

水路中を動く圧力場に伴う 3 次元浅水波

京都大学情報学研究科 野村浩史 (Hiroshi NOMURA)

京都大学情報学研究科 船越満明 (Mitsuaki FUNAKOSHI)

Graduate School of Informatics, Kyoto Univ.

1 はじめに

船の 1 つのモデルとして考えることができる局在した圧力変動の場が浅い水路中を動くとき、その速度によってさまざまな波のパターンが生じる。特に船の速度が浅水波の速度に十分近いときには、船の前方に 2 次元的な平面波が周期的に放出される現象が実験、数値計算ともに確認されている [1]-[6]。

本研究では船が水路の中心軸からずれて壁近くを動く場合を中心に、数値計算を行うことにより船によって作り出される波のパターンを調べた。

2 基礎方程式と数値計算法

本研究では、Pedersen [5] が用いた 3 次元 Boussinesq 方程式を基にして波の挙動を調べた。この方程式を導くために、水路の長さ方向に x^* 軸、スパン方向に y^* 軸、鉛直上向きに z^* 軸をとり、時間を t^* 、自由表面変位を η^* 、速度ポテンシャルを Φ^* 、圧力を p^* として、次の無次元化を行う。

$$\begin{cases} z^* = h_0 z, & x^* = lx, & y^* = ly, & t^* = \frac{l}{\sqrt{gh_0}} t, \\ \eta^* = \alpha h_0 \eta, & \Phi^* = \alpha l \sqrt{gh_0} \Phi, & p^* = \alpha \rho g h_0 p, \end{cases} \quad (1)$$

ここで h_0 は水深、 ρ は流体密度、 g は重力加速度であり、 α は波の代表振幅を h_0 で割ったもの、 l は波の代表波長である。以下では、 α 及び $\epsilon = (h_0/l)^2$ はともに 1 よりずっと小さく、同程度の大きさであると仮定する。非圧縮性の非粘性流体の渦なし運動を仮定すると、連続の式、自由表面での力学的境界条件、運動学的境界条件、底での境界条件は、それぞれ以下のように書ける。

$$\epsilon \nabla^2 \Phi = -\Phi_{zz}, \quad -1 \leq z \leq \alpha \eta, \quad (2a)$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2} \alpha (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2} \alpha \epsilon^{-1} (\Phi_z)^2 + \eta + p' = 0, \quad z = \alpha \eta, \quad (2b)$$

$$\epsilon (\eta_t + \alpha \nabla \Phi \nabla \eta) = \Phi_z, \quad z = \alpha \eta, \quad (2c)$$

$$\Phi_z = 0, \quad z = -1, \quad (2d)$$

ここで、 p' は自由表面での圧力の大気圧からのずれであり、 $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ である。深さ方向に平均した速度ポテンシャル

$$\phi(x, y, t) = \frac{1}{1 + \alpha\eta} \int_{-1}^{\alpha\eta} \Phi(x, y, z, t) dz \quad (3)$$

を用いると、(2a)-(2d) から次の2つの式が得られる。

$$\eta_t = -\nabla \{ (1 + \alpha\eta) \nabla \phi \} + O(\epsilon^2, \alpha\epsilon) \quad (4)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} \alpha (\nabla \phi)^2 + \eta + p' - \frac{1}{3} \epsilon \nabla^2 \phi_t = O(\epsilon^2, \alpha\epsilon) \quad (5)$$

式(4)、(5)で $O(\epsilon^2, \alpha\epsilon)$ の項を無視したものをを用いて、 ϕ と η の時間発展を計算する。

計算では、図1のような $0 \leq x \leq 60$, $0 \leq y \leq 20$ の長方形領域を考える。ここで、 $y = 0$ と $y = 20$ は水路壁であり、 $x = 0$ と $x = 60$ は計算上の仮想的な境界である。まず $y = 0$ と 20 での境界条件は、速度の法線方向成分が0であるなどの条件から、

$$\phi_y = \eta_y = 0, \quad \phi_{yyy} = \eta_{yyy} = 0, \quad \text{at } y = 0, 20 \quad (6)$$

と書ける。次に $x = 0, 60$ では、radiation condition

$$\phi_t - \phi_x = 0, \quad \eta_t - \eta_x = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (7)$$

$$\phi_t + \phi_x = 0, \quad \eta_t + \eta_x = 0 \quad \text{at } x = 60 \quad (8)$$

を用いる。これは、波が境界から外へ向かって浅水波の無次元速度1で流れ去るという条件である。また流体は静止状態から運動し始めるものとして、次の初期条件を用いる。

$$\phi = 0, \quad \eta = 0, \quad \text{for all } x \text{ and } y \quad (9)$$

方程式(4)、(5)の数値計算は、差分法を用いて行った。 ϕ と η の空間格子は間隔 Δx 、 Δy で同じものを用いるが、時間方向には、 ϕ と η で時間間隔 Δt の半分だけずらした離散点を用いる。(4)、(5)において、 α 、 ϵ を含んだ項に対しては2次精度の中心差分、含んでいない項に対しては4次精度の中心差分を用いて近似した。得られた2つの式は(6)、(7)、(8)の境界条件を用いると、いずれもブロック化対角行列を係数行列とする連立1次方程式となるので、逐次線過大緩和法(SLOR法)を用いて交互に解くことにより、 ϕ と η の時間発展を求めた。

船は、次のような楕円形の圧力変動場によってモデル化する。

$$p'(x, y, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} p_a (1 + \cos \pi \theta) & |\theta| < 1, \\ 0 & |\theta| \geq 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\theta(x, y, t) = \sqrt{\left(\frac{x - x_0 - Ft}{L} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{R} \right)^2} \quad (11)$$

ここで、 $F = U/\sqrt{gh_0}$ はフルード数であり、 U は船の速度である。なお、計算量を節約するために、計算領域を圧力場と同じ速さで x 軸の正方向に動かした。

3 計算結果

本研究では、 $\alpha = \epsilon = 0.1$ 、 $p_a = 0.05$ 、 $L = 4$ 、 $R = 2$ とパラメータを固定し、数値計算においては $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0.1$ と選んだ。また、船の位置の水路の中心軸からのずれを $d = 10 - y_0$ により定義した。

まず F が 1 より充分大きい場合は、図 2 に示したように、 $d = 0$ の時は水路の中心軸に関して対称な波のパターン、 $d > 0$ の時は非対称な波のパターンがそれぞれ現れる。しかしどちらの場合も、水路の壁面付近では入射角と反射角が等しい通常の反射パターンが見られる。なお図 2 や以下の同様な図において、楕円形は p' が正の船に対応する部分を表しており、水面変位が正の値の等高線は実線で、負の値の等高線は破線で表されている。

$F \simeq 1.0$ で船が中心軸上を動く場合は、図 3 からわかるように、まず船首部分で変位が正の波が作られて、斜め後ろに伸びていくが、水路壁で Mach 反射 [7],[8] が起こることによって次第に波の尾根線が真直ぐになっていき、やがて 2 次元的な波 (平面波) が前方に放出される。なお放出は何回でも起こるが、放出される波の振幅は第 1 波がもっとも大きい。一方、船尾では、両水路壁をつなぐような波が 1 回だけ生成される。この波は 2 次元적ではなく、 y 方向に振動しながら後方へ流れ去っていく。その後は、船尾部分の変位は負の状態が続く。一方、図 4 からわかるように、 $d > 0$ のときには生成される波のパターンは非対称となるが、上記の特徴は d の値に関係なく見られる。なお $d > 0$ の場合には、船に近い方の壁側では波の振幅はすぐ大きくなるが、その後遠い方の壁側での波の振幅が充分大きくなるのを待ってから、2 次元的な波の前方への放出が起こる。

F が 1 より充分小さく、船が中心軸上を動く場合には、図 5 からわかるように、船が生成する波はほぼ 3 次元的である。船首部分では 1 回だけ船の前方に水路幅全体にわたる正の波が放出されるが、その後は 3 次元的な波が船の前方に放出される。これらの放出される波の振幅は $F \simeq 1.0$ の場合に放出される波に比べてずっと小さい。また船尾部分では常に 3 次元的な波を生成している。図 6 からわかるように、これらの特徴も d の値によって影響を受けない。

船の前方に放出される波の振幅 A は、船の前端より x 方向に 10 だけ前方で、 y 方向には水路の中心軸上の点 (図 7 の $\times$) を、第 1 波が通る際の振幅によって定義した。また放出周期 T_m は、最初の二つの波がこの点を通過する時間差とした。

図 8 からわかるように、 F が 1 より充分小さいときは、放出周期 T_m および振幅 A は、 d を変えてもほとんど変化がなかった。一方、 $F = 1$ の時には、放出周期 T_m は d を増加させるとわずかに短くなり、振幅 A はわずかに増加する。さらに、船の前方への波の放出がおこる上限の $F (= 1.02)$ では、 d を増加させたときの放出周期 T_m の減少は著しくなる。しかし、振幅 A はほとんど d に依存しない。

造波抵抗 C_x 、 C_y は次式で定義される。

$$C_x = \iint p' \eta_x dx dy, \quad (12)$$

$$C_y = \iint p' \eta_y dx dy. \quad (13)$$

ここで、 $C_x > 0$ は船の進行方向と逆向きに、 $C_y > 0$ は $y = 0$ の壁の方向へ、流体から力を受けることを示している。

図9からわかるように、 $F = 1.0$ の場合には、 d が増加する (船が壁に近づく) につれて C_x, C_y とともに増加する。また、 $d > 0$ のときは C_y の平均値は正であり、船は近い方の壁に向かう方向に流体から力を受ける。さらに、 C_x, C_y の振動周期は、前方への波の放出周期にほぼ等しい。

参考文献

- [1] KATSIKIS, C. and AKYLAS, T. R: *J.Fluid.Mech.* **177**, 49-65. (1987)
- [2] ERTEKIN, R. C., WEBSTER, W. C. and WEHAUSEN, J. V: In *Proc. 15th Symp. Naval Hydrodyn., Hamburg*, 347-364. National Academy of Sciences, Washington, DC. (1984)
- [3] WU, T. Y: *J.Fluid.Mech.* **184**, 75-99. (1987)
- [4] ERTEKIN, R. C., WEBSTER, W. C. and WEHAUSEN, J. V: *J.Fluid.Mech.* **169**, 275-292. (1986)
- [5] PEDERSEN, G: *J.Fluid.Mech.* **196**, 39-63. (1988)
- [6] MEI, C. C: *J.Fluid.Mech.* **162**, 53-67. (1986)
- [7] MILES, J. W: *J.Fluid.Mech.* **79**, 157-169. (1977)
- [8] MILES, J. W: *J.Fluid.Mech.* **79**, 171-179. (1977)

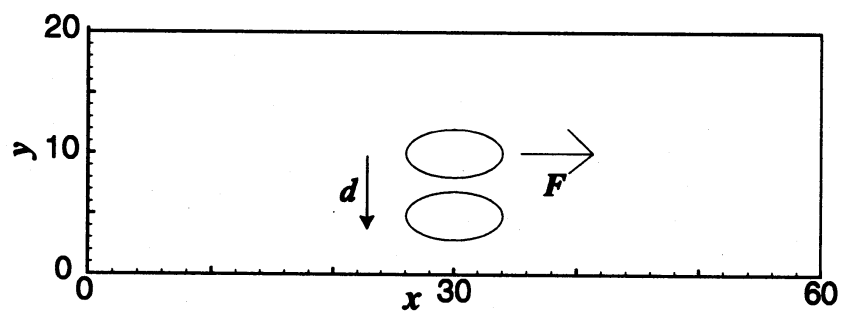
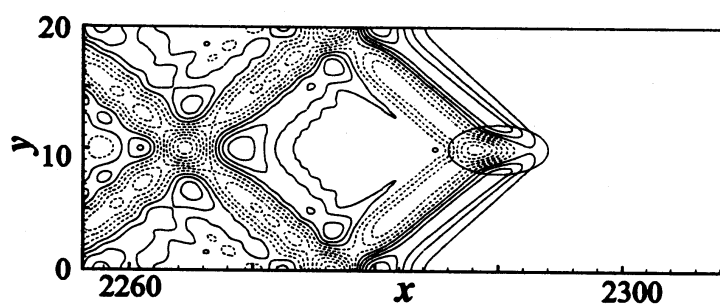
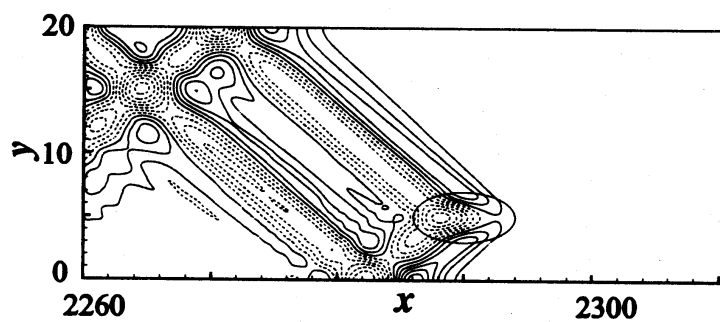


図 1: 計算領域及び圧力場



(a) along the center line.



(b) along the off-centered line. ($d = 5.0$)

図 2: Contour plots for $F = 1.5$ at $t = 1500$. Contour interval=0.01.

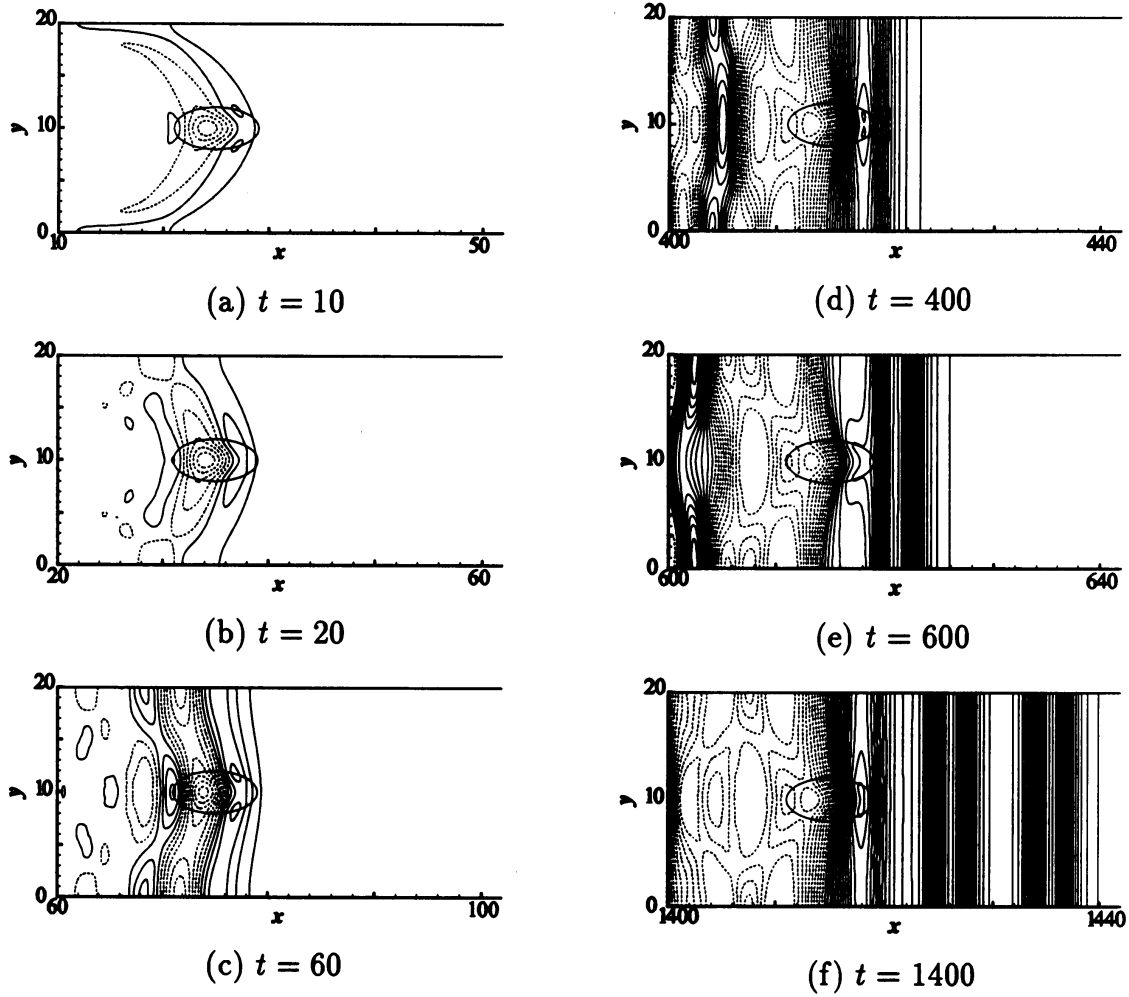
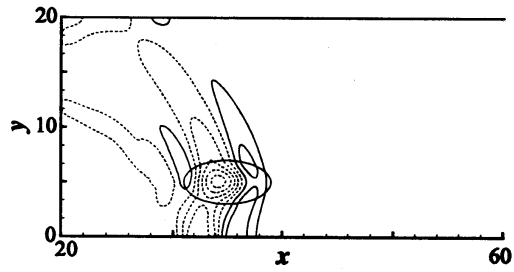
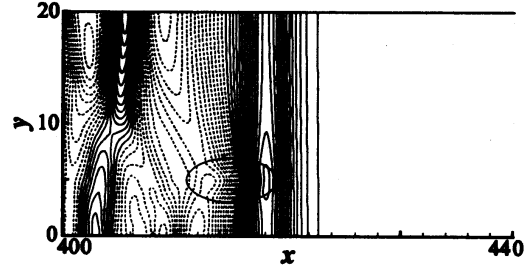
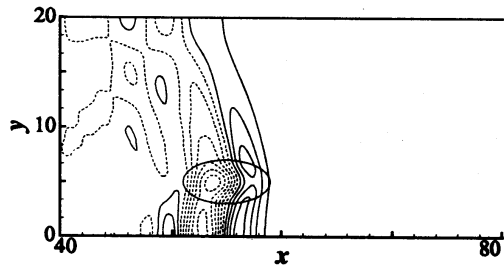
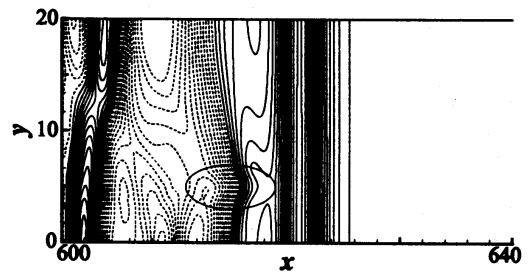
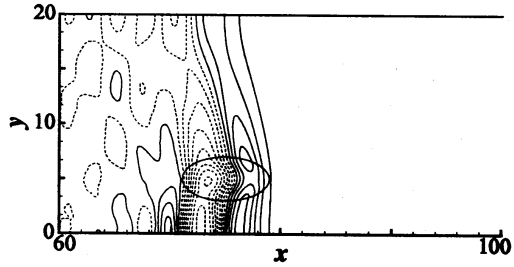
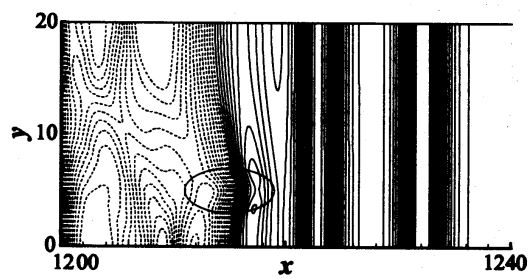
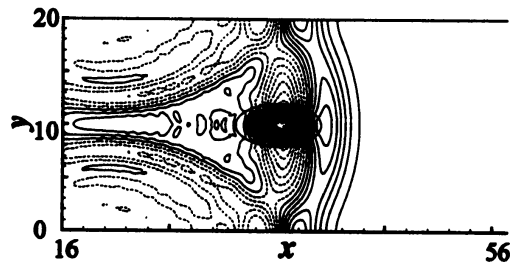
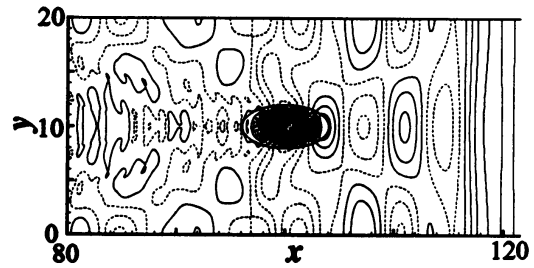
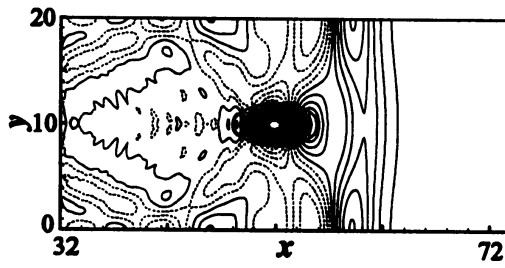
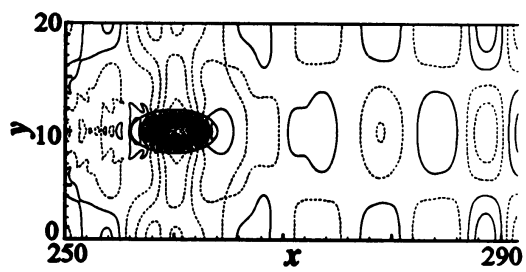
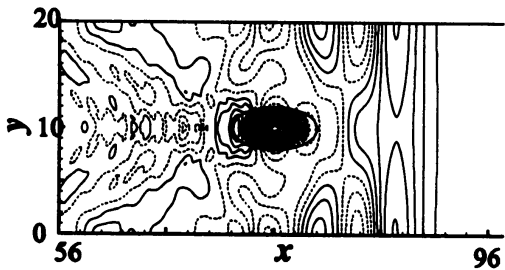
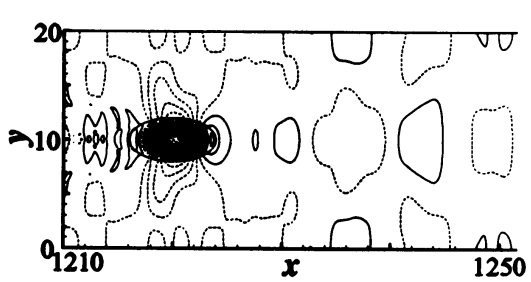


FIG 3: Contour plots for $F = 1.0$. Contour interval = 0.02.

(a) $t = 20$ (d) $t = 400$ (b) $t = 40$ (e) $t = 600$ (c) $t = 60$ (f) $t = 1200$

⊠ 4: Contour plots for $F = 1.0$ and $d = 5.0$. Contour interval = 0.02.

(a) $t = 20$ (d) $t = 100$ (b) $t = 40$ (e) $t = 300$ (c) $t = 60$ (f) $t = 1500$

☒ 5: Contour plots for $F = 0.8$. Contour interval = 0.003.

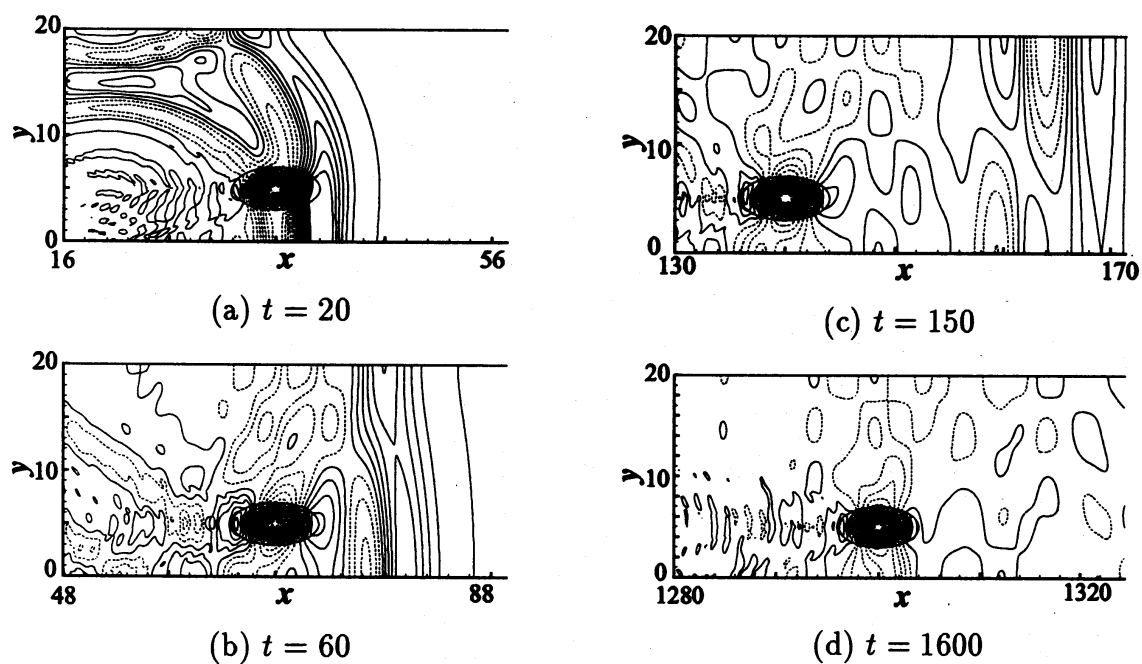


図 6: Contour plot for $F = 0.8$, $y_0 = 5.0$, contour interval = 0.003.

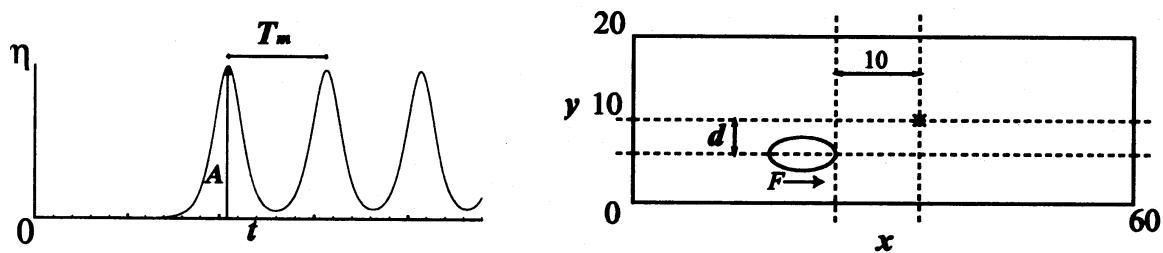


図 7: 振幅 A 及び放出周期 T_m 、船と測定点 ($\times$)

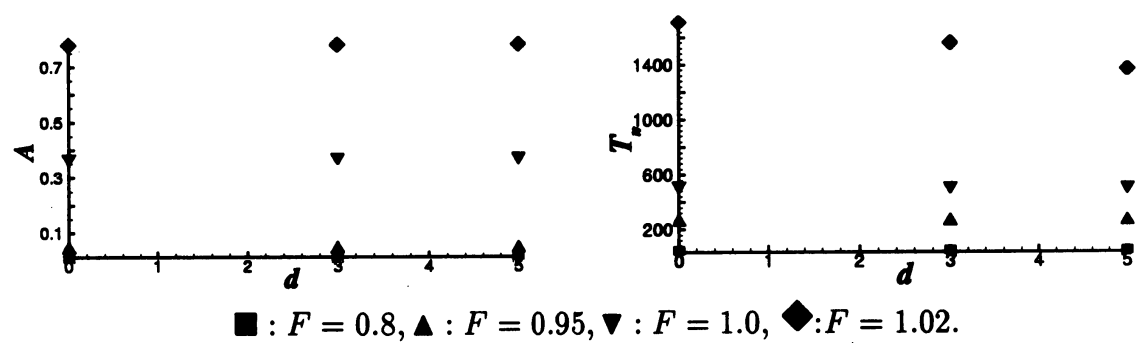


図 8: 波の放出振幅 A とその周期 T_m の d に対する依存性

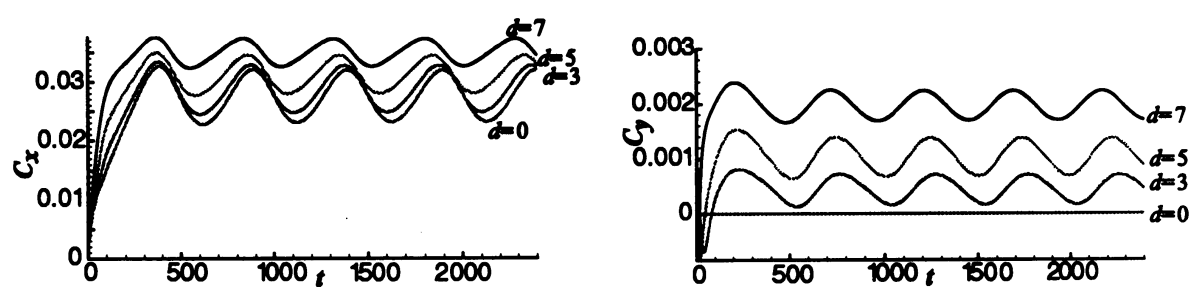


図 9: 造波抵抗 ($F = 1.0$)