

折り紙ユニットで作る多面体のグラフ論的考察

弘前大学 大学院 理工学研究科 南部 友見 (Tomomi Nambu)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

弘前大学 大学院 理工学研究科 金 正道 (Masamichi Kon)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概要

1 枚の折り紙から 1 つのユニットを作成し、いくつかのユニットを組み合わせて多面体を作成する方法（折り方と組み合わせ方）がいくつかある。本稿では、ある折り方によって作成されるユニットを考え、そのユニットをいくつか組み合わせて作成される多面体の折り紙の色による配色をグラフ論的に考察する。

1. 折り紙ユニットで作る多面体

図 1 のように折り紙で作成したものをユニットと呼ぶ。いくつかのユニットを図 2 のように差し込んで組み合わせていくと、図 3 に示すような 4 種類の多面体 U_3, U_6, U_{12}, U_{30} が作成できる¹。多面体 U_3, U_6, U_{12}, U_{30} を作成するために必要なユニットの数はそれぞれの添え字 3, 6, 12, 30 である。

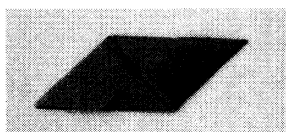


図 1 ユニット

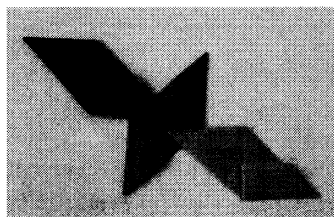


図 2 ユニットの差し込み方

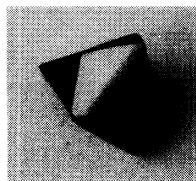
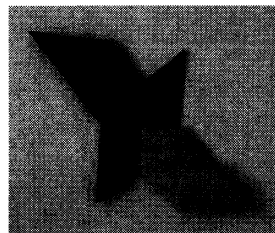


図 3-1 U_3

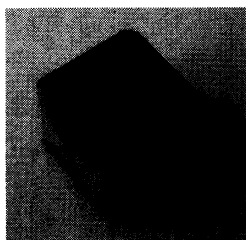


図 3-2 U_6

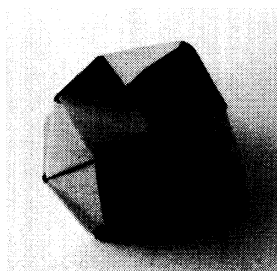


図 3-3 U_{12}

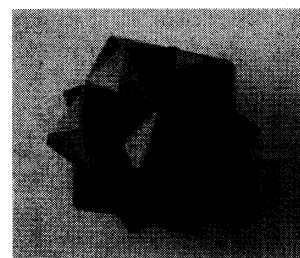


図 3-4 U_{30}

図 3 いくつかのユニットによって作成された多面体

¹ユニットは他にもいくつか種類がある。本稿で扱うユニットは、菌部光伸によって 1960 年代考案され「そのべ式ユニット」とよばれ、シンプルな折り方ながら応用範囲が広く、ユニット折り紙の普及のきっかけになった。折り方は、<http://www1.odn.ne.jp/asobo/4121-0.htm> 参照。

本稿では、図3における多面体 U_{30} のみを考える。多面体 U_{30} に使用されている 30 個のユニットに 1 から 30 まで番号を付け

$$V_{30} = \{1, 2, \dots, 30\}$$

とする。 $i, j \in V_{30}$ に対して、図2のように、ユニット i をユニット j に差し込んでいる状態を $i \rightarrow j$ で表す。多面体 U_{30} のユニットの組み合わせ方において、任意の $i, j \in V_{30}$ に対して

$$i \rightarrow j \quad \text{and} \quad j \rightarrow i \tag{1}$$

の場合はない。多面体 U_{30} に対して次の問題1および2を考える。

問題1

同じ色のユニットを同じ色の別のユニットに差し込まないように多面体 U_{30} を作成するためには、最低何色の色が必要か。ただし、使用する同一色の折り紙の枚数に制限はないものとする。

問題2

問題1で求めた色の数を使用した場合、同じ色のユニットを同じ色の別のユニットに差し込まないように多面体 U_{30} を作成するときに現れる模様をすべて列挙せよ。ただし、同一色の折り紙の枚数に制限はないものとする。また、色の入れ換えや回転によって一致する模様は同一の模様とみなす。

問題2において、「すべての模様を列挙する」ことは困難であると予想されるが、「できるだけ列挙する」または「どこまで列挙可能か」という問題であると解釈する。

問題1も2もユニットの数が比較的少なければ直接折り紙で試行錯誤して考えることも可能であるが、ユニットの数が多ければ（少なくなければ）多くの時間が必要になり困難になる。そこで、グラフを用いて問題1および2を考える。本稿で用いるグラフ理論に関する用語や記号はすべて [2] に従う。

2. 考察

多面体 U_{30} に対して、無向グラフ $G_{30} = (V_{30}, E_{30})$ を考える。ここで、 $i, j \in V_{30}$ に対して

$$\{i, j\} \in E_{30} \Leftrightarrow i \rightarrow j \text{ or } j \rightarrow i$$

であり、 $\{i, j\}$ は i と j の非順序対を表す。図3の多面体 U_{30} に使用されている 30 個のユニットへの 1 から 30 までの番号の付け方によって E_{30} は変わるが、実際に行ってみた番号の付け方の 1 つを固定して考える。その番号の付け方に対して、次のような E_{30} が得られた。

$$\begin{aligned}
E_{30} = & \{ \{1, 3\}, \{1, 13\}, \{2, 1\}, \{2, 8\}, \{3, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 3\}, \{4, 7\}, \\
& \{5, 4\}, \{5, 16\}, \{6, 4\}, \{6, 9\}, \{7, 6\}, \{7, 19\}, \{8, 6\}, \{8, 10\}, \\
& \{9, 8\}, \{9, 22\}, \{10, 2\}, \{10, 12\}, \{11, 10\}, \{11, 14\}, \{12, 11\}, \{12, 24\}, \\
& \{13, 11\}, \{13, 15\}, \{14, 13\}, \{14, 26\}, \{15, 1\}, \{15, 17\}, \{16, 15\}, \{16, 18\}, \\
& \{17, 16\}, \{17, 27\}, \{18, 5\}, \{18, 20\}, \{19, 18\}, \{19, 21\}, \{20, 19\}, \{20, 28\}, \\
& \{21, 7\}, \{21, 23\}, \{22, 21\}, \{22, 24\}, \{23, 22\}, \{23, 30\}, \{24, 9\}, \{24, 25\}, \\
& \{25, 12\}, \{25, 29\}, \{26, 25\}, \{26, 27\}, \{27, 14\}, \{27, 28\}, \{28, 17\}, \{28, 30\}, \\
& \{29, 23\}, \{29, 26\}, \{30, 20\}, \{30, 29\} \}
\end{aligned}$$

よって、 $G_{30} = (V_{30}, E_{30})$ は図 4 のようになる。

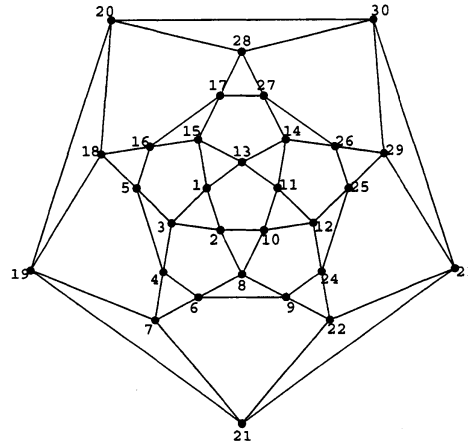


図 4 多面体 U_{30} に対応する無向グラフ $G_{30} = (V_{30}, E_{30})$

問題 1

問題 1 は、グラフ G_{30} の彩色数 $\chi(G_{30})$ を求める点彩色の問題と同値になる ([2])。まず、グラフ G_{30} は 1-彩色も 2-彩色も可能ではないことが容易にわかる。次に、(相異なる) 3 色を α, β, γ とし、グラフ G_{30} が 3-彩色可能かどうかを、点 1 に塗る色を α と固定して、可能な彩色をすべて列挙する。ここで、表 1 が得られる。

表1 グラフ G_{30} の 3-彩色

点 \ 彩色	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α
2	γ	β	γ	β	β	γ	γ	γ	γ	β	γ	β	γ	β	β	β	β	γ	β	γ
3	β	γ	β	γ	γ	β	β	β	β	γ	β	γ	β	γ	γ	γ	γ	β	γ	β
4	γ	α	α	α	β	γ	α	α	α	α	γ	β	γ	β	α	α	β	α	α	α
5	α	β	γ	β	α	α	γ	γ	γ	β	α	α	α	α	β	β	α	γ	β	γ
6	α	γ	β	γ	γ	β	γ	β	γ	β	α	α	β	γ	β	β	α	γ	β	γ
7	β	β	γ	β	α	α	β	γ	β	γ	β	γ	α	α	γ	γ	γ	β	γ	β
8	β	α	α	α	α	α	β	α	α	α	β	γ	α	α	γ	γ	γ	β	α	α
9	γ	β	γ	β	β	γ	α	γ	β	γ	γ	β	γ	β	α	α	β	α	γ	β
10	α	γ	β	γ	γ	β	α	β	β	γ	α	α	β	γ	α	α	α	α	γ	β
11	β	α	γ	β	β	γ	γ	α	α	α	β	γ	α	α	β	β	γ	γ	α	α
12	γ	β	α	α	α	α	β	γ	γ	β	γ	β	γ	β	γ	γ	β	β	β	γ
13	γ	β	β	γ	γ	β	β	γ	β	γ	γ	β	β	γ	γ	γ	β	β	β	γ
14	α	γ	α	α	α	α	α	β	γ	β	α	α	γ	β	α	α	α	α	γ	β
15	β	γ	γ	β	β	γ	γ	β	γ	β	β	γ	γ	β	β	β	β	γ	γ	β
16	γ	α	α	α	γ	β	α	α	β	γ	γ	β	β	γ	γ	α	β	β	α	α
17	α	β	β	γ	α	α	β	γ	α	α	α	α	α	α	α	γ	α	α	β	γ
18	β	γ	β	γ	β	γ	β	β	α	α	β	γ	γ	β	α	γ	γ	α	γ	β
19	α	α	α	α	γ	β	α	α	γ	β	γ	β	β	γ	β	α	α	γ	β	γ
20	γ	β	γ	β	α	α	γ	γ	β	γ	α	α	α	α	γ	β	β	β	α	α
21	γ	γ	β	γ	β	γ	γ	β	α	α	α	α	γ	β	α	β	β	α	α	α
22	α	α	α	α	α	α	β	α	γ	β	β	γ	β	γ	γ	γ	α	β	β	γ
23	β	β	γ	β	γ	β	α	γ	β	γ	γ	β	α	α	β	α	γ	γ	γ	β
24	β	γ	β	γ	γ	β	γ	β	α	α	α	α	α	α	β	β	γ	γ	α	α
25	α	α	γ	β	β	γ	α	α	β	γ	β	γ	β	γ	α	α	α	α	γ	β
26	β	β	β	γ	γ	β	β	γ	α	α	γ	β	α	α	β	γ	γ	γ	β	γ
27	γ	α	γ	β	β	γ	γ	α	β	γ	β	γ	β	γ	γ	β	β	β	α	α
28	β	γ	α	α	γ	β	α	β	γ	β	γ	β	γ	β	β	α	γ	γ	γ	β
29	γ	γ	α	α	α	α	γ	β	γ	β	α	α	γ	β	γ	β	β	β	α	α
30	α	α	β	γ	β	γ	β	α	α	α	β	γ	β	γ	α	γ	α	α	β	γ

よって、グラフ G_{30} は 3-彩色可能であることがわかる。ゆえに、 $\chi(G_{30}) = 3$ 。したがって、問題1の答えは、「最低3色必要である」となる。表1より、列挙されたどの彩色も色 α, β, γ をそれぞれ 10 回使用していることもわかる。

問題2

問題1より、(相異なる) 3 色を使用する場合を考える。

まず、多面体 U_{30} の色を無視して回転させて一致する場合を考える。多面体 U_{30} を回転させ、回転前と回転後が一致する場合、回転前の各ユニット i の位置に回転後のあるユニット j の位置が一致する。ユニットの番号のそのような対応をすべて列挙すると表2が得られる。

表2 多面体 U_{30} の回転によるユニットの対応表

回転前 \ 対応	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10
2	2	15	3	10	4	1	5	6	3	18	8	7	4	21	2	9	6	24	11	8
3	3	13	1	8	5	2	3	7	4	16	9	4	6	19	10	6	8	22	12	2
4	4	14	15	9	18	10	1	21	6	17	24	5	8	20	11	7	2	23	25	3
5	5	11	13	6	16	8	2	19	7	15	22	3	9	18	12	4	10	21	24	1
6	6	27	16	24	19	11	15	22	8	28	12	18	2	30	13	21	3	29	26	4
7	7	26	17	22	20	12	13	23	9	27	25	16	10	28	14	19	1	30	29	5
8	8	17	5	12	7	13	16	9	2	20	10	19	3	23	1	22	4	25	14	6
9	9	28	18	25	21	14	17	24	10	30	11	20	1	29	15	23	5	26	27	7
10	10	16	4	11	6	15	18	8	1	19	2	21	5	22	3	24	7	12	13	9
11	11	5	6	13	8	16	19	2	15	7	3	22	18	9	4	12	21	10	1	24
12	12	18	7	14	9	17	20	10	13	21	1	23	16	24	5	25	19	11	15	22
13	13	3	8	1	2	5	7	3	16	4	4	9	19	6	6	10	22	8	2	12
14	14	4	9	15	10	18	21	1	17	6	5	24	20	8	7	11	23	2	3	25
15	15	2	10	3	1	4	6	5	18	3	7	8	21	4	9	2	24	6	8	11
16	16	10	11	4	15	6	8	18	19	1	21	2	22	5	24	3	12	7	9	13
17	17	8	12	5	13	7	9	16	20	2	19	10	23	3	22	1	25	4	6	14
18	18	12	14	7	17	9	10	20	21	13	23	1	24	16	25	5	11	19	22	15
19	19	25	27	21	28	24	11	30	22	14	29	15	12	17	26	18	13	20	23	16
20	20	24	26	19	27	22	12	28	23	11	30	13	25	15	29	16	14	18	21	17
21	21	29	28	23	30	25	14	29	24	26	26	17	11	27	27	20	15	28	30	18
22	22	30	20	29	23	26	27	25	12	29	14	28	13	26	17	30	16	27	28	19
23	23	23	30	30	29	29	26	26	25	25	27	27	14	14	28	28	17	17	20	20
24	24	20	19	26	22	27	28	12	11	23	13	30	15	25	16	29	18	14	17	21
25	25	19	21	27	24	28	30	11	14	22	15	29	17	12	18	26	20	13	16	23
26	26	7	22	17	12	20	23	13	27	9	16	25	28	10	19	14	30	1	5	29
27	27	6	24	16	11	19	22	15	28	8	18	12	30	2	21	13	29	3	4	26
28	28	9	25	18	14	21	24	17	30	10	20	11	29	1	23	15	26	5	7	27
29	29	21	23	28	25	30	29	14	26	24	17	26	27	11	20	27	28	15	18	30
30	30	22	29	20	26	23	25	27	29	12	28	14	26	13	30	17	27	16	19	28

回転前 \ 対応	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18	18	19	19	20	20
2	13	12	10	25	1	14	11	27	16	13	17	5	15	28	16	19	20	7	18	30
3	14	10	11	24	15	11	13	26	17	1	15	18	16	27	5	20	18	21	19	28
4	27	8	13	22	16	12	1	29	28	2	13	19	5	26	3	30	16	22	7	27
5	26	2	14	9	17	10	15	25	27	3	1	20	18	14	4	28	5	23	21	17
6	17	9	1	23	5	25	2	30	20	10	14	7	3	29	1	23	17	9	4	26
7	28	6	15	21	18	24	3	23	30	8	11	21	4	25	2	29	15	24	6	14
8	15	24	2	29	3	26	10	28	18	11	27	4	1	30	15	21	28	6	5	29
9	16	22	3	30	4	29	8	20	19	12	26	6	2	23	13	22	27	8	3	25
10	1	25	8	26	2	27	12	17	5	14	28	3	13	20	17	7	30	4	16	23
11	2	26	9	14	10	17	25	15	3	27	20	1	14	18	28	4	23	5	17	21
12	3	29	6	27	8	28	24	16	4	26	30	2	11	19	27	6	29	3	15	22
13	10	14	24	11	11	15	26	13	1	17	18	15	27	16	20	5	21	18	28	19
14	8	27	22	13	12	16	29	1	2	28	19	13	26	5	30	3	22	16	27	7
15	12	13	25	10	14	1	27	11	13	16	5	17	28	15	19	16	7	20	30	18
16	25	1	26	8	27	2	17	12	14	5	3	28	20	13	7	17	4	30	23	16
17	24	15	29	2	26	3	28	10	11	18	4	27	30	1	21	15	6	28	29	5
18	29	3	27	6	28	8	16	24	26	4	2	30	19	11	6	27	3	29	22	15
19	30	4	17	7	20	9	5	22	29	6	10	23	7	12	8	26	1	25	9	13
20	23	5	28	4	30	6	18	9	25	7	8	29	21	10	9	14	2	26	24	1
21	20	7	16	19	19	22	4	21	23	9	12	22	6	24	10	25	13	12	8	11
22	18	21	5	20	7	23	6	19	21	24	25	9	8	22	11	24	14	10	2	12
23	19	19	18	18	21	21	7	7	22	22	24	24	9	9	12	12	11	11	10	10
24	5	23	4	28	6	30	9	18	7	25	29	8	10	21	14	9	26	2	1	24
25	4	30	7	17	9	20	22	5	6	29	23	10	12	7	26	8	25	1	13	9
26	6	28	21	15	24	18	23	3	8	30	21	11	25	4	29	2	24	15	14	6
27	9	17	23	1	25	5	30	2	10	20	7	14	29	3	23	1	9	17	26	4
28	22	16	30	3	29	4	20	8	12	19	6	26	23	2	22	13	8	27	25	3
29	7	20	19	16	22	19	21	4	9	23	22	12	24	6	25	10	12	13	11	8
30	21	18	20	5	23	7	19	6	24	21	9	25	22	8	24	11	10	14	12	2

回転前 \ 対応	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	30
2	22	19	23	9	21	29	12	22	24	26	29	14	26	17	27	20	30	25	23	28
3	23	7	21	24	22	30	25	9	12	29	25	27	14	28	17	30	23	26	29	20
4	29	4	19	12	9	28	26	6	10	30	24	17	11	20	15	23	21	14	25	18
5	30	6	7	25	24	20	29	8	11	23	12	28	13	30	16	29	22	27	26	19
6	25	5	20	10	6	27	14	7	8	28	22	15	12	18	13	21	19	11	24	16
7	26	3	18	11	8	17	27	4	2	20	9	16	10	19	1	22	7	13	12	5
8	24	18	30	8	7	26	11	21	9	27	23	13	25	16	14	19	20	12	22	17
9	12	16	28	2	4	14	13	19	6	17	21	1	24	5	11	7	18	10	9	15
10	9	20	29	6	19	25	10	23	22	14	30	11	29	15	26	18	28	24	21	27
11	6	30	25	7	20	24	8	29	23	11	28	12	30	13	29	16	27	22	19	26
12	8	28	26	4	18	12	2	30	21	13	20	10	23	1	25	5	17	9	7	14
13	7	23	24	21	30	22	9	25	29	12	27	25	28	14	30	17	26	23	20	29
14	4	29	12	19	28	9	6	26	30	10	17	24	20	11	23	15	14	21	18	25
15	19	22	9	23	29	21	22	12	26	24	14	29	17	26	20	27	25	30	28	23
16	20	9	6	29	25	19	23	10	14	22	11	30	15	29	18	26	24	28	27	21
17	18	24	8	30	26	7	21	11	27	9	13	23	16	25	19	14	12	20	17	22
18	28	8	4	26	12	18	30	2	13	21	10	20	1	23	5	25	9	17	14	7
19	27	2	5	14	10	16	28	3	1	19	8	18	2	21	3	24	6	15	11	4
20	17	10	3	27	11	5	20	1	15	7	2	19	3	22	4	12	8	16	13	6
21	14	1	16	13	2	15	17	5	3	18	6	5	8	7	2	9	4	1	10	3
22	11	15	17	1	3	13	15	18	4	16	7	3	9	4	10	6	5	2	8	1
23	13	13	15	15	1	1	16	16	5	5	4	4	6	6	8	8	3	3	2	2
24	10	17	27	3	5	11	1	20	7	15	19	2	22	3	12	4	16	8	6	13
25	2	27	14	5	16	10	3	28	19	1	18	8	21	2	24	3	15	6	4	11
26	3	26	11	18	17	8	4	27	20	2	16	9	19	10	22	1	13	7	5	12
27	5	25	10	20	27	6	7	14	28	8	15	22	18	12	21	13	11	19	16	24
28	16	12	2	28	14	4	19	13	17	6	1	21	5	24	7	11	10	18	15	9
29	1	14	13	16	15	2	5	17	18	3	5	6	7	8	9	2	1	4	3	10
30	15	11	1	17	13	3	18	15	16	4	3	7	4	9	6	10	2	5	1	8

表1における彩色 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17 の多面体 U_{30} はそれぞれある色の置換をした後に表2におけるある対応による回転によって、色も考慮したうえで彩色 1 の多面体 U_{30} に一致する。表3は、どのような色の置換をした後に表2におけるどのような対応による回転によって一致するかを表している。

表3 色も考慮して彩色 1 の多面体 U_{30} に一致する色の置換と回転

彩色 (表1の彩色)	色の置換	回転 (表2の対応)
2	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)$	49
5	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)$	9
6	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \gamma, \beta)$	9
7	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \gamma, \beta)$	31
8	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \gamma, \beta)$	49
9	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \gamma, \beta)$	21
10	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)$	21
16	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)$	31
17	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \gamma, \beta)$	37

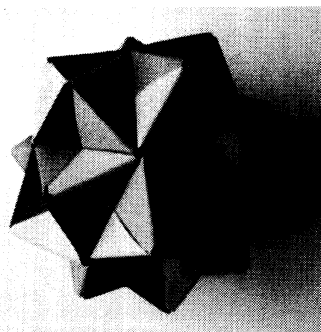
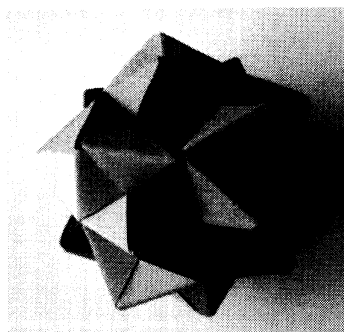
同様に、彩色 4, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20 の多面体 U_{30} は彩色 3 の多面体 U_{30} に一致する。表4は、どのような色の置換をした後に表3におけるどのような対応による回転によって一致するかを表している。

表 4 色も考慮して彩色 3 の多面体 U_{30} に一致する色の置換と回転

彩色 (表 1 の彩色)	色の置換	回転 (表 2 の対応)
4	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \gamma, \beta)$	1
11	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \gamma, \beta)$	11
12	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)$	11
13	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)$	15
14	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \gamma, \beta)$	15
15	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \gamma, \beta)$	49
18	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)$	49
19	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \gamma, \beta)$	7
20	$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)$	7

最後に、彩色 1 の多面体 U_{30} と彩色 3 の多面体 U_{30} はどのような色の置換とどのような回転によっても一致しないことが確かめらる。

ゆえに、「彩色 1 の多面体 U_{30} と彩色 3 の多面体 U_{30} 」となる。

図 5-1 彩色 1 の多面体 U_{30} 図 5-2 彩色 3 の多面体 U_{30} 図 5 多面体 U_{30} に現れる模様 (3 色使用)

3. 結論

1 枚の折り紙から 1 つのユニットを作成し、いくつかのユニットを組み合わせることで多面体を作成する方法（折り方と組み合わせ方）がいくつかある。本稿では、ある折り方によって作成されるユニットを考え、そのユニットをいくつか組み合わせることで作成される多面体 U_{30} （図 3）の折り紙の色による配色をグラフ論的に考察した。

まず問題 1 として、同じ色のユニットを同じ色の別のユニットに差し込まないように多面体 U_{30} を作成するためには、最低何色の色が必要かを考えた。その答えとして、「最低 3 色必要である」が得られた。

次に問題 2 として、同じ色のユニットを同じ色の別のユニットに差し込まないように多面体 U_{30} を作成するときに見える模様をすべて列挙することを考えた。色を 3 色使用した場合、色の入れ替えや回転によって一致する模様は同一の模様とみなすと 2 通り（図 5）得られることを示した。

参考文献

- [1] 南部友見・金正道，折り紙ユニットで作る多面体の配色について，商経学叢（掲載予定）
- [2] R. J. ウィルソン（西関隆夫・西関裕子訳），グラフ理論入門（原書第 4 版），近代科学社, 2001