

Schläfli 関数の反復積分表示

東大 敬養学部 青本和彦

§1. S^n を n 次元の単位球 $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$ とし, $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$ を原点を通る一般の位置にある $(n+1)$ 個の超平面連とする; $f_j = 0$ を S_j の方程式とし $f_1 \geq 0, \dots, f_{n+1} \geq 0$ によって定義される単体を Δ , $\langle ij \rangle$ を S_i と S_j との面角とする. 時 Δ の体積 V は積分

$$\int_{\Delta} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$$

によって与えられ これを $a_{ij} = -\cos \langle ij \rangle$ の関数と考える時 Schläfli 関数と云われる. $\Delta(\varepsilon_1 i_1, \dots, \varepsilon_p i_p)$ 又は $V(\varepsilon_1 i_1, \dots, \varepsilon_p i_p)$ ($1 \leq p \leq n+1, \varepsilon_j = \pm 1$) は S^n の中の不等式 $\varepsilon_1 f_{i_1} \geq 0, \dots, \varepsilon_p f_{i_p} \geq 0$ によって定義される領域 又は その体積を表わすとすれば 次の Gauss-Bonnet 定理 が成り立つ.

Prop. 1 n 奇数 として

$$\frac{(n-1)}{2} |S^n| = \sum_{\nu=2}^{n-1} \sum_{i_1 < \dots < i_\nu} (-1)^\nu V(i_1, i_2, \dots, i_\nu)$$

又 n 偶数 として

$$\frac{(n-1)}{2} |S^n| = \sum_{\nu=2}^n \sum_{i_1 < \dots < i_\nu} (-1)^\nu V(i_1, i_2, \dots, i_\nu) - 2 V(1, 2, \dots, n+1).$$

この Prop. によつて $V(\varepsilon_1 i_1, \dots, \varepsilon_p i_p)$ は すなわち S^n の体積 $|S^n|$, $V(i_j)$, $V(i_1 i_2 i_3 i_4)$, $\dots$, $V(i_1 \dots i_{2\nu})$ $\nu = [\frac{n+1}{2}]$ の線型結合であることがわかる.

§2. A は 対称 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n+1} \\ & & 1 & \vdots \\ & & & a_{nn+1} \\ a_{n+11} & \dots & a_{n+1n} & 1 \end{pmatrix}$$

を表わすとして $D(\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ j_1 & \dots & j_p \end{smallmatrix})$ は $i_1, \dots, i_p$ 行 $j_1, \dots, j_p$ 列の小行列式, $D(i_1 \dots i_p)$ は $D(\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ i_1 & \dots & i_p \end{smallmatrix})$, $D(12 \dots n+1) = D$ とおく.

$I = \{i_1, \dots, i_p\}$ として $|I| = p$ とおく.

$\Delta^*(i_1, \dots, i_p)$ を Δ に含まれる $S_{i_1, \dots, i_p}$:

$f_{i_1} = 0, \dots, f_{i_p} = 0$ によって定義される部分複体とし $V^*(i_1, \dots, i_p)$ は $\Delta^*(i_1, \dots, i_p)$ の体積とする. この時 Schläfli の公式

$$dV = \sum_{i < j} V^*(i, j) d\langle i, j \rangle$$

が知られている.

今から n を奇数として $n = 2V - 1$ とおく.

T を 3角行列

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ t_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_{n+1,1} & t_{n+1,2} & & t_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

$t_{22} > 0, \dots, t_{n+1,n+1} > 0$ で $T^t T = A$ によって定義される一意のものとする. すると

$$\langle 1, 2 \rangle = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{-t_{21} + i t_{22}}{-t_{21} - i t_{22}} \right)$$

Schläfli の公式 を $V^*(I)$ に適用して

$$dV^*(I) = \sum_{j_1 < j_2} V^*(I, (j_1 j_2)) d\langle \overset{I}{j_1 j_2} \rangle$$

$$I \cap (j_1 j_2) = \emptyset$$

ここに $\langle \overset{I}{j_1 j_2} \rangle$ は $\angle^*(I)$ において見られる

S_{j_1} と S_{j_2} との面角とする. およそ

$$\langle \overset{12}{34} \rangle = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{-t_{43} + i t_{44}}{-t_{43} - i t_{44}} \right)$$

$$\langle \overset{12 \dots 2\mu-3 \ 2\mu-2}{2\mu-1, 2\mu} \rangle = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{-t_{2\mu, 2\mu-1} + i t_{2\mu, 2\mu}}{-t_{2\mu, 2\mu-1} - i t_{2\mu, 2\mu}} \right)$$

($0 \leq \mu \leq \nu-1$). これは A の小行列式達を用いて表示され V は反復積分表示となる.

[記号] I と J を添字集合 $I = (i_1, \dots, i_p)$
 $J = (i_1, \dots, i_p, i_{p+1}, i_{p+2})$ として 1次型式

$$\frac{1}{2i} d \log \left(\frac{-D \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p & i_{p+1} \\ i_1 & \dots & i_p & i_{p+2} \end{pmatrix} + i \sqrt{D(I)D(J)}}{-D \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p & i_{p+1} \\ i_1 & \dots & i_p & i_{p+2} \end{pmatrix} - i \sqrt{D(I)D(J)}} \right)$$

を $\omega(\frac{I}{J})$ とおく.

(定義) $\mathcal{X}$ を A を変数とする複素アフィン空間とし $\mathcal{X}_{i_1 \dots i_p}$ を $D(i_1 i_2 \dots i_p) = 0$ によって定義される因子とする. $\hat{\mathcal{X}}$ を $\mathcal{X}_{i_1 i_2 \dots i_{2\mu}}$ ($1 \leq \mu \leq \nu$) で分岐する $\sqrt{D(i_1 i_2 \dots i_{2\mu})}$ を一意化する $2^{(2^n-1)}$ 次の $\mathcal{X}$ 上の被覆空間とする. π を $\hat{\mathcal{X}}$ から $\mathcal{X}$ への全射とする. すると $\omega(\frac{I}{J})$ ($|I| = \text{even}$) は $\hat{\mathcal{X}}$ の log poles の 1-冊型式で 極は ∞ 及び $\pi^{-1}(\mathcal{X}_{i_1 \dots i_{2\mu-1}})$. $M = \hat{\mathcal{X}} - \bigcup_{\substack{i_1 < \dots < i_{2\mu-1} \\ 1 \leq \mu \leq \nu}} \pi^{-1}(\mathcal{X}_{i_1 \dots i_{2\mu-1}}) \cup \pi^{-1}(\infty)$ とおき $\Omega(M; p, q)$ は p を始点, q を終点とする連続曲線の空間 (道空間) とする. このとき $\omega_1, \dots, \omega_m$ を任意のそれぞれ l_1 次, $\dots$, l_m 次 M 上の微分型式として m 次反復積分

$$\int \omega_1 \omega_2 \dots \omega_m$$

は $\Omega(M; p, q)$ 上の $l_1 + \dots + l_m - m$ 次微分型式として定義される (Chen).

この状況のもとに

[定理]

$$V = \sum_{(I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_\nu)} \sum_{\sigma=0}^{\nu} \int_E^A \omega\left(\frac{I_0}{I_1}\right) \omega\left(\frac{I_1}{I_2}\right) \dots \omega\left(\frac{I_{\sigma-1}}{I_\sigma}\right).$$

$$\frac{|S^{n-2\sigma}|}{2^{n+1-2\sigma}}, \quad \text{ここで } |S^{-1}|=1, \quad I_0, I_1, \dots, I_\nu$$

は i) $|I_0|=0, |I_1|=2, \dots, |I_\nu|=2\nu$ ii)

$I_0 = \phi \subset I_1 \subset \dots \subset I_\nu$ をみたす添字集合全体にわたる. V は $\Omega(M; E, *)$ 上の関数だが実はその homotopy 類にかよらない. この事は等式 $(|I|+4=|J|, I \subset J \text{ に対して})$

$$\sum_{\substack{|K|=|I|+2 \\ I \subset K \subset J}} \omega\left(\frac{I}{K}\right) \wedge \omega\left(\frac{K}{J}\right) = 0$$

からもわかる.

Poincaré, Laplace-Danilowski にならってこれらの関数を“超 log”と呼ぶ. V は ν -次の超 log である.

§3. V の $\wedge$ キ級数展開

V は 又

$$V = (n+1) \int_{\substack{f_1 \geq 0, \dots, f_{n+1} \geq 0 \\ 1 \geq x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$$

と書ける. B を $K^{-1} A^{-1} K^{-1}$ により
定義される行列とする. ここで K は対角行列で
その (i,i) 成分は $\sqrt{\frac{D(1 \dots i-1, i+1 \dots n+1)}{D(1 \dots i, \dots i, \dots n+1)}}$.

この時

[定理]

$$\frac{2^{n+1} D}{n+1} V = \sum_{\sigma_{ij} \geq 0} \frac{\pi (-2b_{ij})^{\sigma_{ij}}}{\prod_{i < j} \sigma_{ij}!}.$$

$$\cdot \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \Gamma\left(\frac{\sigma_{1k} + \dots + \sigma_{k,k} + \sigma_{k,k+1} + \dots + \sigma_{k,n+1}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + 1\right)}$$

が成立し 右辺は収束する. これは一般化した
超幾何関数で Mellin-Sato 型と
呼んでおくことにする.

最後に 素朴な 質問を掲げておくことにする。
 $\log$ は $n=1$ の V の体積 を表示するに用いられ
 その逆は $\exp$ であった。それは又 加法公式 による
 特徴づけられるものでもある。 $n>1$ の場合
 対応する 加法公式 とは 何か？ 又 その逆とは
 どんな意味合いのものであろうか？

$$\log \xleftrightarrow{\text{逆}} \exp$$

$$\text{hyper log} \xleftrightarrow{\text{逆}} \text{hyper exp} ?$$

$$\text{Abel integral} \xleftrightarrow{\text{逆}} \mathcal{D}\text{-funct.}$$

.....

[文献]

① K.T. Chen , Iterated integrals of
 differential forms and loop space homology,
 Ann. of Math. 97(1973), 217-246

② ——— , Iterated integrals, funda-
 mental groups and covering spaces, Trans.
 Amer. Math. Soc. 206(1975), 83-98

③ H.S.M. Coxeter, The functions of

Schläfli and Lobachevsky, *Quart. J. Math.* 6 (1935), 13-29

© S. Itaka Logarithmic forms of algebraic varieties, to appear

© H. Poincaré, Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de géométrie, *Comptes rendus T. 140* (1905), 113-117

© M. Sato, Singular orbits in prehomogeneous vector spaces, *Lec. Notes at Univ. of Tokyo*, 1972.

© L. Schläfli, On the multiple integral $\int \int \dots \int dx dy \dots dz$ whose limits are

$P_1 = ax + by + \dots + hz > 0$, $P_2 > 0, \dots, P_n > 0$,
and $x^2 + y^2 + \dots + z^2 < 1$, *Quart. J. Math.* 3 (1860), 54-68, 97-108.