

2次元離散バネ定数系の逆問題について

城西大(理) 岩村 覚三 (Kakuzo Iwamura)

城西大(理) 出口 洋三 (Youzou Deguchi)

要旨

2次元平面内に格子状になめらかに連結されたバネ定数系の外周上の各連結点に外力 F_i をくわえた時の点 P_i の変位 e_i を F_i と共に観測してそれぞれのバネ定数 K_i を求める問題を扱う。段数が増えたとき求められなくなる理由を示し、反例をあたえる。

1. 一意にもとまるケース

図1(a)の様に長さ a の4本のバネ k_1, k_2, k_3, k_4 がなめらかに連結されているとする。各点 P_i に外力 $F_i = (F_{ix}, F_{iy})$ を加えたら(b)の様に变形し P_i は $e_i = (e_{ix}, e_{iy})$ だけ変位し P_i' になったとする。変形後の各バネの傾き角を t_i とすると

$$\tan(\pi + t_1) = (e_{2y} - e_{1y}) / (a + e_{2x} - e_{1x})$$

$$P_1 P_2 = ((a + e_{2x} - e_{1x})^2 + (e_{2y} - e_{1y})^2)^{1/2}$$

$$a \sim P_1 P_1 = k_1 (-\cos t_1 F_{1x} + \sin t_1 F_{1y})$$

より k_1 がもとまる。 k_2, k_3, k_4 についても同様。なお、このバネ定数系を4つ連結した 2×2 タイプの問題も同様にして解ける。

2. 境界上のバネ定数の決定

図2(a)のような4x4タイプを考える。点 i, j 間のバネ定数を $k_{ij}=k_{ji}$ とかく。

点 i の座標を (x_i, y_i) , 変位を (u_i, v_i) で表す。

点1を除く境界上の全ての点(2, ..., 25)を平面上に固定する($u_j=v_j=0$

for $j=2, \dots, 25$)。 $v_1=0$ のもとで $u_1>0$ とし、 f_{1x} を観測する。

$$f_{1x}=k_{12}u_1 \quad (1)$$

より k_{12} が決定出来る。次に点2を除く境界上の全ての点を平面上に固定する(u_j

$=v_j=0$ for $j=1, 3, \dots, 25$)。 $v_2=0$ のもとで $u_2>0$ とし、点2に加える外力 f_{2x} を観測す

る。

$$f_{2x}=-(k_{12} + k_{23})u_2 \quad (2)$$

において(1)より k_{12} が既知であるから(2)より k_{23} がもとまる。以下同様。

この議論は一般の $m \times n$ タイプにも適用出来る。こうして任意長方形の外周上の

バネ定数が決定できる。この方法を端点法と呼ぶ。

定理 $m \times n$ タイプの問題を考える。 $m \leq 3$ または $n \leq 3$ ならば、端点法適用後に

1節と同様に考えて全てのバネ定数 k_{ij} を決定する事が出来る。

3.一意にもとまらないケース

図2(a)の様にバネ定数の異なる一定の長さ a のバネ40個がなめらかに連結

されているとする。先ず端点法により外周上の全てのバネ定数を決める。次に全ての外周上の点に外力 f_j をくわえてバネ系を静止させる。点 j は (u_j, v_j) 変位し j' に移ったとする (図 2 (b))。四角系 $1'2'7'6'$ に対し 1 節を適用して k_{27} , k_{67} を決定できる (バネ定数が決定されたバネは点線に変えてある)。点 $3'$ における力のつり合いより (図 2 (c))

$$f_{8',3'} = -(f_{2',3'} + f_{4',3'} + f_3)$$

となる。これより直線 $3'8'$ の方向は決まるが $8'$ の座標は決まらない。

同様に $12'$, $14'$, $18'$ の座標が決まらず

$$k_{38}, k_{1112}, k_{1415}, k_{1823}$$

が決定できない。この場合、バネ定数を決めるアルゴリズムが存在しない。

図 3 (a) の様な バネ定数 k_1 , k_3 のそれぞれ 3 本のバネにより作られた大小 2

つの正 3 角形がバネ定数 k_2 、バネ長 b の 3 本のバネによって対称かつなめら

かに連結されているとき図 3 (b) ように点対称な外力 F を受けて点 A, B, C が

一定量移動しているとする。この条件を満たすバネ定数 k_1 , k_2 , k_3 は無限個

存在する。この場合、図 3 (b) の形の観測をなんべん行っても k_1 , k_2 , k_3

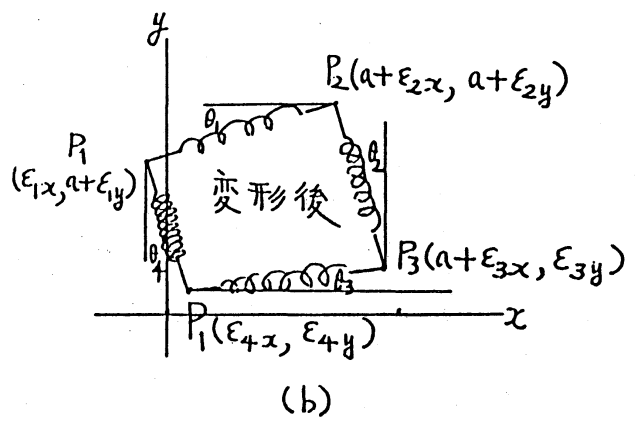
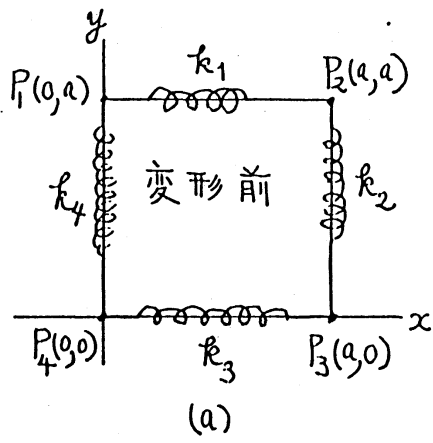
をもとめることは出来ない。

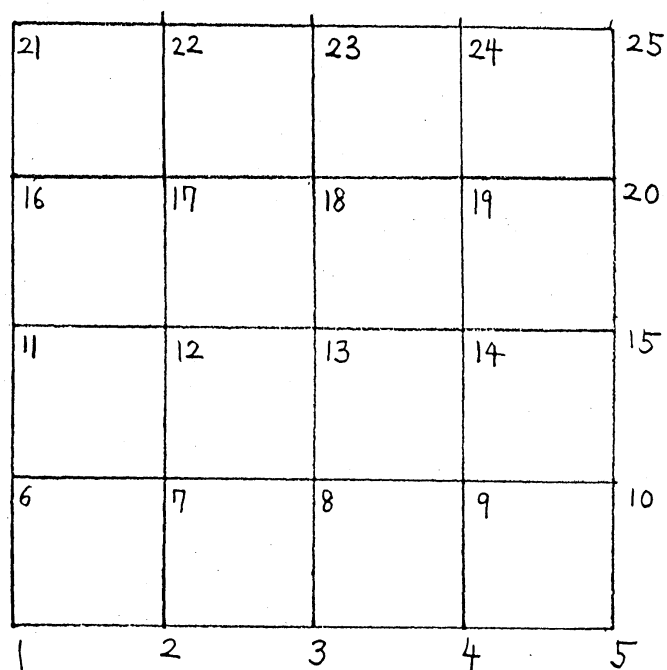
予想 図 3 (a) 2 次元バネ定数系において、どの様な外周上の外力、変位をどれ

だけ多数組あたえてもバネ定数 k_1 , k_2 , k_3 を決定することはできない。

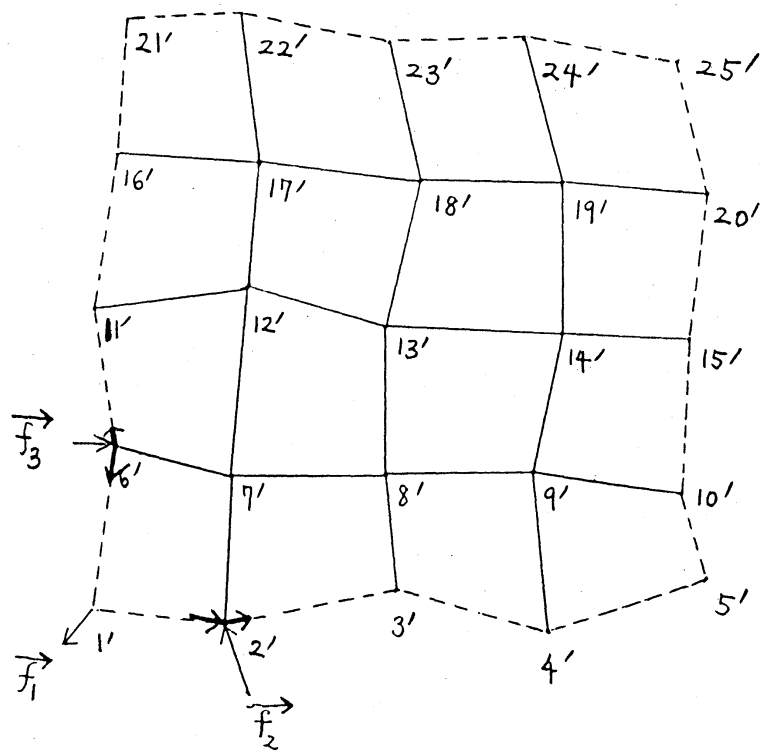
-----文献-----

- (1) 三好 俊郎、有限要素法入門、培風館、1978・
- (2) Gen Nakamura and Gunther Uhlmann, Uniqueness for Identifying
Lam Moduli by Dirichlet to Neumann Map, 1990.
- (3) 結城 良治・木須 博行、境界要素法による弾性解析、培風館、1987・

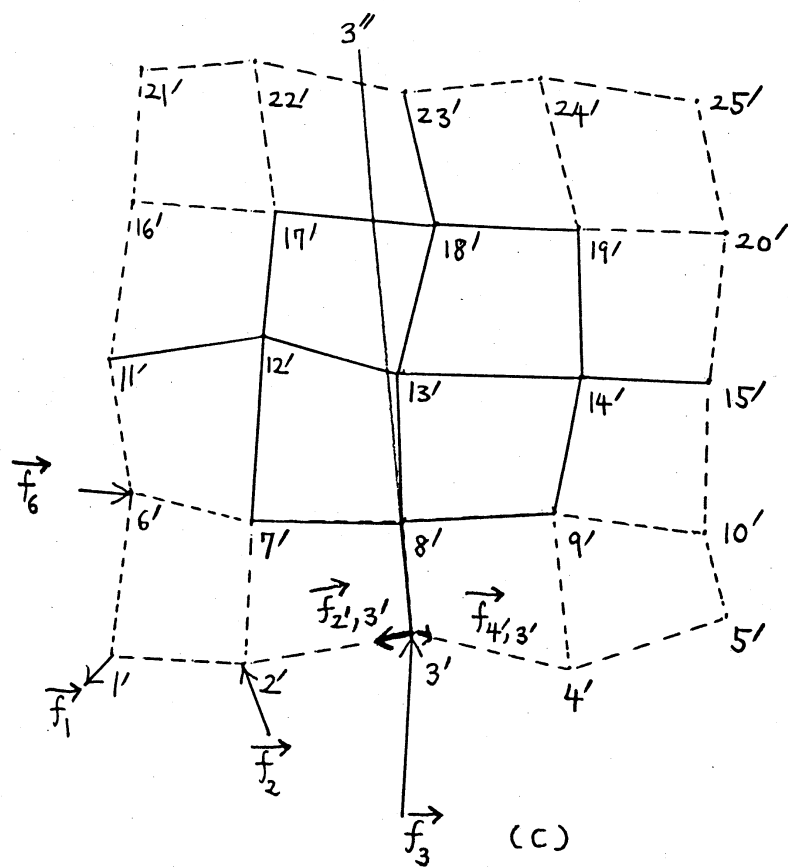




(a)



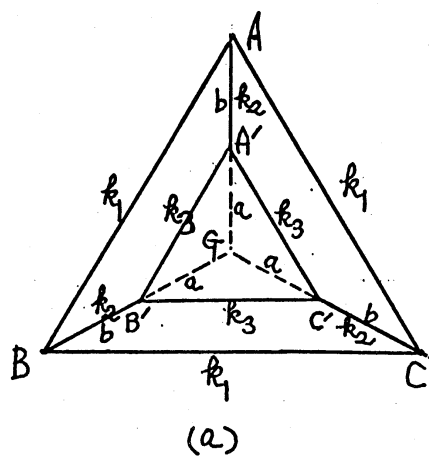
(b)



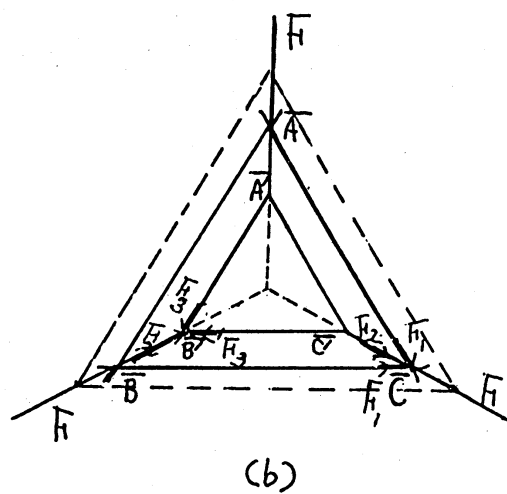
□

2

变形前



变形后



□

3