦

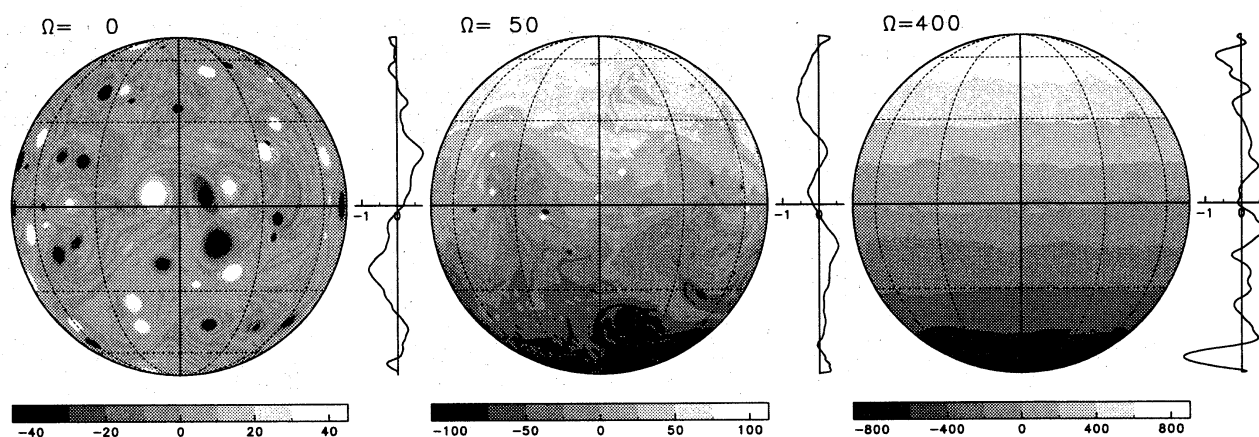


図 6 同一の初期値から時間発展したポテンシャル渦度場のスナップショット ($t = 5$). 標準実験で $\Omega = 0$ (左), 50(中), 400(右) について表示. 正射図法で, 緯線経線は 30 度毎. それぞれの右側の曲線は帯状平均した帯状角運動量.

度が均一化されさえすれば西向き流れとなる.

図 9 は, 強い周極渦が南極域に出現した図 6 右および図 7 右下の例における相対渦度場の時間発展である. これをみると周極渦および帯状縞構造の形成・維持過程が想像できる. 強い帯状流が出現しているところでは, 渦度場が東西に引伸ばされ帯状流の南北シアーにより歪んだ形となっている. このような渦度擾乱場と帯状流の相互作用により帯状縞構造が維持されていると考えられる.

しかし, どうしてどのようにして周極渦が形成されるのかという力学的説明は未だ与えられていない. 単に非線型計算の結果を図示して記述した段階であり, 帯状角運動量の再分配に関する詳細なデータ解析をする必要がある. また, それが基本的に線型 (あるいは弱非線型) 的なロスビー波による過程なのか, 非線型な乱流過程によるのかを見極める必要がある.

5. おわりに

回転球面上の減衰性 2 次元乱流に関して高分解能のスペクトルモデルを用いて数値実験を行なった. モデルは球面調和関数の全波数 341 で三角切断したものである (変換格子は 1024×512). 初期エネルギー Spektral の与え方を 5 種類採用し, それぞれに 10 個の乱流初期場をつくり, さらに自転角速度をゼロから高速回転まで 6 段階の値で与えて, 時間発展を行なった. 得られた知見の主な内容は次の通りである.

1. 減衰性乱流の場合には 1 次元エネルギー Spektral が明瞭な巾則を示さないのが一般的であるが, 惑星の自転角速度を大きくすると, 幅広い波数領域で n^{-4} の巾則が得られる.
2. 波数空間内のエネルギー分布は惑星の自転によって非等方的になる. 低波数域にはエ

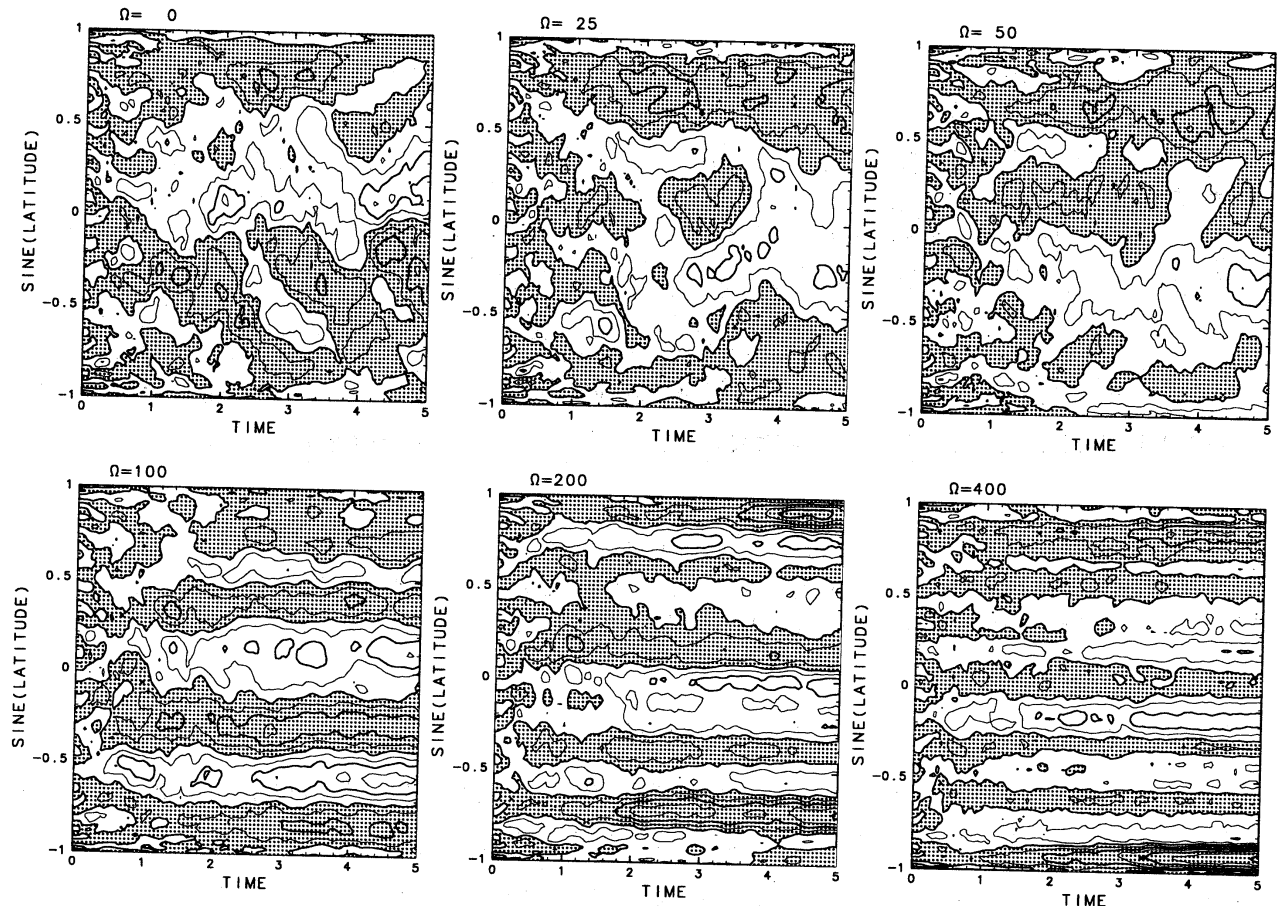


図 7 帯状平均した帯状角運動量の時間発展. 同一の初期値からの時間発展で, 自転角速度 $\Omega = 0, 25, 50$ (上段), および, $100, 200, 400$ (下段) の各場合. コンター間隔はすべて 0.25 で, 負 (西向き流れ) の領域に陰影をつける.

エネルギーがほとんど輸送されない翼状領域が出現する. また, エネルギー分布の非等方性は低波数域だけでなく高波数域にも見られる.

- 惑星が自転している場合, 流れ場は非等方的になり, 高緯度域では時間とともに西向きの周極渦が形成される. また, 中・低緯度域では東向き流れと西向き流れが緯度方向に交互に並ぶ帯状縞構造が卓越する.
- 西向き周極渦の形成は初期エネルギースペクトルの与え方に依存せず, 自転角速度が大きな場合の球面上の減衰性 2 次元乱流の普遍的な特徴である.
- 帯状縞構造は時間発展のごく初期の段階から認められ, 一度構造ができあがると, それ以降ほとんど位置が変化しない. 惑星の自転角速度が大きいほど縞の幅が狭くなり, その数が増える.

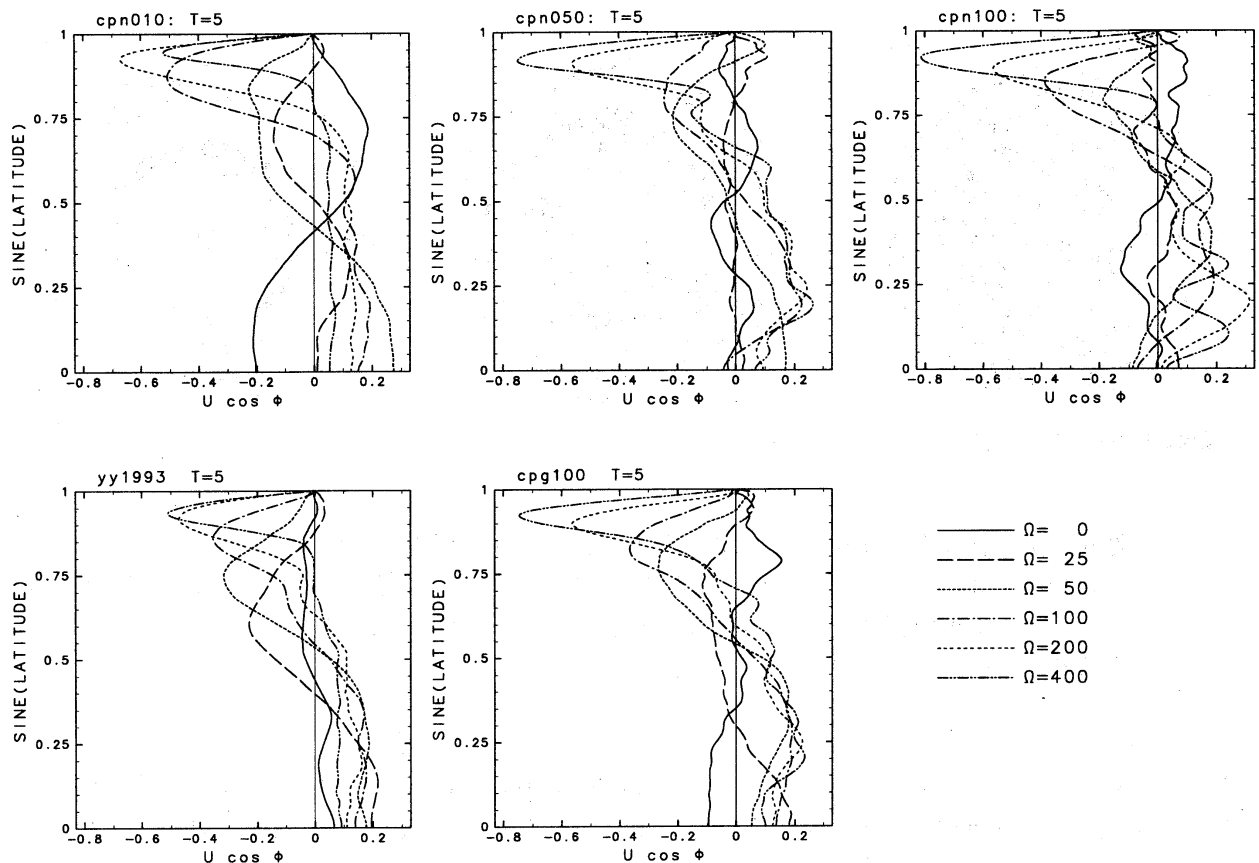


図 8 $t=5$ での帯状平均した帯状角運動量の初期エネルギースペクトルの与え方に対する依存性(実験セットの略称をそれぞれの左上に示す). それぞれ 10 個の時間積分結果をさらに南北半球で平均したもので, 赤道から極までの緯度分布. 各実験セットについて自転角速度 $\Omega = 0 \sim 400$ の 6 つの場合を表示.

謝辞: 図の作成には地球流体電脳ライブラリを用いた. なお, 本研究は日本学術振興会 未来開拓学術研究推進事業および文部省 科学研究費の補助を受けた.

引用文献

- Batchelor, G.K., 1969: Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **12**(Suppl.II), 233–239.
- Borue, V., 1993: Spectral exponents of enstrophy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 3967–3970.
- Brachet, M.E., M.Meneguzzi, H.Politano and P.L. Sulem, 1988: The dynamics of freely decaying two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, **194**, 333–349.
- Cho, J.Y-K. and L.M. Polvani, 1996: The emergence of jets and vortices in freely evolving, shallow-water turbulence on a sphere. *Phys. Fluids*, **8**, 1531–1552.
- Huang, H.P. and W.A. Robinson, 1998: Two-dimensional turbulence and persistent zonal jets in a global barotropic model. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 611–632.

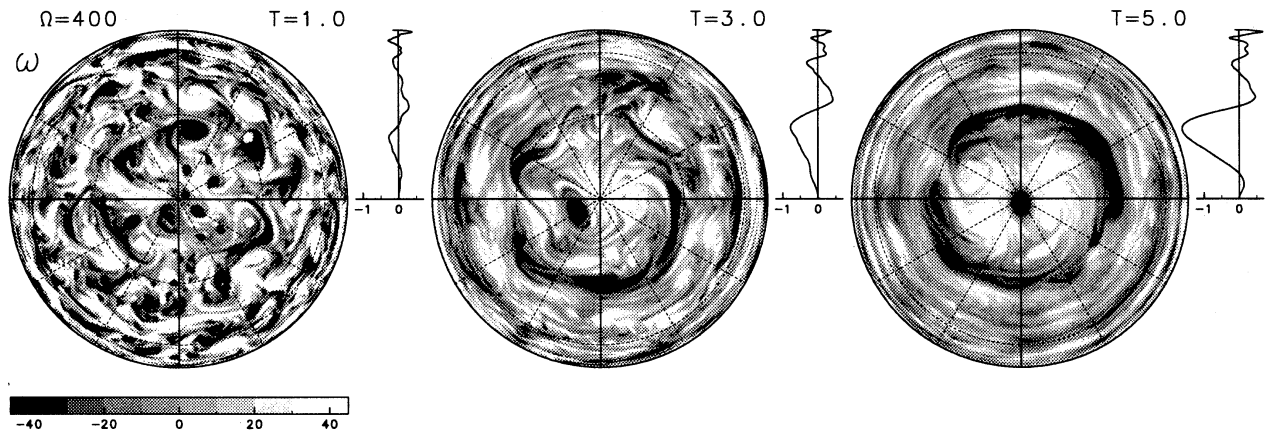


図 9 強い周極渦が南極域に出現する例における相対渦度場の時間発展. 標準実験で $\Omega = 400$ (図 6 右および図 7 右下) の例の $t = 1$ (左), 3 (中), 5 (右) について表示. 南極点を中心とする正射図法で, 緯線経線は 30 度毎. それぞれの右側の曲線は帯状平均した帯状角運動量.

- Kraichnan, R.H., 1967: Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **10**, 1417–1423.
- Leith, C.E., 1968: Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **11**, 671–673.
- McWilliams, J.C., 1984: The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, **146**, 21–43.
- Nozawa, T. and S. Yoden, 1997a: Formation of zonal band structure in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere. *Phys. Fluids*, **9**, 2081–2093.
- and ———, 1997b: Spectral anisotropy in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere. *Phys. Fluids*, **9**, 3834–3842.
- Rhines, P.B., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.*, **69**, 417–443.
- , 1998: Rossby waves and the polar vortex. <http://www.ocean.washington.edu/people/staff/lindahl/rossby.html>.
- Vallis G.K. and M.E. Multrad, 1993: Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1346–1362.
- Williams, G.P., 1978: Planetary circulations: 1. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1399–1426.
- 余田 成男・山田 道夫・石岡 圭一, 1990: ライブラリ・プログラムの紹介 (85) —スペクトル法による球面上の流体方程式の数値解法—. 京都大学大型計算機センター広報, **23**, 283–290.
- Yoden, S. and M. Yamada, 1993: A numerical experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 631–643.