

Injective envelopes of operator systems

東北大 理 浜名 正道

線型空間 V は, それがある Hilbert 空間 H 上の全ての有界線型作用素が作る C^* -代数 $B(H)$ の線型部分空間となっていて,

$$V^* \equiv \{v^*: v \in V\} = V, \quad 1 \in V \quad (1; \text{恒等作用素})$$

を満たしているとき, operator system と呼ばれる. Choi-Effros [2] は operator systems と completely positive linear

maps の作る category $\mathcal{C}$ において injectivity を次のように定義した: $V \in \mathcal{C}$ が injective であるとは, 任意の

$M, N \in \mathcal{C}$, $M \subset N$ に対し, 任意の completely positive map $\alpha: M \longrightarrow V$ が completely positive map $\hat{\alpha}: N \longrightarrow V$ に

拡張できるときをいう.

ここでは任意に与えられた operator system V を含む injective operator system (resp. unital C^* -algebra) の中で minimal なもの — それを V の injective envelope (resp. C^* -envelope) と呼ぶ — が一意に存在することを示す. また

Arneson [1] の意味での Šilov boundary の存在を示し, unital C^* -algebra A に対し A の injective envelope と A の (J. D. M. Wright [6] の意味での) regular σ -completion との間の関係を調べる.

1. 定義. operator systems $V \subset B(H)$, $W \subset B(K)$ に対し, linear map $\varphi: V \longrightarrow W$ が 1 対 1, into (resp. onto) で $\varphi, \varphi^{-1}: \varphi(V) \longrightarrow V$ がともに completely positive のとき, φ を complete order injection (resp. complete order isomorphism) と呼ぶ. 固定した operator system V に対し, operator system W と unital (= unit-preserving) complete order injection $\kappa: V \longrightarrow W$ と a pair (W, κ) を V の extension と呼ぶ. 特に W が injective operator system (resp. unital C^* -algebra であって $\kappa(V) \subset W$ によって C^* -algebra として生成されている) のとき, (W, κ) を injective (resp. C^* -) extension という. V の 2 つの extensions $(W_1, \kappa_1), (W_2, \kappa_2)$ が 同値 である [$(W_1, \kappa_1) \sim (W_2, \kappa_2)$ と書く] とは, unital complete order isomorphism $\iota: W_1 \longrightarrow W_2$ が存在し, $\iota \circ \kappa_1 = \kappa_2$ をみたすときをいう.

2. 結果.

Theorem 1. 任意の operator system V に対し, 次の性質を満たす injective (resp. C^* -) extension (B, κ) [resp. (A, κ)] が同値関係 $\sim$ を除いて一意に定まる.

(i) B は injective C^* -algebra, A はその C^* -subalgebra であり, $\kappa(V) \subset A \subset B$.

(ii) 任意の V の injective extension (W, λ) [resp. C^* -extension (C, μ)] に対し, unital complete order injection $\iota: B \longrightarrow W$ が存在し, $\iota \circ \kappa = \lambda$ を満たす [resp. onto $*$ -homomorphism $\pi: C \longrightarrow A$ が存在し, $\pi \circ \mu = \kappa$ を満たす; 従って

$$(C/\text{Ker } \pi, q \circ \pi) \sim (A, \kappa)$$

ここで $q: C \longrightarrow C/\text{Ker } \pi$ は quotient homomorphism を表わす].

この (B, κ) [resp. (A, κ)] を V の injective (resp. C^* -) envelope と呼ぶ. unital C^* -algebras の間の unital complete order isomorphism は必然的に $*$ -isomorphism になるので, B, A は C^* -algebras として unique である.

Corollary. V を unital C^* -algebra C の linear subspace で 1 を含み, C を C^* -algebra として生成しているもの

のとする。そのとき Arveson [1] の意味での Šilov boundary J for V が存在する, i.e., J は C の closed two-sided ideal であり, canonical map $V \hookrightarrow C \rightarrow C/J$ が completely isometric になる; しかも J はこの性質をもつ C の closed two-sided ideals の中で最大である。

A を unital C^* -algebra, (B, κ) をその injective envelope とする。以下で A と B との関係を調べよう。 A が C^* -algebra だから A の C^* -envelope は A それ自身と一致し, $\kappa: A \rightarrow \kappa(A) \subset B$ が $*$ -monomorphism (1 to 1 $*$ -homomorphism) となることがわかるが, 更に

Proposition 2. κ は suprema を保存する, i.e., A s. a. の部分集合 $\mathcal{F}$ に対し $\sup \mathcal{F}$, $\sup \kappa(\mathcal{F})$ がそれぞれ A , B において存在すれば,

$$\kappa(\sup \mathcal{F}) = \sup \kappa(\mathcal{F}).$$

[B は injective だから, monotone complete である。従って $\mathcal{F}$ が increasing net である場合には, " $\sup \kappa(\mathcal{F})$ が B において存在する" という仮定は (必然的に満たされるので) 不要である。]

次の Lemma は容易に証明される:

Lemma 1. D を任意の unital C^* -algebra, C をその $1 \in D$ を含む C^* -subalgebra とし

$$N \equiv \{x \in D^+ : \exists \text{ a subset } \mathcal{F} \text{ of } C^+ \text{ s.t.}$$

$$\exists \inf \mathcal{F} \text{ (in } C) = 0 \text{ and } 0 \leq x \leq y \text{ for } \forall y \in \mathcal{F}\}$$

と置く

(i) N は D の closed order ideal であり $C \cap N = \{0\}$, 更に C の任意の unitary element u に対し $uNu^* = N$; 従って

(iii) I を N の linear span とすると $C \cap I = \{0\}$, $C + I$ は D の C^* -subalgebra, I は $C + I$ の closed two-sided ideal である.

この Lemma を B と $\kappa(A) \subset B$ に対し適用する. そのとき (B, κ) が A の injective envelope という条件から上述の $I = \{0\}$, 従って $N = \{0\}$ が示せる. これが命題の主張に外ならない.

上述のまうに B は monotone complete である. そこで $\kappa(A) \subset B$ によって σ -generate される B の linear subspace C が考えられる: $C = C_{s,a.} + i C_{s,a.}$, $C_{s,a.}$ は $\kappa(A)_{s,a.}$ を含む B の最小の σ -closed linear subspace である. そのとき

Proposition 3. (C, κ) は J. D. M. Wright [6] の意味での A の regular σ -completion である, i.e., C は σ -complete C^* -algebra であり, κ は次の性質を満たす:

- (i) (a_n) が $A_{s.a.}$ の任意の減少列で $\inf a_n$ ($\text{in } A$) $= 0$ なるば $\inf \kappa(a_n)$ ($\text{in } C$) $= 0$; (ii) 任意の $c \in C_{s.a.}$ に対し $\sup \{ \kappa(a) : a \in A_{s.a.}, \kappa(a) \leq c \} = c$.

任意の unital C^* -algebra に対し その regular σ -completion の存在と一意性が J. D. M. Wright [6] によって証明されている.

Lemma 2. A の regular σ -completion を (D, α) とし M_n を $n \times n$ 複素行列環とすると $(D \otimes M_n, \alpha \otimes \text{id})$ は $A \otimes M_n$ の regular σ -completion に含まれる ($\alpha \otimes \text{id} : A \otimes M_n \rightarrow D \otimes M_n$, $\text{id} = \text{identity map on } M_n$), i.e., $D \otimes M_n$ を含む C^* -algebra E が存在して $(E, \alpha \otimes \text{id})$ が $A \otimes M_n$ の regular σ -completion となる.

Lemma 3. $\alpha|_{A_{s.a.}} : A_{s.a.} \rightarrow D_{s.a.}$ は次の性質をもつ: 任意の real Banach space X , contractive linear map $\beta : D_{s.a.} \rightarrow X$ に対し $\beta \circ \alpha : A_{s.a.} \rightarrow X$ が isometric なるば β も isometric である.

Proposition 3 の証明: B が injective ならば completely positive map $\lambda: D \rightarrow B$ が存在し $\lambda \circ \alpha = \kappa$ をみたす. λ が complete order injection であることを示す.

$\lambda \otimes \text{id}|_{(D \otimes M_n)_{s.a.}}: (D \otimes M_n)_{s.a.} \rightarrow (B \otimes M_n)_{s.a.}$ は contractive であり $(\lambda \otimes \text{id}) \circ (\alpha \otimes \text{id})|_{(D \otimes M_n)_{s.a.}} = (\kappa \otimes \text{id})|_{(D \otimes M_n)_{s.a.}}$ は isometric である. 従って $A \otimes M_n$ と $B \otimes M_n$ の regular σ -completion に対し Lemma 3 を適用し更に Lemma 2 に注意すると $\lambda \otimes \text{id}|_{(D \otimes M_n)_{s.a.}}$ が任意の n に対し isometric であることがわかる. これから λ が complete order injection 従って $*$ -monomorphism となることを示せる. また Proposition 2 より $\lambda(D) = C$ である. 従って $(D, \alpha) \sim (C, \kappa)$.

Proposition 4. A が simple ならば B もまた simple である; 従って特に B は AW^* -factor である.

A が separable, infinite dimensional かつ simple ならば B は σ -finite, non W^* , AW^* -factor of type III である.

Proof. (B, κ) が injective envelope であることを次の性質をみたす B の seminorm p は B の norm と一致することから:

$$p(x) \leq \|x\|, \quad p(\kappa(a)x\kappa(b)) \leq \|a\|p(x)\|b\|$$

$$p(\kappa(a)) = \|a\| \quad (a, b \in A, x \in B).$$

B の simplicity を示すために B の proper closed two-sided ideal I をとる. $\pi: B \rightarrow B/I$ を canonical homomorphism とし $p(x) = \|\pi(x)\|$ ($x \in B$) とおく. そのとき A の simplicity と $1 \in A$ を使うと p 以上の条件をみたすことが示せ, 従って $I = \{0\}$ が示せる.

separable infinite dimensional simple unital C^* -algebra の regular σ -completion が non W^* , AW^* -factor of type III であることが知られている [7]. 従って Proposition 3 より B が non W^* , AW^* -factor of type III を AW^* -subalgebra として含むことがわかる. 従って B は non W^* , type III となる. 更に A が separable であることから B が faithful state をもつことが示せ, B の σ -finiteness が従う.

References

- [1] W. Arveson, Subalgebras of C^* -algebras, Acta Math., 123 (1969), 141-224.
- [2] M.-D. Choi and E. G. Effros, Injectivity and operator spaces, J. Functional Analysis, 24 (1977), 156-209.
- [3] H. B. Cohen, Injective envelopes of Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 723-726.
- [4] M. Hamana, Injective envelopes of C^* -algebras, preprint.
- [5] ———, Injective envelopes of operator systems, preprint.
- [6] J. D. M. Wright, Regular σ -completions of C^* -algebras, J. London Math. Soc., 12 (1976), 299-309.

- [7] J. D. M. Wright, Wild AW*-factors and Kaplansky-Rickart algebras,
J. London Math. Soc., 13 (1976), 83-89.