

# OPTiにおける離散性判定アルゴリズム

和田昌昭 (Masaaki Wada)

奈良女子大学理学部

## 1 概要

OPTiは1点穴あきトーラス群の変形を、マウスで点を動かすことで入力し、群の変形に伴って Isometric circles, Ford region, Limit set 等がどのように変化するのを見ることが出来る Macintosh 用のプログラムである. OPTiは次の URL からダウンロードできる.

<http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~wada/OPTi/>

2001 年 9 月に University of Warwick で開かれたワークショップの時に、パラメータ空間を表示する機能が追加されて、現在の OPTi の最新バージョンは OPTi 3.30 になっている.

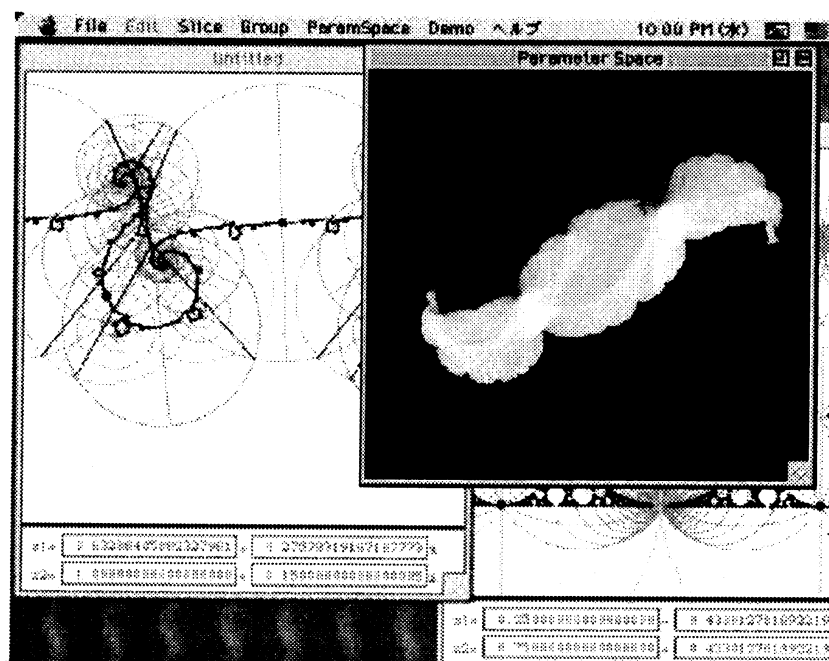


図 1: OPTi 3.30 の実行画面

ここでは、OPTiにおいてパラメータ空間をどのように描画しているかについてまとめてみたい。パラメータ空間の表示では、離散群（擬 Fuchs 群）を与える点がさまざまな色でタイリングされ、非離散群に対応する点が黒く塗りつぶされている。プログラムでは、まずさまざまな生成元を取り換えて Jørgensen の不等式を適用することにより、パラメータ空間内の点に対応する群の非離散性を判定して黒く塗っている。ある程度の深さまで調べて Jørgensen の不等式が満たされている場合は、離散群である可能性が高いと判断して、今度は Ford 領域の構成を試みる。それがうまくいった場合には基本領域が得られ、Poincaré の多面体定理によって離散性が保証される。その場合、Ford 領域の組み合わせ構造に応じて塗る色を変えている。

パラメータ空間の点に対応する群が離散群とも非離散群とも判定されない場合は、灰色の領域として残る。そのような領域には 2 種類ある。一つはカスプから長く伸びる細長い灰色領域であるが、この領域内の中心線上には Cone 多様体の基本群が無数に含まれる。これらのほとんどは非離散群だが、中には離散群である Koebe 群もこの領域に存在している。Jørgensen の不等式で非離散性を判定するのが難しい領域である。プログラムでは ParamSpace メニューの Fine を選ぶことにより、深さ 1000 まで探索して Jørgensen の不等式を適用するので、このような灰色領域はほぼ見えなくなる。

もう一つは、明らかに離散と思われる領域内に突然現れる灰色の領域であるが、こちらは Ford 領域の構成において、何度か生成元を取り換えをしてからでないと Ford 領域の構成ができない場合である。この場合のアルゴリズムは、実はまだ完成していない。

## 2 1点穴あきトーラス群に関する基本事項

1点穴あきトーラス型の擬 Fuchs 群に関して、後で必要になる事柄をまとめておく。詳しくは [1, 2] を参照して欲しい。

トーラスのメリディアンとロンジチュードをそれぞれ  $A, B$  とすれば、穴あきトーラスの基本群は  $A, B$  によって生成される自由群だが、穴のまわりがカスプ、従って交換子  $[A, B]$  がパラボリックという条件が課される。この時

$$x = \operatorname{tr} A, \quad y = \operatorname{tr} B, \quad z = \operatorname{tr} AB$$

とおくと Markoff 恒等式

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

がなりたつ。この両辺を  $xyz$  で割って得られる式

$$a_0 + a_1 + a_2 = 1$$

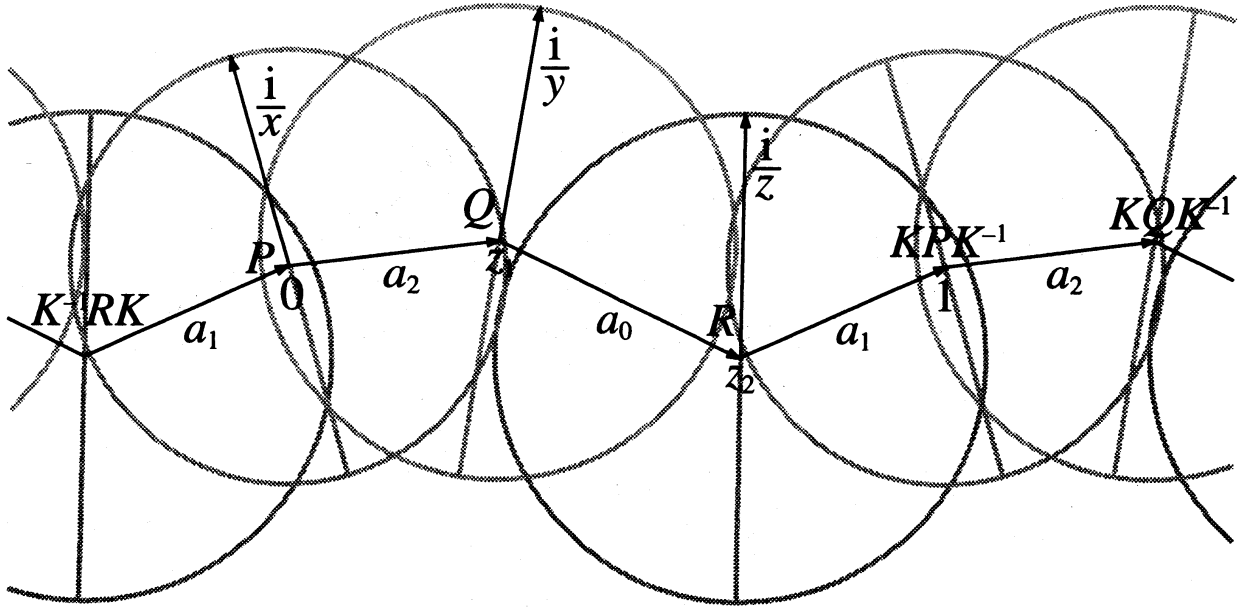


図 2: Complex probabilities からの群の構成

の左辺の各項, すなわち,

$$a_0 = \frac{x}{yz}, \quad a_1 = \frac{y}{zx}, \quad a_2 = \frac{z}{xy}$$

を “complex probability” と呼ぶ.

逆に, complex probability  $(a_0, a_1, a_2)$  が与えられると, 図2のようにしてもとの群  $\langle A, B \rangle$  を (群の共役を除き) 復元することができる. ここで  $P$  は  $\pm i/x$  を両端点とする上半双曲空間内の測地線に関する 180 度回転を表す Möbius 変換で, 原点を中心とする円は  $P$  の isometric circle を表している.  $Q, R$  についても同様とする. このとき  $K = RQP$  は  $+1$  の平行移動,  $A = RQ = KP$ ,  $B = PQ = K^{-1}R$ ,  $[A, B] = K^2$  となる.

上で, 位数 2 の元の 3 つ組  $(P, Q, R)$  は, 1 点穴あきトーラスを指数 2 の分岐被覆として持つ  $(2, 2, 2, \infty)$  型の orbifold の基本群の生成元であって, elliptic generator triple と呼ばれる.  $(P, Q, R)$  から得られる無限系列

$$\dots, K^{-1}PK, K^{-1}QK, K^{-1}RK, P, Q, R, KPK^{-1}, KQK^{-1}, KPRK^{-1}, \dots$$

の連続するどの 3 つの元も elliptic generator triple をなす.

$(P, Q, R)$  が elliptic generator triple の時  $(P, R, RQR)$  も elliptic generator triple となる. この操作は marking の取替えに対応するものだが, これを単に生成元を取替えとよぶことにする. (図 3) この操作は trace に関しては

$$(x, y, z) \mapsto (x, z, y'), \quad (y + y' = xz)$$

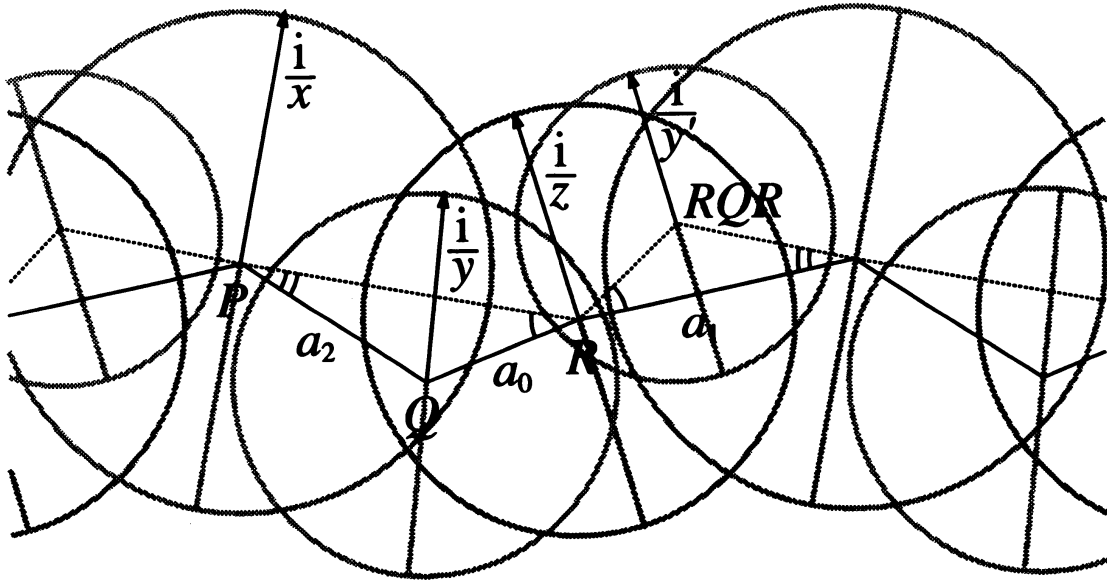


図 3: 生成元を取替え

に対応し, complex probability では

$$(a_0, a_1, a_2) \mapsto (a_0 + a_2, \frac{a_0 a_1}{a_0 + a_2}, \frac{a_1 a_2}{a_0 + a_2})$$

に対応する.

$(P, Q, R)$  から得られる無限系列に対して,  $P, Q, R$  のいずれを捨て去り新しい生成元を追加するかで, 本質的に 3 種類の異なる生成元を取替えを行うことができる. すべての elliptic generator triple は上記の操作で得られることがわかっている. 従って, 同じ無限系列に属する elliptic generator triple を同一視して頂点と考え, 生成元を取替えを辺と考えると, 各頂点の次数が 3 の無限 tree が得られる.

### 3 Jørgensen の不等式による非離散性判定

$SL(2, \mathbb{C})$  の 2 元  $F, G$  が非初等的離散群を生成するならば

$$|\mathrm{tr}^2 F - 4| + |\mathrm{tr} [F, G] - 2| \geq 1$$

というのが Jørgensen の不等式である. ([4]) これを  $F = K, G = P, Q, \text{ or } R$  として適用すると, 今の場合非初等的という条件は常になりたつので,  $P, Q, R$  のいずれかの isometric circle の半径が 1 より大ならば  $P, Q, R$  が生成する群は必ず非離散的という条件が得られる.

アルゴリズムとしては, 与えられた生成元  $P, Q, R$  から始めて生成元を取替えを次々に行い, 新しく得られた生成元に対してこの条件を確かめるわけである. その際深さ  $n$  までの生成元に対してこの条件を確かめようとする, 一見,  $3 \cdot 2^n$  通りのチェックを行わないといけないようだが, 実はそうではない.

コンピュータを用いた実験をしてみると、 $P, Q, R$ に対して行うことができる3通りの生成元取替えのうち少なくとも1つの方向については、生成元を取替えを行うごとに isometric circle の半径が急速に小さくなってしまい、わざわざ Jørgensen の不等式の条件を確かめるまでもないことがわかる。このことはコンピュータによる実験だけではなく、Bowditch[5] による理論的な裏付けもある。したがって、ある半径を決めておき、それより isometric circle の半径が小さい生成元が得られた生成元を取替えの方向については探索を打ち切るという枝刈りを行うことにより、実質的に線形時間の探索で深さ  $n$  の生成元までについて Jørgensen の不等式をチェックすることができる。

この判定法は非常に強力で、たとえば深さ 1000 までのチェックで非離散的と判定されなかった群は、下に述べる特殊な場合を除き、ほぼ 100% 離散群であるというのがこれまで OPTi を用いていろいろな実験をして来た中での経験的な実感である。実際 OPTi では ParamSpace メニューの Coarse, Medium, Fine がそれぞれ深さ 10, 100, 1000 までのチェックを行う設定となっているが、Coarse にすると灰色領域が確認できるものの、Medium ですでに灰色の領域はほとんど存在しなくなってしまう。

さて、非離散群であるにもかかわらず、この Jørgensen の不等式によるチェックを通過してしまう特殊な場合であるが、OPTi でパラメータ空間を表示した時に現れるカスプから細く曲線状にのびる灰色の領域がそれにあたる。そのような領域内の点を選んで OPTi で群の様子を調べてみるとわかるが、このような群の場合、生成元を取替えを行っていくと、あるパターンで一点のまわりをまわり続けて isometric circle の半径が大きくも小さくもなっていない。このような群もほとんどの場合は十分先まで生成元を取替えを行うとやがては isometric circle の半径が 1 を超えて、非離散群であることがわかる。すなわち、Jørgensen の不等式によるチェックの深さ  $n$  を大きくしていけば、このような灰色領域はどんどん細くなってゆく。

しかし、領域の中心には、生成元を取替えパターンがいつまでも同じような調子で一点のまわりを回り続けるような群が 1 次元的に並んでいると思われ、この灰色領域が完全に消えてしまうことはない。その中でも特殊な群が、生成元を取替えを行っていくと  $k$  回目にちょうど最初の生成元と重なってしまうという場合で、それが Koebe 群である。Koebe 群は離散群なので、そもそも Jørgensen の不等式を常に満たしている。Koebe 群と Koebe 群の間には、生成元を取替えに従って一点のまわりをいわば無理数角でまわり続けるような種類の非離散群が 1 次元的に並んでいると考えられるが、そのことは理論的にはよくわかっていない。

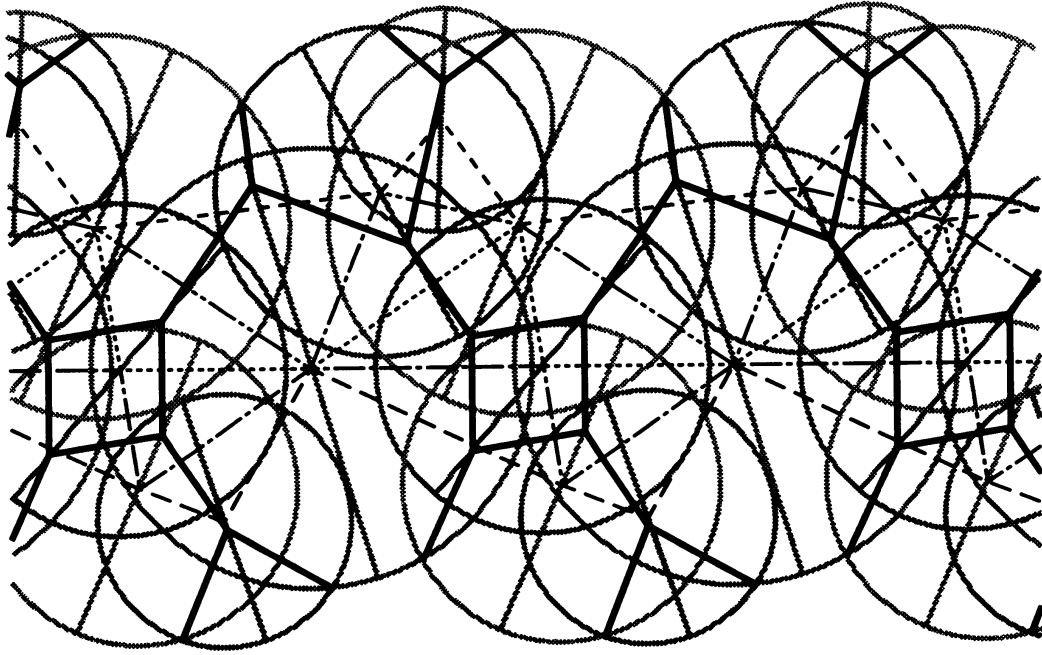


図 4: 典型的な 1 点穴空きトーラス群

## 4 1 点穴あきトーラス群の Ford 領域

上に述べた Jørgensen の不等式によるチェックを通過し、非離散的とは判定されなかった群に対しては、次節に述べる Ford 領域の構成を試みるのであるが、その前に 1 点穴あきトーラス群の Ford 領域に関する Jørgensen の理論について述べておく。

Ford 領域の定義はいろいろあるが、1 点穴空きトーラス群の場合に限って話をすれば、すべての elliptic generator について isometric hemisphere を考え、それら全部の和集合の境界パターン（を複素平面に射影したもの）と考えてよい。

図 4 に典型的な 1 点穴空きトーラス群の例を示す。実線が Ford 領域を、各種破線が complex probability を表している。図で一番下側の complex probability から始めて、生成元を取替えて 4 回行って一番上側の complex probability に至る様子がわかると思うが、よく見ると、complex probability の作る 3 角形パターンが、組合せ的には Ford 領域と dual の関係になっている。

幾何学的に有限な 1 点穴空きトーラス群の Ford 領域が、すべてこの例のように、ある complex probability からしかるべき生成元を取替えて有限回行って得られる 3 角形パターンと組合せ的に dual の関係にある、というのが Jørgensen[3] の主張である。証明の詳細については、Akiyoshi, Sakuma, Wada, Yamashita が準備中の論文を参照してほしい。従って、無数にある elliptic generator の系列の isometric hemispheres のうち、「上から見える」ものは、無限 tree の中のある有限 path に沿った elliptic generator 系列のものだけということになる。これらの Ford 領域に対応した elliptic generator の系列（および、complex probability の系列）を、Ford 系

列とよぶことにしよう。

さて、この Jørgensen の理論によれば、Ford 系列に属する complex probability の一つが与えられたとき、その上下の complex probability が、可能な 3 種類の生成元取替えのうちいずれによって得られるかは、次のようにしてわかる。

まず、与えられた complex probability に対応するすべての elliptic generator の isometric circle を描いたとき、どの円もその円弧の一部が複素平面の上側に面している場合は、その complex probability は Ford 系列の上端である。(図 5) これは、complex probability に対応する折れ線の各辺に対して、その辺の両端点、および、両端に対応する 2 つの生成元の isometric circles の交点のうち上側のもの、を結んで 3 角形を作るとき、3 辺の上側にできる 3 つの 3 角形の内点どうしが交わらない場合と言うこともできる。

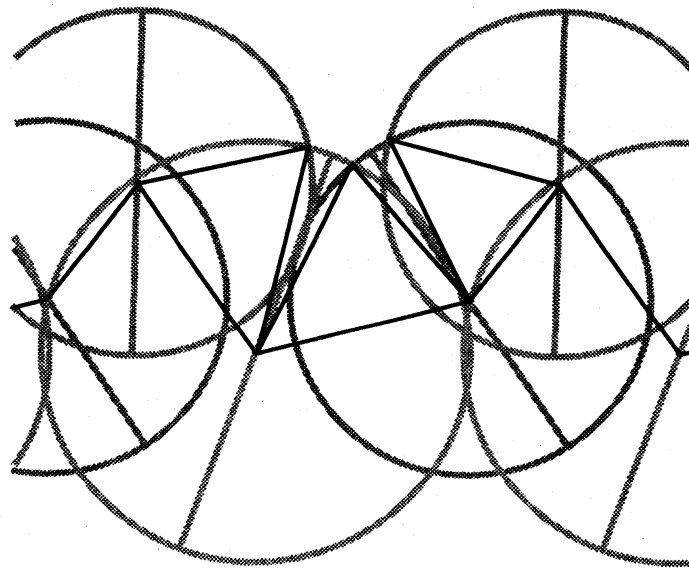


図 5: Ford 系列の上端. 3 つの 3 角形は互いに交わらない。

同様に complex probability からできる折れ線の各辺の上側に 3 角形を作ったとき、隣り合う一対の 3 角形が内点で交わる場合には、その 2 辺の共通端点に対応する生成元を捨て去るような生成元を取替えを行うと Ford 系列で一つ上の complex probability が得られる。(図 6)

隣り合う二対の 3 角形どうしが共に交わる場合には、どちらの生成元を捨てるかを判定する必要がある。それには次のようにすればよい。complex probability から作られる折れ線の連続する 3 辺  $a, b, c$  に対して、 $a, b$  上の 3 角形どうしも、 $b, c$  上の 3 角形どうしも内点で交わっているとしよう。(図 7) このとき、辺  $a$  の両端点に対応する生成元の isometric circles どうしの 2 つの交点を結ぶ線分  $\alpha$  を描く。辺  $b, c$  についても同様にして線分  $\beta, \gamma$  を描くと、線分  $\alpha$  および線分  $\gamma$  はともに線分  $\beta$  と辺  $b$  の上側で交わる。このとき辺  $b$  に近い側で交わるのが  $\alpha, \gamma$  のどちらかに従って辺  $b$  の  $a$  側、または  $c$  側の端点に対応する生成元を捨てる生成元取替えで Ford

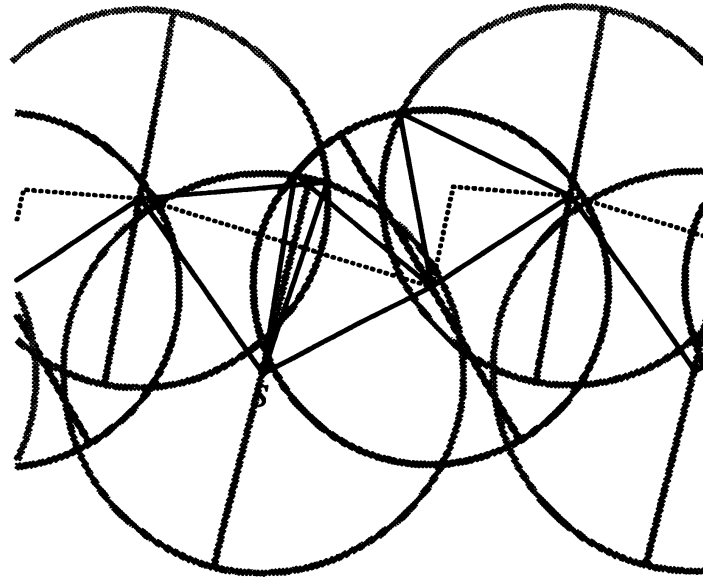


図 6: 一对の 3 角形が交わる場合. 交わる 3 角形の中央の生成元  $S$  を捨てる生成元  
の取替えで一つ上の complex probability が得られる

系列の一つ上の complex probability が得られる.

以上, 与えられた complex probability の上側のみについて述べたが, 下側についても同様な判定法で, Ford 系列中一つ下の complex probability を求めることができる. このようにして, Ford 系列の complex probability が一つでも得られた場合には, その上下の complex probability を次々と求めることにより, Ford 系列が求まり, 従って Ford 領域を構成することができる.

ただし, これはあくまで Ford 系列内の complex probability が与えられたという仮定の話であって, 一般に任意の complex probability が与えられたとき, それが Ford 系列に属するものかどうかを判定する簡単な方法は知られていない.

## 5 離散性の判定

OPTi では次のような手順で離散性の判定を試みている.

与えられた complex probability に対して, とりあえずそれが Ford 系列の一部であると仮定して, その上下の complex probability を前節のようにして求めることを考える. そのために, complex probability からできる折れ線の上下に 3 角形を構成するのだが, 場合によっては, 3 角不等式が成り立たないために 3 角形が構成できないことがある. その場合は短い 2 辺の共通端点に対応する生成元の isometric hemisphere はその両側の生成元の isometric hemisphere に完全に覆われてしまうので, 明らかに Ford 系列には属さない. 従ってその生成元を捨て去る生成元取替えを行う.

3 角不等式が成り立つ場合には, 上下の 3 角形を作って前節の判定法に従って上下



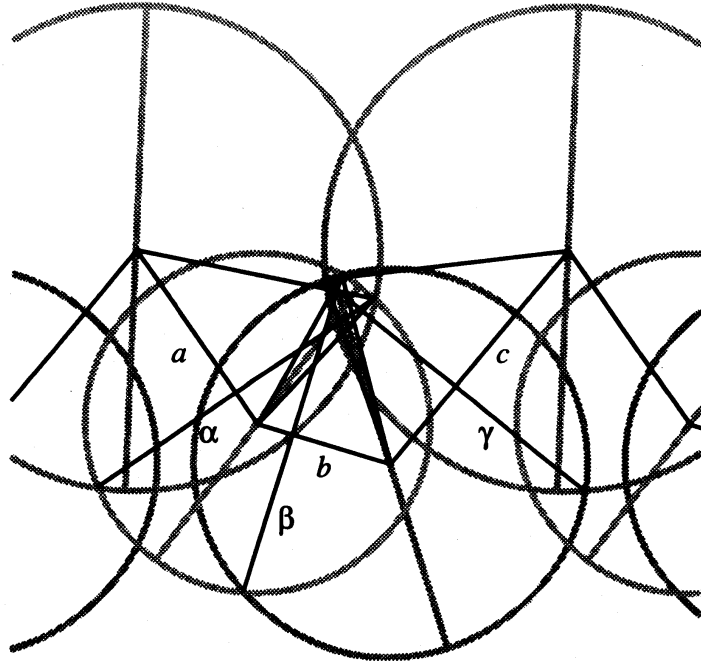


図 7: 二対の 3 三角形が交わる場合.

の complex probability を構成してゆくが、たとえば、一つ上の complex probability を求めて、それに対して一つ下の complex probability を求めると、もとに戻らないということも起こる。この場合、最初の complex probability は、実は Ford 系列には属していなかったということである。このような場合には、それまでに得られた系列は捨てて、不整合が見つかった場所から新たにアルゴリズムの適用を開始する。

このように上下両方向の整合性に注意しながら complex probability の系列を構成してゆき、上端、下端も含めて前節の Ford 系列の判定法に反しない系列が完成した場合は、その系列に属するすべての生成元の isometric hemisphere の和集合の双曲空間における補集合が Poincaré の多面体定理の条件を満たし、基本領域となることを示すことができる。従って群が離散的であることがわかる。

実は、上のアルゴリズムで、困ったことが起こる場合がある。すなわち、計算の途中で出てくる complex probability に対応する折れ線が自己交差を起こすことがあるのである。そのような群は非離散的かということ、必ずしもそうとは限らない。実際、離散的な群の Ford 系列に属する complex probability をとり、Ford 系列とは異なる第 3 の方向への生成元を取替えて数回行くと、このような自己交差型の complex probability となったりするが、最初に与えられたのがその自己交差型の complex probability であったと考えてみれば、群自体は離散的なわけだ。

自己交差型の complex probability が Ford 系列の一部でないのは明らかだが、問題は、その complex probability に対して行える 3 つの生成元取替えのうち、どの方向に Ford 系列があるのかをどのようにすれば知ることができるかである。これ

については Bowditch の論文 [5] に解決のヒントがあるように見えるが、今のところ未解決の問題であって、OPTi ではそのことを明示するために、計算途中で自己交差型の complex probability が出て来た場合には判定不能として灰色に塗ることにしている。パラメータ空間でところどころに現れる灰色領域はそのような領域である。

## 参考文献

- [1] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada and Y. Yamashita, *Punctured torus groups and two-parabolic groups*, 数理解析研究所講究録 1065 “Analysis and Geometry of Hyperbolic Spaces” (1998), 61–73.
- [2] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada and Y. Yamashita, *Ford domains of punctured torus groups and two-bridge knot groups*, 数理解析研究所講究録 1163 “双曲空間とその関連分野 II” (2000), 67–77.
- [3] T. Jørgensen, *On pairs of punctured tori*, unpublished manuscript. (“Kleinian Groups and Hyperbolic 3-Manifolds, 2001” の proceeding に採録予定)
- [4] T. Jørgensen, *On discrete groups of Möbius transformations*, Amer. J. Math., 98 (1976), 739–749.
- [5] B. H. Bowditch, *Markoff triples and quasifuchsian groups*, Proc. London Math. Soc. 77 (1998), 697–736.