

ある種の (非可換) コンパクト群上の
F.-M. Riesz の定理について

城西大学理 山口 博 (Hiroshi Yamaguchi)

ここでは, ある種の (非可換) コンパクト群上における
F.-M. Riesz の定理に関連したことを述べてみる。

§1. 序

最初に, Circle group $\mathbb{T}$ における通常の F.-M. Riesz の
定理を述べる。

定理 1.1 (F.-M. Riesz).

$$\mu \in M(\mathbb{T}), \quad \hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-in\tau} d\mu(e^{i\tau}) = 0 \quad \text{for } n < 0.$$

$$\implies \mu \ll m_{\mathbb{T}}. \quad (\text{但し, } m_{\mathbb{T}} \text{ は } \mathbb{T} \text{ の Haar measure}).$$

2次元 Circle group $\mathbb{T}^2$ においても同様のことが成り
立つ。

定理 1.2 (S. Bochner).

$$\mu \in M(\mathbb{T}^2), \quad \hat{\mu}(n, m) = 0 \quad \text{for } (n, m) \notin \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+.$$

$$\implies \mu \ll m_{\mathbb{T}^2}.$$

定理 1.2 に関連して, 次の成り立つ。

定理 1.2' $E = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 : n \geq 0, |m| \leq n\}$ とする。

$\mu \in M(\mathbb{T}^2)$, $\hat{\mu}(n, m) = 0$ for $(n, m) \notin E$.

$\Rightarrow \mu \ll m_{\mathbb{T}^2}$. //

注意 1.1. 定理 1.1, 定理 1.2 (1.2') に対応したことが, $\mathbb{R}$ 及び $\mathbb{R}^2$ でも成り立つ。又, 実際には, 定理 1.2 及び定理 1.2' よりもう少し強いことが成り立つ (cf. [13, p. 2.5 Theorem]). //

注意 1.2. 定理 1.1 よりもう少し強い次の結果が実際には成り立つ: $0 \neq \mu \in M(\mathbb{T})$, $\hat{\mu}(n) = 0$ for $n < 0$.

$\Rightarrow |\mu| \ll m_{\mathbb{T}}$ かつ $m_{\mathbb{T}} \ll |\mu|$. //

§ 2. コンパクト可換群上の F.-M. Riesz の定理.

Helson-Lowdenslager ([7]) は定理 1.1 を ordered dual を持つ compact abelian group に拡張した。 G を compact abelian group とし, $\hat{G}$ を G の dual group とする。 m_G は G 上の Haar measure を表わすとする。 $M(G)$ を G 上の bounded regular measures の空間とする。 $\mu \in M(G)$ に対して, $\hat{\mu}$ は μ の Fourier 変換を表わすものとする。 i.e., $\hat{\mu}(x) = \int_G (-x, r) d\mu(r)$ ($x \in \hat{G}$). $\text{Trig}(G)$ を G 上の trigonometric polynomials の空間とする。 $E \subset \hat{G}$ に対して, $M_E(G) = \{\mu \in M(G) : \hat{\mu} = 0 \text{ on } E^c\}$,

$\text{Trig}_E(G) = \{f \in \text{Trig}(G) : \hat{f} = 0 \text{ on } E^c\}$ とおく。 $\hat{G}$ の部分集合 E は, $M_E(G) \subset L^1(G)$ を満たすとき Riesz set と呼ばれる。

定義 2.1 $\hat{G}$ は次の (i), (ii) を満たす $\hat{G}$ の semigroup P が存在するとき, ordered であるという。

$$(i) \quad P \cup (-P) = \hat{G}, \quad (ii) \quad P \cap (-P) = \{0\}. //$$

このとき, $r, w \in \hat{G}$ に対して, " $r \geq w \iff r - w \in P$ " により, $\hat{G}$ に linear order が入る。

定理 2.1 (cf. [7], [13, p. 2.3 Theorem]).

G は ordered dual $\hat{G}$ を持つ compact abelian group とする。

$\mu \in M(G)$. $\hat{\mu}(r) = 0$ for $r < 0$.

$$\implies (i) \quad \hat{\mu}_a(r) = \hat{\mu}_s(r) = 0 \text{ for } r < 0.$$

$$(ii) \quad \hat{\mu}_s(0) = 0.$$

但し, $\mu = \mu_a + \mu_s$ は μ の m_G に関する Lebesgue 分解。 //

注意 2.1 定理 1.1 は定理 2.1 より得られる。

実際, $\mu \in M(\mathbb{T})$, $\hat{\mu}(n) = 0$ for $\forall n < 0$ とする。すると,

定理 2.1 より, $\hat{\mu}_s(n) = 0$ for $\forall n \leq 0$ 。従って,

$$(e^{-i \cdot} \mu_s)^\wedge(n) = \hat{\mu}_s(n+1) = 0 \text{ for } \forall n < 0. \text{ 故に, } (e^{-i \cdot} \mu_s)$$

の singular part はそれ自身故, 定理 2.1 より, $\hat{\mu}_s(1) =$

$$(e^{-i \cdot} \mu_s)^\wedge(0) = 0. \text{ 以下同様にして, " } \hat{\mu}_s(n) = 0 \text{ for } \forall n \in \mathbb{Z} "$$

が得られる。従って, $\mu_s = 0$ 。故に, $\mu = \mu_a \ll m_{\mathbb{T}}$ 。 //

定義 2.2. $0 < p < \infty$, $E \subset \hat{G}$ とする。

$E: \Lambda(p)\text{-set} \iff 0 < \exists \varepsilon < p, \exists c > 0 \text{ s.t.}$

$$\|f\|_p \leq c \|f\|_\varepsilon \text{ for } \forall f \in \text{Trig } E(G). //$$

$G = \mathbb{T}$ のとき, $E = \{n_k \in \mathbb{N} : n_{k+1}/n_k > \beta \text{ (} k=1, 2, 3, \dots)\}$

は $\hat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$ における $\Lambda(p)\text{-set}$ ($\forall p \geq 1$) の例になっている。

Pigno は定理 2.1 を次のように拡張した。

定理 2.2 (cf. [11, Theorem 2]).

P は $\hat{G}$ に order を与える semigroup とし, $E \subset \hat{G}$ は $\Lambda(1)\text{-set}$ とする。 $\mu \in M(G)$, $\hat{\mu}(x) = 0$ for $\forall x \in (P \cup E)^c$.

$$\implies (i) \quad \hat{\mu}_s(x) = 0 \text{ for } x < 0 \text{ (i.e., } x \notin P).$$

$$(ii) \quad \hat{\mu}_s(0) = 0. //$$

注意 2.2. (1) 定理 2.2 において, $E = \emptyset$ とした時が定理 2.1 である。

(2) $G = \mathbb{T}$ のとき, 定理 2.2 より Rudin の結果 [12, Theorem 5.7] が得られる。 //

Pigno は次のようなもっと一般的な定理 2.1 の拡張も示している。

定理 2.2' ([11, Theorem 2]).

P, E は定理 2.2 のとおりとし, $\mu \in M(G)$ とする。今,

$$(*) \quad \left(\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \subset \hat{G} : \text{finite set s.t.} \\ t(x) = \sum_r c_r (-x, r) \in \text{Trig}(G), r \notin K_\varepsilon \cup P \cup E, \|t\|_\infty \leq 1 \\ \implies \left| \sum_r c_r \hat{\mu}(r) \right| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

が満たさねるとすると、次が成り立つ。

$$(i) \quad \text{supp}(\hat{\mu}_s) \subset E.$$

$$(ii) \quad \hat{\mu}_s(0) = 0. \quad //$$

§ 3. ある種の変換群における F.-M. Riesz の定理.

Forelli ([6]) による実数 $\mathbb{R}$ が局所コンパクト Hausdorff 空間に作用する (位相) 変換群における解析的測度に関する結果がある。ここでは compact abelian group が局所コンパクト Hausdorff 空間に作用する変換群における F.-M. Riesz の定理に関連した結果を述べる。

(G, X) を compact abelian group G が局所コンパクト Hausdorff 空間 X に作用する (位相) 変換群とする。 $M(X)$ を X 上の bounded regular measures の空間とする。 $\lambda \in M(G)$, $\mu \in M(X)$ に対して, $\lambda * \mu \in M(X)$ を次により定義する。

$$\lambda * \mu(f) = \int_X \int_G f(g \cdot x) d\lambda(g) d\mu(x) \quad \text{for } f \in C_0(X).$$

又, X 上の quasi-invariant (positive) Radon measure σ に対して, $N(\sigma) = \{\mu \in M(X) : \lambda * \mu \ll \sigma \text{ for } \forall \lambda \in L^1(G)\}$ とおく。

定義 3.1. $\mu \in M(X)$ に対して, $J(\mu) = \{\kappa \in L^1(G) : \kappa * \mu = 0\}$ とおき, μ の spectrum $sp(\mu)$ を $\bigcap_{\kappa \in J(\mu)} \hat{\kappa}^{-1}(0)$ により定義する。 //

定理 2.1 の (G, X) での対応した結果は次のようになる。

定理 3.1 ([16, Theorem 2.1]).

P を $\hat{G}$ の semigroup $\{P \cup (-P) = \hat{G}\}$ を満たすものとし, σ を X 上の quasi-invariant Radon measure とする. $\mu \in M(X)$ とし, $\mu = \mu_a + \mu_s$ を μ の σ に関する Lebesgue 分解とする. もし, $sp(\mu) \subset P$ ならば,

$$(i) \quad sp(\mu_a), \quad sp(\mu_s) \subset P.$$

更に, $P \cap (-P) = \{0\}$ と $\pi(1\mu) \ll \pi(\sigma)$ が満たされるならば

$$(ii) \quad sp(\mu_s) \subset P \setminus \{0\}$$

も成り立つ. 但し, $\pi: X \rightarrow X/G$ は canonical map. //

Locally compact group 上の bounded regular measure の絶対連続性は translation の連続性によって特徴付けることができる (cf. [8, (19.27), (20.4) Theorem]). (G, X) 上ではこのことに関連して次のことが成り立つ.

定理 3.2 ([16, Theorem 2.3]).

$E \subset \hat{G}$ を Riesz set とする. $\mu \in M(X)$. もし, $sp(\mu) \subset E$ ならば, $\lim_{g \rightarrow 0} \|\mu - \delta_g * \mu\| = 0$. 但し, δ_g は $g \in G$ における point mass. //

定理 3.2 において, μ が与えられた quasi-invariant Radon measure に関して絶対連続になるためには更に条件が必要である.

定理 3.3 ([17, Corollary 1.1]).

$E \subset \hat{G}$ を Riesz set とし, σ を X 上の quasi-invariant Radon measure とする. $\mu \in M(X)$. もし, $sp(\mu) \subset E$ かつ $\pi(|\mu|) \ll \pi(\sigma)$ ならば, $\mu \ll \sigma$. 但し, $\pi: X \rightarrow X/G$ は canonical map. //

注意 3.1 (cf. [17, Remark 1.2]).

定理 3.3 において, 仮定 " $\pi(|\mu|) \ll \pi(\sigma)$ " は必要である. 一方, Finet and Tardivel-Nachef は次の結果を得ている.

定理 3.4 ([5, Theorem 4.10]).

E, σ は定理 3.3 のとおりとする. $\mu \in N(\sigma)$.

もし, $sp(\mu) \subset E$ ならば, $\mu \ll \sigma$. //

注意 3.2 ([18, Proposition 2.1]).

σ を X 上の quasi-invariant Radon measure とする.

$\mu \in M(X)$ に対して, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\mu \in N(\sigma)$.

(ii) $\pi(|\mu|) \ll \pi(\sigma)$. ($\pi: X \rightarrow X/G$ は canonical map).

従って, 特にこのことから, 定理 3.3 と定理 3.4 は同値であることがわかる. //

§ 4. Compact group 上の F.-M. Riesz の定理について

ここでは Brummelhuis によって与えられた metrizable compact group 上の F.-M. Riesz の定理に関連した結果の拡張と定理 2.2 の compact group への拡張について述べる。尚、ここで述べる結果は [18] で得られたものである。

K を compact group とし, $\bar{Z}_K$ を K の dual object とする。 $M(K)$ を K 上の bounded regular measures の空間とし, m_K を K の Haar measure とする。 $0 < p < \infty$ に対して, $L^p(K)$ は通常の間隔とする。 $\sigma \in \bar{Z}_K$ に対して, $U^{(\sigma)} \in \sigma$ に属し, H_σ を表現空間として持つ K の continuous irreducible unitary representation とする。 $\mathcal{J}(K)$ を K 上の trigonometric polynomials の空間とする (i.e., $\mathcal{J}(K)$ は関数 $x \rightarrow \langle U_x^{(\sigma)} \xi, \eta \rangle$ ($\sigma \in \bar{Z}_K$; $\xi, \eta \in H_\sigma$) の一次結合の全体)。 $Z(K)$ を K の center とし, $G \subset Z(K)$ を K の closed subgroup とする (このとき, G は compact abelian group に就く)。すると, Schur's lemma により, 写像 $\gamma: \bar{Z}_K \rightarrow \hat{G}$ で次の (4.1) を満たすものが存在する。

$$(4.1) \quad U_x^{(\sigma)} = (\chi, \gamma(\sigma)) I \quad (x \in G, \sigma \in \bar{Z}_K).$$

但し, $U^{(\sigma)} \in \sigma$ で I は $U^{(\sigma)}$ の表現空間 H_σ 上の identity operator,

$$N(m_K) = \{ \mu \in M(K) : \lambda * \mu \ll m_K \text{ for } \forall \lambda \in L^1(K) \} \text{ とおく。}$$

$\mu \in M(K)$ に対して, $\hat{\mu}$ を μ の Fourier 変換とする。i.e., $\sigma \in \bar{Z}_K$; $\xi, \eta \in H_\sigma$ に対して,

$$\langle \hat{\mu}(\sigma)\xi, \eta \rangle = \int_K \langle \bar{U}_x^{(\sigma)}\xi, \eta \rangle d\mu(x).$$

但し, $\bar{U}_x^{(\sigma)} = D_\sigma U_x^{(\sigma)} D_\sigma^{-1}$ で, D_σ は conjugation on H_σ .

そして, $\text{spec}(\mu) = \{\sigma \in \Sigma_K : \hat{\mu}(\sigma) \neq 0\}$ とおく。又, $E \subset \bar{\Sigma}_K$ に対して, $M_E(K)$, $\mathcal{I}_E(K)$ を次のように定義する。

$$M_E(K) = \{\mu \in M(K) : \text{spec}(\mu) \subset E\};$$

$$\mathcal{I}_E(K) = \{f \in \mathcal{I}(K) : \text{spec}(f) \subset E\}.$$

変換群 (G, K) が自然に得られるが, $\mu \in M(K)$ の変換群 (G, K) における spectrum を $sp(\mu)$ で表わすことにする。すると次が成り立つ。

命題 4.1. $E \subset \hat{G}$ とする。 $\mu \in M(K)$ に対して, 次の (i), (ii) は同値である。

$$(i) \quad \text{spec}(\mu) \subset \gamma^{-1}(E).$$

$$(ii) \quad sp(\mu) \subset E. \quad //$$

定義 4.1. (i) $E \subset \bar{\Sigma}_K$: Riesz set $\iff M_E(K) \subset L^1(K)$.

(ii) $0 < p < \infty$.

$$E \subset \bar{\Sigma}_K : \Lambda(p)\text{-set} \iff 0 < \varepsilon < p, \exists C > 0 \text{ s.t.}$$

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_\varepsilon \quad \text{for } \forall f \in \mathcal{I}_E(K). //$$

注意 4.1. $\bar{\Sigma}_K$ の有限集合, $\Lambda(1)$ -set は Riesz set である。

Brummelhuis は Shapiro ([14]) の手法を使って, metrizable な (非可換) compact group に対する F.-M. Riesz の定理に関連した結果として次の結果を得た。

定理 4.1 ([1, Theorem 3.2]).

K は metrizable compact group とし, $Z(K)$ は circle group $\mathbb{T}$ を closed subgroup として含むとする。そして, $\Delta \subset \Sigma_K$ は次の (i), (ii) を満たすとする。

(i) $\forall m \in \mathbb{Z} (\cong \widehat{\mathbb{T}})$, $\{\sigma \in \Delta : r(\sigma) = m\}$ は有限集合。

(ii) $\{r(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$ は $\mathbb{Z}$ において下に有界。

このとき, $\mu \in M(K)$, $\text{spec}(\mu) \subset \Delta \implies \mu \ll m_K$. //

注意 4.2. [1, 3.4 Remark] で, 定理 4.1 の条件 (i) は, もっと弱い次の条件 (i)' でおきかえうべきことが指摘されている: (i)' $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\{\sigma \in \Delta : r(\sigma) = m\}$ は $\Lambda(1)$ -set. //

注意 4.3. $K = \mathbb{T}^2$, $\mathbb{T} = \mathbb{T} \oplus \{0\}$ のとき, $r: \Sigma_K \cong \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ は projection $r(m, n) = n$ になる。従って, 定理 4.1 は定理 1.2' に対応した結果と考えることができる。

定理 3.4 を使うと定理 4.1 は次のように拡張できる。

定理 4.2. K を compact group とし, $Z(K)$ は compact abelian group G を closed subgroup として含むとする。 $\Delta \subset \Sigma_K$ は次の条件 (i), (ii) を満たすとする。

(i) $\forall \omega \in \widehat{G}$, $\{\sigma \in \Delta : r(\sigma) = \omega\}$ は Σ_K における Riesz set.

(ii) $\{r(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$ は $\widehat{G}$ の Riesz set.

このとき, $\mu \in M(K)$, $\text{spec}(\mu) \subset \Delta \implies \mu \ll m_K$. //

注意 4.4. Σ_K の $\Lambda(1)$ -set は Riesz set であるから, 定理 4.2 における条件 (i) は次の条件 (i)' でおきかえても良い。

(i)' $\forall \omega \in \widehat{G}$, $\{\sigma \in \Delta: r(\sigma) = \omega\}$ は Σ_K における $\Lambda(1)$ -set.

定理 4.2 の証明.

$r_0 \in \widehat{G}$ とする。 $\sigma \in \Sigma_K$, $\xi, \eta \in H_\sigma$ に対して,

$$\langle (r_0 m_G)^\wedge(\sigma) \xi, \eta \rangle = \begin{cases} \langle \xi, \eta \rangle & \text{if } r(\sigma) = r_0 \\ 0 & \text{if } r(\sigma) \neq r_0 \end{cases}$$

従って, $\text{spec}(\mu) \subset \Delta$ 故,

(1) $\{\sigma \in \Sigma_K: \{(r_0 m_G) * \mu\}^\wedge(\sigma) \neq 0\} \subset \{\sigma \in \Delta: r(\sigma) = r_0\}$.

従って, 仮定 (i) より,

$$(r_0 m_G) * \mu \ll m_K \quad \text{for } \forall r_0 \in \widehat{G}.$$

故に,

(2) $(k m_G) * \mu \ll m_K \quad \text{for } \forall k \in \text{Trig}(G).$

$\text{Trig}(G)$ は $L^1(G)$ で dense であるから, (2) より

$$(f m_G) * \mu \ll m_K \quad \text{for } \forall f \in L^1(G).$$

従って,

(3) $\mu \in N(m_K).$

一方, $\text{spec}(\mu) \subset \Delta$ 故, [17, Lemma 3.1] より

(4) $\text{sp}(\mu) \subset \{r(\sigma): \sigma \in \Delta\}.$

仮定 (ii) より, $\{r(\sigma): \sigma \in \Delta\}$ は $\widehat{G}$ における Riesz set. 従って,

(3), (4) と 定理 3.4 より, $\mu \ll m_K$ が得られる。 //

定理 4.2 より, 次の系が得られた。

系 4.1. $K = G \oplus H$ とする。但し, G は compact abelian group, H は compact group. E を $\hat{G}$ の Riesz set, F を Σ_H の Riesz set とすると, $E \times F$ は $\Sigma_K (\cong \hat{G} \times \Sigma_H)$ の Riesz set である。 //

系 4.1 を証明するために, 次の補題が必要である。

補題 4.1. G, H, K は系 4.1 のとおりとする。

$\alpha \in \hat{G}$; $F \subset \Sigma_H$: Riesz set $\implies \{\alpha\} \times F$ は Σ_K の Riesz set. //

系 4.1 の証明.

$\Sigma_K \cong \hat{G} \times \Sigma_H$ で, $r(\omega, \sigma_H) = \omega$ for $(\omega, \sigma_H) \in \Sigma_K$ とある

ことに注意しておく。 $\Delta = E \times F$ とおく。 $\alpha \in \hat{G}$ に対して,

$$\{\sigma = (\omega, \sigma_H) \in \Delta : r(\sigma) = \alpha\}$$

$$= \begin{cases} \{\alpha\} \times F & \text{if } \alpha \in E \\ \phi & \text{if } \alpha \notin E. \end{cases}$$

従って, 補題 4.1 より, $\{\sigma = (\omega, \sigma_H) \in \Delta : r(\sigma) = \alpha\}$ は Σ_K における Riesz set. 又, $\{r(\sigma) : \sigma \in \Delta\} = E$ は $\hat{G}$ における Riesz set. 従って, 定理 4.2 より, $\Delta = E \times F$ は Σ_K における Riesz set である。 //

定理 2.2 の compact group K への拡張は次のようになる。

定理 4.3. K を compact group とし, $Z(K)$ は compact abelian group G を closed subgroup として含むとする。 $\hat{G}$ は ordered で,

$P \in \hat{G}$ に order を 持たず semigroup とする。 $E \subset \Sigma_K$ を $\Lambda(1)$ -set とする。 $\mu \in M(K)$. $\text{spec}(\mu) \subset E \cup \gamma^{-1}(P)$.

$\implies$ (i) $\text{spec}(\mu_S) \subset \gamma^{-1}(P)$.

(ii) さらに $\mu \in N(m_K)$ とし, $\hat{\mu}_S = 0$ on $\gamma^{-1}(0)$.

但し, $\mu = \mu_a + \mu_s$ は μ の m_K に関する Lebesgue 分解. //

定理 4.3 の証明の概略

最初に, $\lambda \in M(K)$, $Y \subset \hat{G}$ に対して, " $\text{spec}(\lambda) \subset \gamma^{-1}(Y)$ " と " $\text{sp}(\lambda) \subset Y$ " が同値であることを注意する。 $\{F_\alpha\} \subset \mathcal{I}^+(K)$ を $\|F_\alpha\|_1 = 1$ なる $L^1(K)$ に対して left approximate identity とする。但し, $\mathcal{I}^+(K) = \{f \in \mathcal{I}(K) : f \geq 0\}$. $\omega \in \hat{G}$ に対して, $\pi_\omega : \mathcal{I}(K) \rightarrow \mathcal{I}(K)$ を

$$\pi_\omega(f)(x) = \int_G f(x\gamma) (-\gamma, \omega) d m_G(\gamma)$$

により定義する。但し, $f_\gamma(x) = f(x\gamma)$. そして, $\Phi^- : \mathcal{I}(K) \rightarrow \mathcal{I}(K)$ を

$$\Phi^-(f)(x) = \sum_{\omega < 0} \pi_\omega(f)(x)$$

により定義する。すなわち, $\exists C > 0$ s.t.

$$\|\Phi^-(F_\alpha * \mu)\|_p \leq C \|\mu\|. \quad (\forall \alpha)$$

E は $\Lambda(1)$ -set として, $\Phi^-(F_\alpha * \mu) \in \mathcal{I}_{E \setminus \gamma^{-1}(P)}(K)$ 故, $\exists A > 0$ s.t.

$$\|\Phi^-(F_\alpha * \mu)\|_1 \leq A \|\Phi^-(F_\alpha * \mu)\|_p \leq AC \|\mu\|. \quad (\forall \alpha)$$

故に, $\{\Phi^-(F_\alpha * \mu)\}$ は $M(K)$ において有界。従って, $\exists \nu \in M(K)$,

$\{\Phi^-(F_{\beta_j} * \mu)\}$: subnet of $\{\Phi^-(F_\alpha * \mu)\}$ s.t. $\Phi^-(F_{\beta_j} * \mu) \rightarrow \nu$ in w^* .

する γ , $\Phi^-(F_\beta * \mu) \in \mathcal{I}_{E \setminus \gamma^{-1}(P)}(K)$ 故,

$$(1) \quad \text{spec}(\nu) \subset E \setminus \gamma^{-1}(P).$$

— $\bar{\gamma}$,

$$(2) \quad \hat{\mu}(\sigma) = \hat{\nu}(\sigma) \quad \text{for } \forall \sigma \in E \setminus \gamma^{-1}(P)$$

が成り立つことがわかる。する γ , $\text{spec}(\mu) \subset E \cup \gamma^{-1}(P)$ 故

$$\text{spec}(\mu - \nu) \subset \gamma^{-1}(P).$$

従って,

$$(3) \quad \text{sp}(\mu - \nu) \subset P.$$

故に, 定理 3.1 (i) より, $\text{sp}((\mu - \nu)_s) \subset P$. γ によって, E は $\Lambda(1)$ -set 故, Riesz set. 故に, (i) より $\nu \in L'(K)$. 従って, $(\mu - \nu)_s = \mu_s$ 故, $\text{sp}(\mu_s) \subset P$. 以上より, (i) が得られる。

次に, 更に $\mu \in N(m_K)$ とする。 $\nu \ll m_K$ 故, $\mu - \nu \in N(m_K)$.

する γ , 注意 3.2 より, $\pi_G(|\mu - \nu|) \ll \pi_G(m_K)$. 但し,

$\pi_G: K \rightarrow K/G$ は canonical map. する γ , (3) と 定理 3.1 (ii) より,

$$\text{sp}(\mu_s) = \text{sp}((\mu - \nu)_s) \subset P \setminus \{0\}.$$

故に, $\text{spec}(\mu_s) \subset \gamma^{-1}(P \setminus \{0\})$. 従って, (ii) も得られる。 //

注意 4.5 定理 4.3 の条件 (ii) $\mu \in N(m_K)$ は必要である。

$K = \mathbb{T} \oplus \mathbb{T}$, $G = \mathbb{T} \oplus \{0\}$ とする。このとき, $\gamma: \mathbb{Z}_K \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \{0\}$ は $\gamma(m, m) = m$ とする。又,

$$N(m_K) = \{\mu \in M(\mathbb{T}^2) : (f \times \delta_0) * \mu \ll m_{\mathbb{T}^2} \text{ for } \forall f \in L'(\mathbb{T})\}$$

となる。 $\hat{G} \cong \mathbb{Z}$ に order を 与える semigroup を $\mathbb{Z}^+$ とし,

$\mu = m_{\mathbb{T}} \times \delta_0$ とおく。すると, $\mu = \mu_s$ で,

$$(i) \quad \hat{\mu}(n, m) = 0 \quad \text{for } \forall (n, m) \in \gamma^{-1}(\mathbb{Z}^+)^c.$$

$$(ii) \quad \hat{\mu}_s(0, n) = \hat{\mu}(0, n) = 1 \quad \text{for } \forall n \in \mathbb{Z}. \quad //$$

定理 2.2' に対応した結果は次のようになる。

定理 4.3' K, G, E は定理 4.3 のとおりとする。

$E \subset \bar{Z}_K$ を $\Lambda(1)$ -set とし, $\mu \in M(K)$ とする。今,

$$(**) \quad \left(\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists F_\varepsilon \subset \bar{Z}_K : \text{finite set s.t.} \\ P(k) \in \mathcal{I}_{(F_\varepsilon \cup E \cup \gamma^{-1}(E))^c}(K), \|P\|_\infty \leq 1 \\ \implies \left| \int_K P(k^{-1}) d\mu(k) \right| \leq \varepsilon \end{array} \right)$$

が満たされるとすると, 次の成り立つ。

$$(i) \quad \text{spec}(\mu_s) \subset \gamma^{-1}(E).$$

$$(ii) \quad \text{もし, } \mu \in N(m_K) \text{ なら, } \hat{\mu}_s = 0 \text{ on } \gamma^{-1}(0). \quad //$$

例 4.1. $U(2) = \{A \in M(2) : A^*A = AA^* = E\}$ (但し, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$),

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

$\rho : \mathbb{T} \times SU(2) \rightarrow U(2)$ を $\rho(\alpha, u) = \alpha u$ なる写像とする。

すると, ρ は onto, continuous homomorphism で, ρ の kernel は $\{(1, E), (-1, -E)\}$ となる。明らかに,

$$\mathbb{T} \cong \{e^{i\theta} E : e^{i\theta} \in \mathbb{T}\} \subset Z(U(2)).$$

$\widehat{SU(2)}$ を $SU(2)$ の dual object とすると, $\widehat{SU(2)} = \{T^{(l)} : l = 0, \frac{1}{2},$

$1, \frac{3}{2}, \dots\}$ となる。但し, $T^{(l)}$ は [9, (29.13)] のもの。すると,

$U(2)$ の dual object $\widehat{U(2)}$ は次のようになる (cf. [9, (29.48)]).

$$\hat{U}(2) = \{ \tau_{n, \ell} : n \in \mathbb{Z}, \ell \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 0, \dots\}, \frac{n+2\ell}{2} \text{ is an even integer} \}.$$

但し, $\tau_{n, \ell}(V) = e^{in\theta} T_u^{(\ell)}$ for $V = e^{i\theta} u \in U(2)$ ($u \in SU(2)$).

又, $r: \hat{U}(2) \rightarrow \hat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$ を (4.1) を満たす写像とすると,

$$r(n, \ell) = n$$

となる。

(i) $\alpha > 0$ に対して, $\Delta_\alpha = \{ \tau_{n, \ell} \in \hat{U}(2) : \ell < \alpha n \}$ とおく。すると, 定理 4.1 (又は 定理 4.2) により, Δ_α は $\hat{U}(2)$ の Riesz set である。

(ii) $\Delta = \{ \tau_{n, \ell} \in \hat{U}(2) : n \geq 0 \}$ とおく。

$\mu \in M(U(2))$, $\text{spec}(\mu) \subset \Delta$ とする。すると, 定理 4.3 より, $\text{spec}(\mu_a), \text{spec}(\mu_s) \subset \Delta$ となる。

(iii) m を $U(2)$ の Haar measure とし, Δ は (ii) の集合とする。 $\mu \in N(m)$, $\text{spec}(\mu) \subset \Delta (= r^{-1}(\mathbb{Z}^+))$ とする。すると, $\text{sp}(\mu) \subset \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^+$ は $\mathbb{Z}$ の Riesz set 故, 定理 3.4 より, $\mu \ll m$ 。

(iv) (ii) における集合 Δ は $\hat{U}(2)$ における Riesz set ではない。 $\nu \in M(\mathbb{T} \times SU(2))$ を $\nu = m_{\mathbb{T}} \times \delta_E$ とおく。但し, δ_E は unit matrix E における point mass。そこで, $\mu \in M(U(2))$ を $\mu = p(\nu)$ により定義する。すると, $\text{spec}(\mu) \subset \Delta$ であるが $\mu \perp m$ である。 //

参考文献

- [1] R.G.M. Brummelhuis, An F. and M. Riesz theorem for bounded symmetric domains, Ann. Inst. Fourier 37(2) (1987), 135 - 150.
- [2] R.G.M. Brummelhuis, A note on Riesz sets and lacunary sets, J. Austral. Math. Soc. 48 (1990), 57 - 65.
- [3] K. DeLeeuw and I. Glicksberg, Quasi-invariance and analyticity of measures on compact groups, Acta Math. 109 (1963), 179 - 205.
- [4] C. Finet, Lacunary sets for groups and hypergroups, J. Austral. Math. Soc. 54 (1993), 39 - 60.
- [5] C. Finet and V. Tardivel-Nachet, Lacunary sets on transformation groups, Hokkaido Math. J. 23 (1994), 1 - 19.
- [6] F. Forelli, Analytic and quasi-invariant measures, Acta Math. 118 (1967), 33 - 57.
- [7] H. Helson and D. Lowdenslager, Prediction theory and Fourier series in several variables, Acta Math. 99 (1958), 165 - 202.
- [8] E. Hewitt and K.A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Vol. I, New York - Heidelberg - Berlin, Springer-Verlag, 1963.

- [9] E. Hewitt and K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Vol. II, New York - Heidelberg - Berlin, Springer-Verlag, 1970.
- [10] T.-S. Liu, A. van Rooij and J.-K. Wang, Transformation groups and absolutely continuous measures II, Indag. Math. 32 (1970), 57 - 61.
- [11] L. Pigno, A variant of the F. and M. Riesz theorem, J. London Math. Soc. 9 (1974), 368 - 370.
- [12] W. Rudin, Trigonometric series with gaps, J. Math. Mech. 9 (1960), 203 - 227.
- [13] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, Interscience, New York, 1962.
- [14] J. H. Shapiro, Subspaces of $L^p(G)$ spanned by characters, $0 < p < 1$, Israel J. Math. 29 (1978), 248 - 264.
- [15] H. Yamaguchi, The F. and M. Riesz theorem on certain transformation groups, Hokkaido Math. J. 17 (1988), 289 - 332.
- [16] H. Yamaguchi, The F. and M. Riesz theorem on certain transformation groups, Hokkaido Math. J. 19 (1990), 345 - 359.

- [17] H. Yamaguchi, Absolute continuity of measures on compact transformation groups, Hokkaido Math. J. 22 (1993), 25-33.
- [18] H. Yamaguchi, An F. and M. Riesz theorem on compact groups, Transactions of a German-Japanese Symposium "Infinite Dimensional Harmonic Analysis" held in Tübingen, pp. 249-273, Verlag D. + M. Gräbner, Bamberg, 1996.