

回転同心円筒間の前乱流状態

電気通信大学 大路通雄 (Michio Ohji)

Today we cannot see that the water flow equations contain such things as the barber pole structure of turbulence that one sees between rotating cylinders.

— The Feynman Lectures on Physics, Vol.2.

1. はじめに

回転同心円筒間の流れは、その単純な幾何学的構成にも関わらず豊かな物理的内容に富み、特に最近では線スペクトルをもつ規則的なパターンから連続スペクトルをもつカオス状態へ進化する過程との関連で広く注目されている。前者は一般の定義に従えば「層流」に属するが、実際に観察してみると規則的とはいえず現実には極めて複雑多岐な様相を示し、必ずしも層流の通念にそぐわないような印象をうける。そこで、カオスの発生に先立つ変化の諸段階を一括して仮りに「前乱流状態」(pre-turbulent state)と呼ぶことにしよう。

もともと、この問題は前世紀末ニュートン粘性式の検証や粘性率測定のための技術的興味から始まったが、それに続く

夥しい研究の中でも、遠心力不安定の指摘 (Rayleigh 1916)¹⁾、線形安定理論の最初の成功 (Taylor 1923)²⁾、波動攪乱の実験的同定 (Coles 1965)³⁾、変動スファトル進化の観測 (Gollub & Swinney 1975)⁴⁾ は、それぞれ新しい発展への転機として特に重要である。これらを軸とする70年代までの成果は DiPrima と Swinney の展望⁵⁾ に詳しく、その以後にも波動攪乱の変調やさまざまな新しいモードの報告、数値シミュレーションの試み等注目すべき研究が少なくない。しかしながら、これまで最も詳しく調べられてきた外円筒固定の場合についてさえ、現象の記述と理解はなお多分に断片的であり、さらに両円筒回転の場合に対しては殆どか今後に残されているように思われる。

筆者らは、さきに科研費特定研究「乱流現象の解明と制御」の一環として着手した回転同心円筒間の流れの実験を同特定研究の終了後も引続き進めているが、その目標や基本的な問題点は別報^{6,7)} にゆずり、ここでは現在までに得られた結果の一部を引用して、前乱流状態の多様性と複雑化の一端を紹介することとしたい。

2. 実験方法の概要と特徴

実験の関係パラメータを表1に示す.*以下の実験には装置

* 表と図は末尾にまとめた。

Aと装置Bの2種を用いた(図1)。その諸元は表2の通りで、装置Aの特徴は内外両円筒が独立に回転することである。これに対し、装置Bは外円筒固定であるが、上端をフリーにして種々の光学的観測に適するよう設計されている。この工夫によって、全周鏡M(円筒軸に 45° 傾いたリング状の反射面をもつ鏡体)で流れの全周を一度に観察する、内部から照明して映像のコントラストを増す、軸上にフォトダイオードを置いて浮遊トレーサーによる散乱光強度の変動を検出する、などの特色ある実験が可能となった。各装置の工作精度・駆動法その他の詳細については別報^{6,8)}を参照されたい。実験には、回転レイノルズ数を広い範囲に亘って変えるため、粘性率の異なる数種のシリコン油($\nu = 0.65 \sim 30 \text{ cSt}$)を適宜に用いた。流れの可視化は主としてアルミ粉法による。

3. 装置Aによる実験(進化の素描)

この節では、装置Aでの可視化実験に基づいて、両円筒を独立に回転させるときの進化のシナリオを概観する。ただし、内円筒の回転方向を正にとり、原則として初め外円筒の回転を設定した後、内円筒の回転をゆっくり変化した。

3.1. 予備実験

実験の信頼性を確かめるために、先ず本装置においてクエ

ット流が最初に遷移する1次の臨界曲線を $R_i - R_o$ 面上で従来の結果^{2,9)}と比べた(図2)。全体として半径比 η の大きさの順に矛盾なく配列している。特に $\mu=0$ (外円筒静止)の場合に対する1次臨界値は、定量的にも Snyderの実験式(-5/3乗則!)と極めて良く一致した(図3)。¹⁰⁾ また、波動攪乱についてストップウォッチで求めた周回角速度 C_1 の値も妥当である。

3.2. 進化の全般的シナリオ(内外逆回転)

上のように本装置による実験の精度は差当りほぼ十分と思われたので、両円筒の回転数をさらに広く(主として逆向きに)変化させたときに現れる流れの変容を可視化法で観察した。ここでは、既報^{8,11)}との重複を避けて最少限に要約する。

図4は主要パターンの模式図と名称、図5は R_i の増加に伴う進化のシナリオを $R_o(\leq 0)$ の領域別に示した系列図、図6は $\eta=0.75$ に対する逐次遷移の臨界曲線である。大ざっぱにいうと、外円筒回転($\mu \neq 0$)の効果は $|R_o|$ が小さい領域Iでは顕著でないが、外円筒の回転が早い領域IIは、斜めに配列した螺旋状攪乱の出現と周速ゼロの内部界面の存在ではっきりと特徴づけられる。このとき内部界面は流れを内外2層の二重構造に分け、スリット光による断面像でその挙動を観察することができる。領域II'はIとIIとの中間的な性格を帯びるが、他方、外円筒の回転が極めて早くなると(領域III)、層流螺旋

渦流 SVF からいわゆる「床屋の看板柱」(barber pole) 状の乱流帯域渦流 $TZVF$ へ一挙に遷移する。

このように両円筒の回転に伴う前乱流状態の進化は極めて複雑微妙な様相を示すけれども，同一条件で実験をくり返すときの再現性は十分であった。しかし，定量的なデータとしてはなお多くの検討が必要であり，加えて結果の普遍性，半径比，縦横比あるいは履歴への依存性などについてさらに実験を進めたい。現在まで回転両円筒の実験例はまだ極く少ないが，最近図6のDに相当する領域（同方向回転）に対して Anderreckら¹²⁾が新しいパターンの観察を報告している。

4. 装置Bによる実験（外円筒静止）

この実験は，可視化法とスペクトル測定を併用して外円筒静止時の前乱流状態を特に詳しく調べようとするもので，当面の興味を中心は，波動型攪乱 WVF 及びその変調 $MWVF$ に関するさまざまな情報を得ることにある。

4.1. 可視化実験

ジェット流が定常テイラー渦流 TVF に遷移する1次不安定の過程は，ここでも従来の結果とよく一致するが，時として図7のような渦構造の不整 (dislocation) を伴う。¹³⁾ これはすでに Taylor²⁾ によって観察された現象で，一度発生する

と長時間永続し、一旦WVFに遷移させて初めて消失することが多い。その事情はなお不明で、我々の観察では何らかの原因で生じた局所的な螺旋状攪乱に関係するようにも見えるが、今回は深く立入らないこととする。

WVFの状態では、モード・パラメータである周方向の波数 m と進行角速度 C_i (または角周波数 $\omega_i = mC_i$) の決定に図1の全周鏡が極めて有効である。すなわち、波形の全周像が m の値に応じて真円からひずむことを利用し(図8)、 C_i を求めるには刻々ビデオにとってストップウォッチで追えばよい。 C_i が大きいときには、円形に並べた多数の発光ダイオードを順次に点滅させる方法(rotary marker)で波動との同期をとることにより高い精度が得られる。観測された m の値は、回転数のほかその状態を実現するまでの角加速度や流れの履歴にも依存し、波数選択の一般的法則は未だ知られていない。Coles³⁾は同一レイルズ数の下で26種類の安定モードを同定したが、筆者の知る限り追試による確認の報告例はないように思われる。装置Bでは、回転数をゆっくり増すとき $m=3, 4, 5, 6$ が得られ、一般に半径比が1に近づく程 m が大きい傾向であった。また、実験の条件によっては $m=1$ (急加速)、 $m=2$ (強い外乱)のモードも実現する。図9は、 C_i と R_i との関係($\eta=0.89$)を示す。 $C_i(R_i)$ は m の如何に依存せず、 R_i の増加と

共に一定値に漸近する。図10には、装置Bで実測した C_1/Ω_1 の漸近値を King ら¹⁴⁾の結果と比較した。

流れが MWVF に進化すると、モード・パラメータは m と C_1 (または ω_1) に後述の変調指数 k と変調角周波数 ω_2 を加え、少なくとも 4 個となる。次節で示すように k は絶対値が $m/2$ を越えない整数で、その値は全周像の観察から直ちに定められ、一方 ω_2 は、変調波形の再現周期で実測し後出の式(6)を用いて求めることができる。本実験の条件では、 $k=0$ の変調が最も多く現れた。図11は ω_1, ω_2 の測定例で、Gorman ら¹⁵⁾の結果とも良く一致している。

4.2. スペクトル測定

可視化実験と併行して、2節で触れた方式により He-Ne レーザーを光源とする散乱光強度の信号を検出した。その一例を図12に示す。WVF と MWVF の相異は一見して明らかであるが、それらを AD 変換して FFT の操作を行えば図13のような攪乱のパワー・スペクトル (PSD) が得られる。その特徴は、WVF では ω_1 (及びその整数倍 $n\omega_1$) の成分のみが現れること、MWVF では第2の基本成分 ω_2 があって、両者の整数結合 $n\omega_1 \pm g\omega_2$ の項が生じること、 ω_1, ω_2 は R_i の関数であること、 R_i と共に成分数を増しかつ帯域幅が拡大すること、などである。得られたスペクトル列から ω_1, ω_2 を一義的

に定める方法は見出されていないが、差当り最も高いピークを ω_1 , これに次ぐピークを $\omega_2 (< \omega_1)$ の成分と仮定した。このとき, ω_1, ω_2 の値は可視化で求めた図11のそれと殆ど完全に一致する。いうまでもなく, PSD は進化の解析に不可欠なデータであるが, それだけでは (波形は勿論) m と k を求めることが原理上できない。この欠点を補うため、現在2点以上に関する変動相関の利用を検討中である。さらに、今後の課題として熱線流速計やLDVによる流れの計測, 圧力変動を検出する試みなども計画している。

5. 変調波形のシミュレーション

上にみた外円筒静止時における第2周波数 ω_2 の出現が、攪乱波形の変調と関係づけられるようになったのは、漸く数年来のことである。¹⁵⁻¹⁷⁾ 本節では Gorman らが得た結果の要点と筆者らによる波形シミュレーションの試みを紹介する。

5.1. 波形パターンの特徴

以下、円柱座標を実験室系 $\mathcal{L}$ で (r, θ, z) , 角速度 C_1 の回転系 $\mathcal{R}$ で (r, θ', z) , 攪乱波形の方位角並びに時間依存性をそれぞれ $\psi(\theta, t)$, $\psi'(\theta', t)$ とする。すなわち,

$$\psi(\theta, t) \equiv \psi'(\theta', t); \quad \theta' = \theta - C_1 t, \quad C_1 = \omega_1/m. \quad (1)$$

Gorman ら^{15, 16)} は, WVF の進化に伴って振幅変調 (AM) な

いし周波数変調 (FM) が生じることと初めて指摘し, 2枚の平面鏡で展開した可視化像の映画と散乱光のPSDから変調の位相と周波数の間に次の実験的關係式を見出した:

$$\phi'(\theta' + \frac{2\pi}{m}) = \phi'(\theta') + \frac{2\pi k}{m}, \quad (2)$$

$$\omega'_2 = \omega_2 - \frac{k}{m} \omega_1. \quad (3)$$

ここに, $\phi'(\theta')$ は $\mathbb{R}$ で観測される波形の位相角, ω_1 と ω_2 は $\mathbb{L}$, ω'_2 は $\mathbb{R}$ での特性角周波数, k は前出の「変調指数」で,

$$-(\frac{m}{2}-1) \leq k \leq \frac{m}{2} \quad (m: \text{偶}), \quad -\frac{1}{2}(m-1) \leq k \leq \frac{1}{2}(m-1) \quad (m: \text{奇}), \quad (4)$$

の範囲にある整数である。変調指数は変調による隣接波同士の位相差を表し, 波数 m の波には k の異なる m 通りのモードが許される。表3には, $m = 3, 4, 5, 6, 7$ の場合について可能な k の値を示した。

変調された波形は刻々変化するが, $\mathbb{R}$ では時間でごとに同じ形が角度 Θ だけずれた位置で再現し,

$$\psi'(\theta', t + \tau) = \psi'(\theta' - \Theta, t) \quad (5)$$

が成立つ。ここで $\text{Rand}^{(17)}$ は, 回転対称群の考察から

$$\tau = \frac{2\pi S}{m\omega'_2}, \quad (6)$$

$$\Theta = \frac{2\pi n}{m} \quad (7)$$

の関係を導いた。ただし, S は波形パターンの回転対称の回数, n は m と k の組によって定まる整数で, $\Theta/\tau = n/S$ は変調伝播の速さを表す。Gorman らは, MWVF のモードが一

対の整数 $[m, k]$ で一意的に指定されることを示し、図14のようなスケッチを描いた。 $[m, k]$ の代りに3整数の組 $[m, s, n]$ を用いてもよい。彼等は12通りのモードを観測している。^{*}

5.2. 波形パターンのシミュレーション

以上の結果に基づいて、筆者らは波形そのものに対する簡単な定量的表現を試みた。^{8, 11, 19)} すなわち、通信工学における変調理論にならって、モード $[m, k]$ の MWVF に対し R 系で、

$$\psi'(\theta', t) = \Psi \{1 + A \sin(k\theta' - \omega_2 t - \alpha)\} \sin[m\theta' + F \sin(k\theta' - \omega_2 t)] \quad (8)$$

を仮定する。ここに、 Ψ は搬送波の振幅、 A と F はそれぞれ AM と FM の変調度、 α は AM・FM 間の位相差で、何れも定数（より一般には r と z の関数）である。勿論、複素形を用いてもよいが、実験との比較等には実数形の方が取扱いやすい。式(1)によって L 系に移れば、

$$\begin{aligned} \psi(\theta, t) = & \Psi \{1 + A \sin(k\theta - \omega_2 t - \alpha)\} \\ & \times \sin[m\theta - \omega_1 t + F \sin(k\theta - \omega_2 t)]. \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\omega_2 = (k/m)\omega_1 + \omega_2'$ は (3) と一致し、また $\phi(\theta') = k\theta'$ であるから、(2) も正しく満たされていることがわかる（位相角 $m\theta'$ の方は、 θ' が $2\pi/m$ シフトすれば元に戻るので問題にならない）。さらに、 $k \neq 0$ として式(8)に(5)を適用すると、

^{*} 我々は、これと独立に波速のゆらぎから FM の存在を認めたが、そのモードを解析するまでには至らなかった。¹⁸⁾

$kH = \omega_2 t \pmod{2\pi}$ を得るが, これは (6), (7) によって,

$$kn = s \pmod{m} \quad (10)$$

あるいは $(kn - s)/k = \text{整数}$, と書かれる。また, $k=0$ なら

$$\psi'(\theta', t) = \Psi \{1 - A \sin(\omega_2 t + \alpha)\} \sin(m\theta' - F \sin \omega_2 t) \quad (11)$$

となり, 変調は θ' によらない。これらの関係から, 与えられたモード $[m, k]$ に対応する s, n の値が次のルールに従って定められる:

$$\left. \begin{aligned} k=0 \text{ のとき, } & s=m, n=0. \\ k \neq 0 \text{ のとき, } & s=m, |k| \text{ の最大公約数,} \\ & n = \text{合同式(10)を満たす整数のうち, 絶対値最小のもの} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(表3)。図15, 16は, 式(8)が表す波形パターンの例である。

次に, 止系での固定点 ($\theta=0$ として一般性を失わない) における時間的变化をフーリエ級数に展開すれば,

$$\left. \begin{aligned} \psi'(0, t) &= -\Psi \{1 - A \sin(\omega_2 t + \alpha)\} \sin(\omega_1 t + F \sin \omega_2 t) \\ &= -\Psi \sum_{g=-\infty}^{\infty} \{S_g \sin(\omega_1 + g\omega_2)t + C_g \cos(\omega_1 + g\omega_2)t\}; \\ S_g &= J_g(F) - A J_g^+(F) \sin \alpha, \quad C_g = A J_g^-(F) \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

が得られる。ただし, $J_g(F)$ は g 次の第1種ベッセル関数で,

$$\left. \begin{aligned} J_g^+(F) &= \frac{1}{2} [J_{g-1}(F) + J_{g+1}(F)] = \frac{g}{F} J_g(F), \\ J_g^-(F) &= \frac{1}{2} [J_{g-1}(F) - J_{g+1}(F)] = \frac{dJ_g(F)}{dF}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$J_{-g}(F) = (-1)^g J_g(F)$ とおいた。²⁰⁾ 従って, (13) の P S D は

$$P(\omega_1 + g\omega_2) \equiv \langle \psi(0, t)^2 \rangle = \frac{1}{2} \Psi^2 (S_g^2 + C_g^2); \quad g = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (15)$$

$\langle \dots \rangle$ は時間平均, のように $\omega_1 + g\omega_2$ の成分をもつ離散スペクトルとなる。図17はその一例で, $F = 0$ (AMのみ) では上下に各1本現れる側帯波成分が, F と共に次第に数を増して広い周波数帯域に及んで行くことを示している。また, 前述の通り PSD の式 (15) には $[m, k]$ の情報が含まれないが, 相異なる方位角 θ_1 と $\theta_1 + \theta^*$ における変動間の同時相関は,

$$\begin{aligned} C(\theta^*) &= \langle \psi(\theta_1, t) \psi(\theta_1 + \theta^*, t) \rangle \\ &= \sum_{g=-\infty}^{\infty} [P(\omega_1 + g\omega_2)] \cos(m + gk)\theta^* \end{aligned} \quad (16)$$

となるので, 可視化法とは独立に $C(\theta^*)$ の測定から m と k を定める可能性も示唆される。さらに, 搬送波が直流分ないし高調波分を含むときは, 実験結果と同様に整数結合 $p\omega_1 + g\omega_2$ のスペクトル線が生じるであろう。その場合にこれらの諸式を拡張することも難しくない。

今回のシミュレーションは一つの簡単な試行の段階にすぎないが, 定性的には MWVF に関する観測事実の傾向とほぼ合致しており, 定量的な吟味や具体的な応用は, 実験と併行した今後の課題である。

6. おわりに

本稿では, 層流安定理論, 分岐理論, あるいは数値計算等への言及は一切省略した。一般に, どちらかといえば実験先

行の現状であるが，それら理論的研究の発展にも注目すべき重要なものは勿論少なくない。その方面の展望は将来，または別の著者にゆずることとして，この古典的問題に潜む未解決な多様性の一端をとりあえずお伝えできれば幸いである。

終りに，本研究に加って数々の困難な問題に取り組んだ電通大流体工学研究室の諸君による熱心な協力に深謝する。

参考文献

- 1) Lord Rayleigh: *Proc. Roy. Soc. London* A93 (1916) 148.
- 2) G.I. Taylor: *Phil. Trans.* A223 (1923) 289.
- 3) D. Coles: *J. Fluid Mech.* 21 (1965) 385.
- 4) J. P. Gollub & H. L. Swinney: *Phys. Rev. Lett.* 35 (1975) 927.
- 5) R. C. DiPrima & H. L. Swinney: *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, (ed. H. L. Swinney & J. P. Gollub) Springer (1981) 139.
- 6) 塩野谷伸司・藤山周治・大路通雄：第15回乱流シンポジウム報告集(1983)178.
- 7) 大路通雄・鍋島秀喜・塩野谷伸司・藤山周治：特定研究河口湖集会報告集(1983)127.
- 8) 大路通雄：第35回応力連合講演会予稿集(1985)39.
- 9) R. J. Donnelly: *Proc. Roy. Soc. London* A248 (1958) 313.
- 10) H. A. Snyder: *Phys. Fluids* 11 (1968) 1559.
- 11) 大路通雄：第16回乱流シンポジウム報告集(1984)94.
- 12) C. D. Andereck, R. Dickman & H. L. Swinney: *Phys. Fluids* 26 (1983) 1395.

- 13) R.J. Donnelly, K. Park, R. Shaw & W. Walden: *Phys. Rev. Lett.* 44 (1980) 987.
- 14) G.P. King, Y. Li, W. Lee & H.L. Swinney: *J. Fluid Mech.* 141 (1984) 365.
- 15) M. Gorman & H.L. Swinney: *J. Fluid Mech.* 117 (1982) 123.
- 16) M. Gorman, H.L. Swinney & D. Rand: *Phys. Rev. Lett.* 46 (1981) 992.
- 17) D. Rand: *Arch. Rat. Mech. Anal.* 79 (1982) 1.
- 18) 藤井裕司: 電通大物工 1982 年度卒業論文
- 19) M. Ohji, S. Shionoya & K. Amagai: *J. Phys. Soc. Jpn.* 55 (1986) 1032.
- 20) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信: 数学公式 III, 岩波 (1960) 211.

追記

本稿を準備した後で, 下記の新しい文献に接した:

- 21) C.D. Andereck, S.S. Liu & H.L. Swinney: *Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders.* *J. Fluid Mech.* 164 (1986) 155.

表題にある通り, 内外両円筒が独立に回転する場合の広汎な可視化及びスペクトル測定実験の報告である。詳細は未検討であるが, 3.2. でまとめた観察 (図 4 ~ 6) にほぼ近い部分もあるように思われる。

外円筒半径 r_o	外円筒レイノルズ数
内円筒半径 r_i	$R_o = \Omega_o r_o^2 / \nu$
ギャップ幅 $d = r_o - r_i$	内円筒レイノルズ数
ギャップ高さ L	$R_i = \Omega_i r_i^2 / \nu$
半径比 $\eta = r_i / r_o$	ギャップレイノルズ数
縦横比 $\Gamma = L/d$	$R_d = \Omega_i r_i d / \nu = R_i (\frac{1}{\eta} - 1)$
外円筒角速度 Ω_o	テイラー数
内円筒角速度 Ω_i	$T = 4 R_d^2 \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right) \left(1 - \frac{\mu}{\eta^2} \right)$
回転比 $\mu = \Omega_o / \Omega_i$	
動粘性率 ν	

表1. 記号とパラメター

	A		B	
r_o cm	3.00		2.75	
r_i cm	2.25	1.80	2.19	2.48
L cm	31.4		11.0	
d cm	0.75	1.20	0.56	0.27
η	0.75	0.60	0.80	0.90
Γ	41.9	26.2	19.6	40.7
円筒	ガラス		アクリル	

表2. 装置諸元

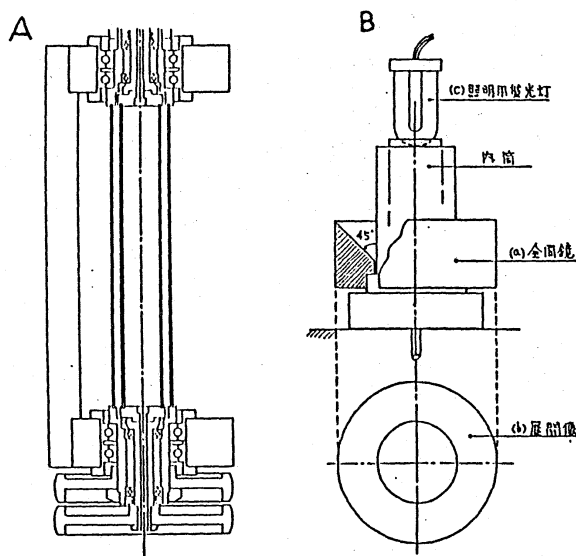
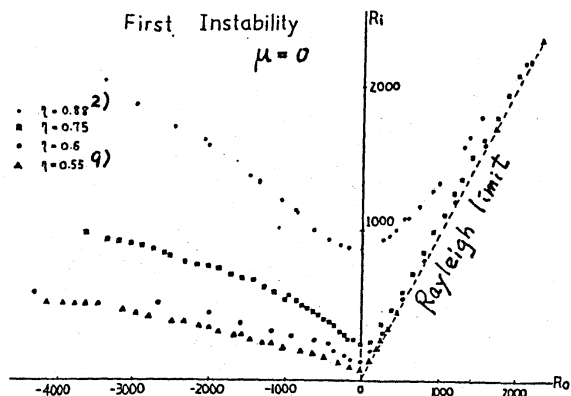
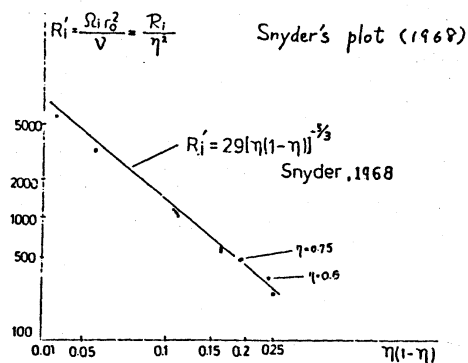


図1. 装置略図

m	k	s	n	m	k	s	n
3	-1	-1	1	6	-2	-1	2
	0	0	3		-1	-1	1
	1	1	1		0	0	6
					1	1	1
4	-1	-1	1		2	1	2
	0	0	4		3	±1	3
	1	1	1				
	2	±1	2	7	-3	2	1
					-2	3	1
5	-2	2	1		-1	-1	1
	-1	-1	1		0	0	7
	0	0	5		1	1	1
	1	1	1		2	-3	1
	2	-2	1		3	-2	1

表3. 変調パラメター

図2. 1次遷移^{2,9)}図3. 臨界レイノルズ数¹⁰⁾

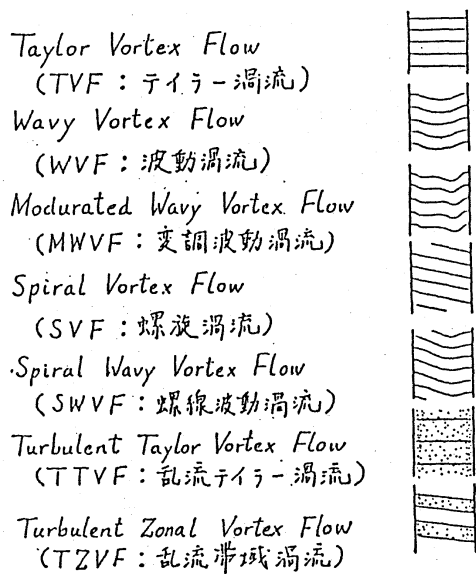


図4. 攪乱のパターンと名称

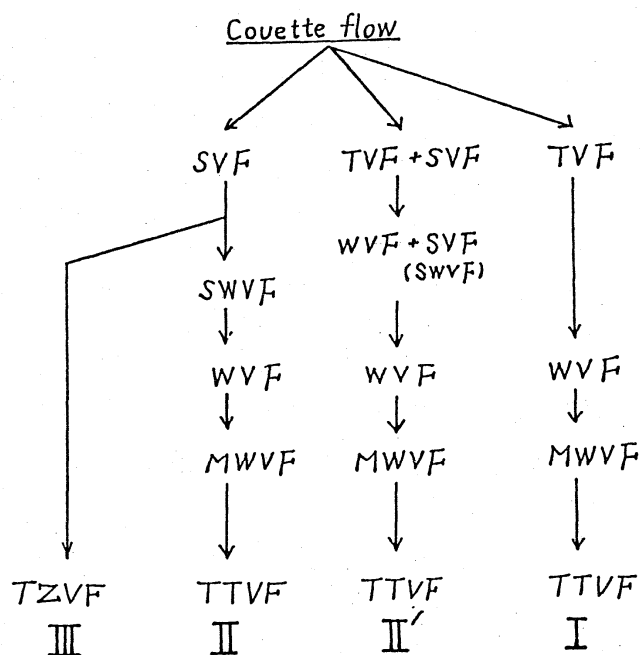


図 5. 進化の系統

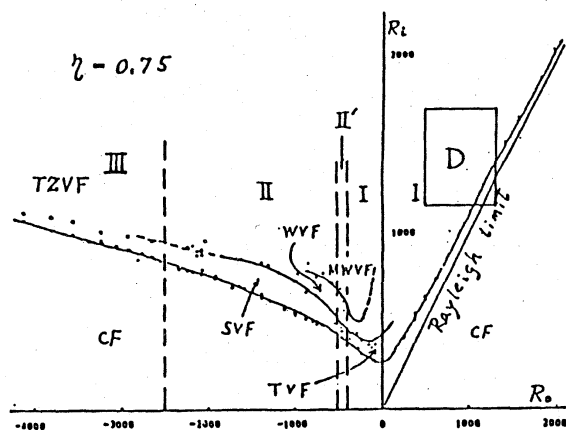


图 6. 逐次遷移



図7. ディスロケーション

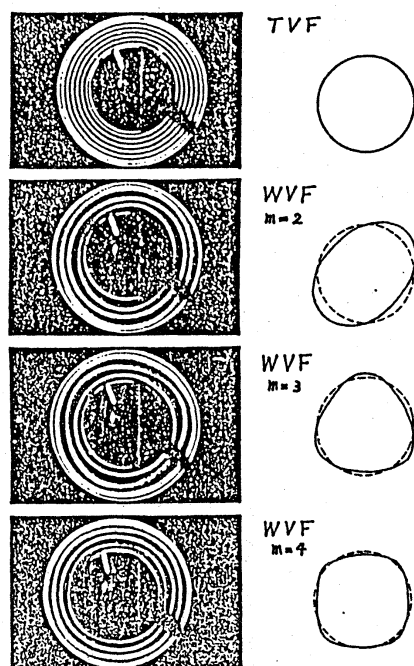


図8. 全周波形の例

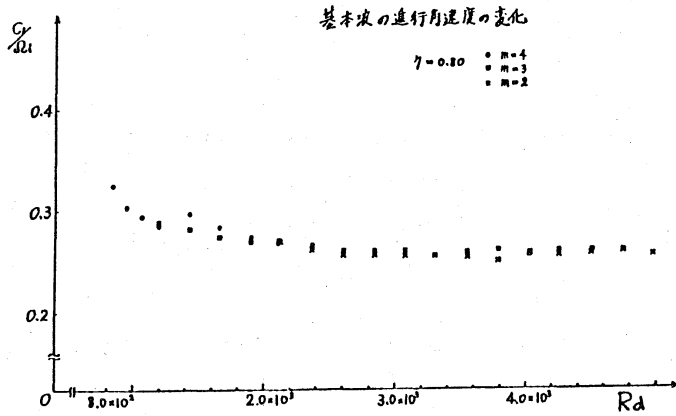
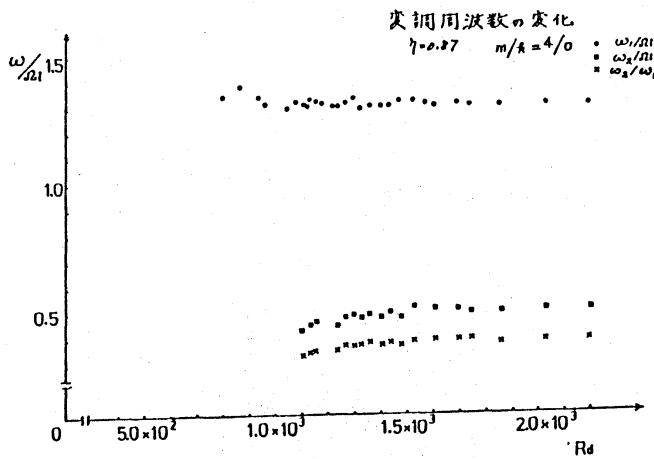
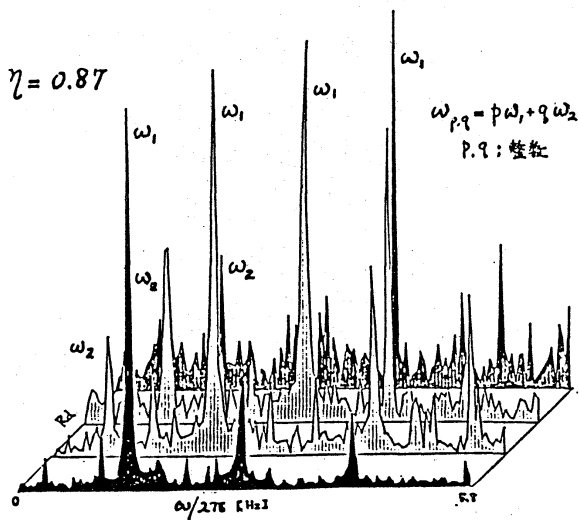
図9. 波速と Rd の関係図11. ω_1, ω_2 と Rd の関係
(可視化法とスペクトル法)

図13. MWVFのパワー・スペクトル

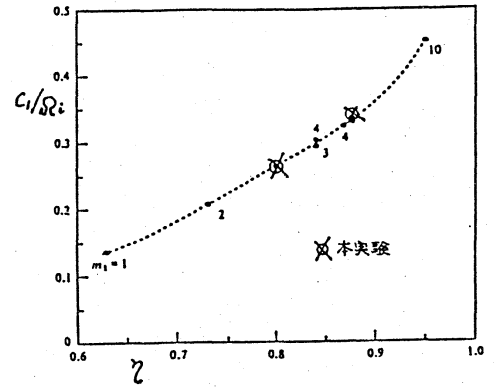
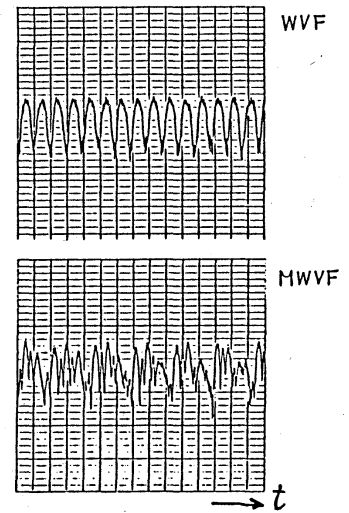
図10. 波速と η の関係¹⁴⁾

図12. 散乱光強度

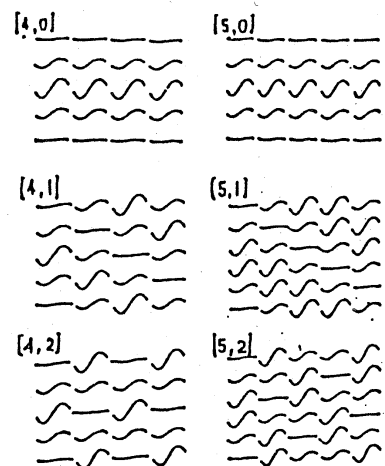


図14. 変調波形の模式図

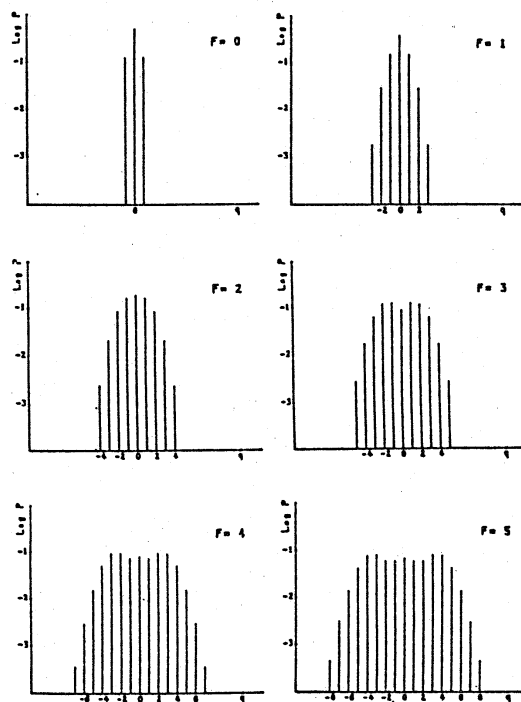
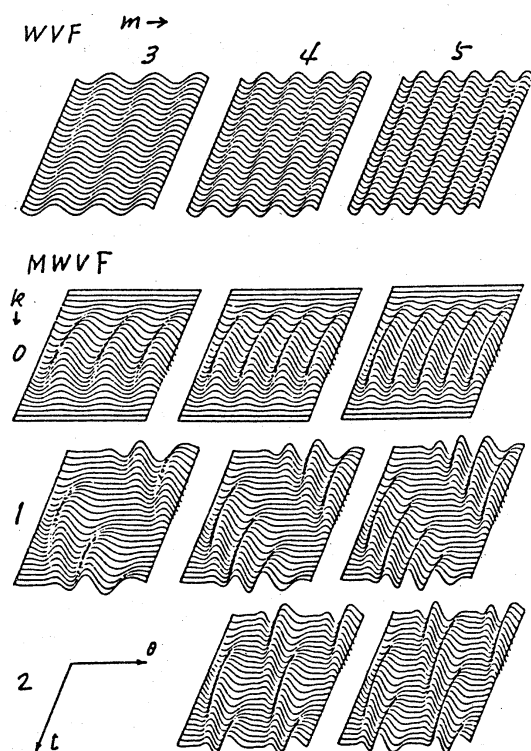


図1. 変調波形のシミュレーション, 式(8) 図17. MWVFのパワー・スペクトル, 式(15)
 WVF: $A=F=0$
 MWVF: $A=F=1, \alpha=0$

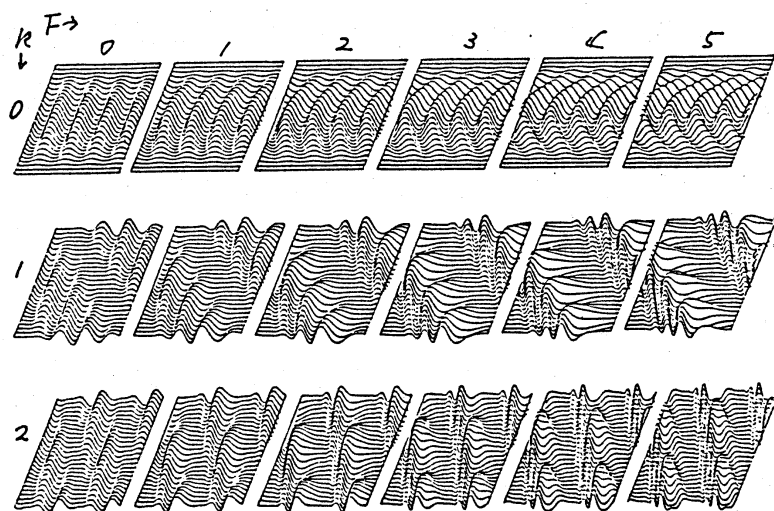


図16. 変調波形のシミュレーション, 式(8)
 $m=4, A=1, \alpha=0$