

Paths in k -edge-connected graphs

大阪市立大学工学部 岡村治子

(Haruko Okamura)

$G = (V(G), E(G))$ を辺に向きのない有限グラフ (多重辺を含んでもよい) とし、 $V(G)$ を点の集合、 $E(G)$ を辺の集合とする。

定義 1. G が k -辺連結 (k -edge-connected)

$\iff$ k 本以上の辺を除去しないと G は非連結にならない。

2. G の辺連度が k ($\lambda(G) = k$ であらわす)

$\iff G$ は k -辺連結だが、 $(k+1)$ -辺連結ではない。

3. G が weakly k -linked

$\iff G$ の任意の点の対の組 $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_k, t_k)$ に対して (s_i と t_j は同じ点でもよい)、辺素な (i.e. 互いに辺を共有しない) パス $P_1, \dots, P_k$ が存在し、 P_i は s_i と t_i を結ぶ。

例 1. 図-1 のグラフを G_1 とする。 $\lambda(G_1) = 3$ であり、 G_1 は weakly 3-linked である。図-2 は辺素なる本のパス P_1, P_2, P_3 の例を与えている。

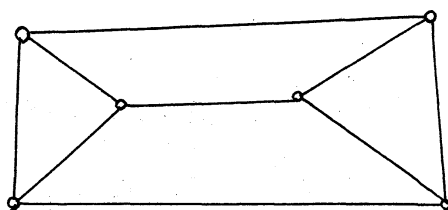


図-1

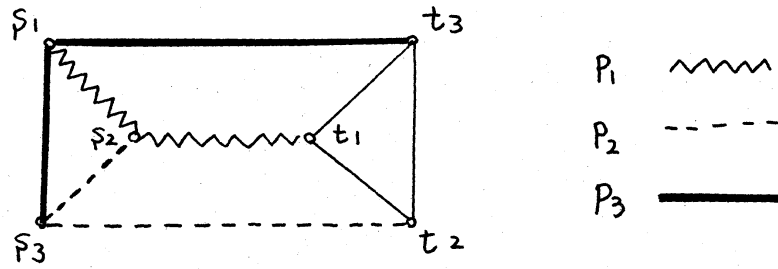


図 - 2

$$\left[\lambda(G) \geq n \Rightarrow G \text{ is weakly } k\text{-linked} \right]$$

となる n の値を考察する。

定義 4. $g(k) := \min\{n \mid \lambda(G) \geq n \Rightarrow G \text{ is weakly } k\text{-linked}\}$

予想 1 (Thomassen [4]). $g(k) = \begin{cases} k & \text{if } k \text{ is odd,} \\ k+1 & \text{if } k \text{ is even.} \end{cases}$

次の二つが既知である。

$$g(k) \geq \begin{cases} k & \text{if } k \text{ is odd,} \\ k+1 & \text{if } k \text{ is even,} \end{cases}$$

$$g(1)=1, g(2)=3, g(3)=3 \text{ (Okamura [3])},$$

$$g(4)=5, g(k) \leq 2k-3 \text{ (} k \geq 4 \text{) (Hirate Kubota and Saito [1], Mader [2])}.$$

次の結果がえられた。

$$\text{定理 1. } g(k) \leq \begin{cases} \frac{3}{2}(k-1) & \text{if } k(\geq 3) \text{ is odd,} \\ \frac{3}{2}k-1 & \text{if } k(\geq 4) \text{ is even.} \end{cases}$$

Mader [2] は次の定理を使い、 $g(3)=3$ を帰納法の最初に
用いて $g(k) \leq 2k-3$ を証明し、同時に予想 2 を与えてい
る。

定理 2 (Mader). $k \geq 4$, $\lambda(G) \geq k$ のとき、 G の任意の
2 点 s, t に対して、 s と t を結ぶパス P が存在して、

$$\lambda(G - E(P)) \geq k-2.$$

(ここで $G - E(P)$ は G から P の辺を除いてえられるグラフを
あらわす。)

予想 2 (Mader). $k \geq 4$, $\lambda(G) \geq k$ のとき、 G の任意の
2 点 s, t に対して、 s と t を結ぶ 2 本の辺素なパス P_1 、
 P_2 が存在して、 $\lambda(G - E(P_1) - E(P_2)) \geq k-2$.

(Mader [2] は $k=4$ のとき予想 2 を証明した)。

ここでは、 k が偶数のとき予想 2 を証明し、定理 1 の証
明に用いている。

定理 3. $k \geq 4$ even, $\lambda(G) \geq k$, f_1, f_2, g は G の辺で
 $g \neq f_i$ ($i=1, 2$), s と t は G の点、

$\Rightarrow$ (1) f_1 と f_2 を通って g を通らないサイクル C が存在し
て、 $\lambda(G - E(C)) \geq k-2$.

(2) f を通り、 g を通らない s と t を結ぶパス P が存在して、
 $\lambda(G - E(P)) \geq k - 2$.

(ここで P と C は同じ点を 2 回以上通ってもよいが、辺は高々 1 回しか通れない。)

(定理 1 の証明の方針)

$\lambda(G) \geq n$ (≥ 4) で点の対の組 $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$ が与えられているとき、定理 3 を用いて、適当な 2 組の点の対 $(s_i, t_i), (s_j, t_j)$ ($i \neq j$) に対して、それらを結ぶ辺素なパス P_1, P_2 があって、 G から P_1 と P_2 の辺を除いたグラフから少し変形してグラフ G' を作り、 $\lambda(G') \geq n - 3$ とできることを示す。 $g(3) = 3$ を帰納法の最初に用いると定理 1 の結果がえられる。

定理 1 と定理 3 の証明は、J. Combinatorial Theory Ser. B に掲載予定である。

References

1. T. Hirata, K. Kubota, and O. Saito, A sufficient condition for a graph to be weakly k -linked, J. Combin. Theory Ser. B 36 (1984), 85-94.

2. W. Mader, Paths in graphs, reducing the edge-connectivity only by two, *Graphs and Combin.* 1 (1985), 81-89.
3. H. Okamura, Multicommodity flows in graphs II, *Japan. J. Math.* 10 (1984), 99-116.
4. C. Thomassen, 2-linked graphs, *European J. Combin.* 1 (1980), 371-378.