

正規定常過程の T -正値性とマルコフ性

—— Langevin 方程式 ——

—— 振動散逸定理 ——

東大 理 岡部靖憲

§1 序 T -正値性と振動散逸定理

場の理論より出てきた概念である T -正値性^[1]は、確率過程論の立場より、その数学的構造を明らかにし、振動散逸定理の数学的理論を立てることを目的にし、この報告では、その一端を述べることにする。

$X = (X(t); t \in \mathbb{R})$ を、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された実数値の正規定常過程とし、平均は 0 で、共分散函数 R は連続とする:

$$R(t-s) = E(X(t)X(s)) \equiv (X(t), X(s)).$$

Hilbert 空間 M を、 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の中で、 $X(t) (t \in \mathbb{R})$ すべてによって張られる閉部分空間によって定義し、 M^+ (resp M^-) を、 $X(t) (t \geq 0)$ (resp $X(t), t \leq 0$) によって張られる閉部分空間とする。 M^+ は未来、 M^- は過去を表わす空間である。このとき、 M 上で、unitary な対称な、時間反転 (time-reflection) とよばれる作用素 T が、

$$TX(t) = X(-t)$$

によって定義される。 P_{M^+} も、 M から M^+ への直交射影を表わすものとするとき、 X が T -正値性をもつとは、

$$P_{M^+} T P_{M^+} \geq 0$$

が成り立つときをいう。

このことは、 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}, \forall t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$ に対して、

$$\sum_{j,k=1}^n \xi_j R(t_j + t_k) \overline{\xi_k} \geq 0$$

が成り立つことと同値である。

従って、Widder の研究よりもわかることだが、共分散函数 R が、 $[0, \infty)$ 上の非負の有界測度 $d\sigma$ によって、

$$R(t) = \int_0^\infty e^{-it\lambda} d\sigma(\lambda) \quad (t \in \mathbb{R})$$

と表現されることも同値である。 ([4])。

我々の目的は、 T -正値性をもった X を支配する運動方程式を解くことであるが、その背景を少し説明する。正数 λ に対して、

$$R_\lambda(t) \equiv e^{-it\lambda} \quad (t \in \mathbb{R})$$

は、 T -正値性をもった正規定常過程の共分散函数となるが、上の表現式は、 T -正値性をもつ一般の正規定常過程の共分散函数 R は、

$$R(t) = \sigma(\{0\}) + \int_{(0, \infty)} R_\lambda(t) d\sigma(\lambda)$$

と分解されることを意味している。一方、 R_λ を共分散にもつ正規定常過程 X_λ :

$$R_\lambda(t-s) = (X_\lambda(t), X_\lambda(s))$$

は、Ornstein-Uhlenbeckのブラウン運動とよばれる。次の Langevin equation とよばれる確率微分方程式によって記述される:

$$\underline{X_\lambda(t) - X_\lambda(s) = -\lambda \int_s^t X_\lambda(u) du + (2\lambda)^{\frac{1}{2}} (B(t) - B(s)) \quad (s < t)}$$

標準的には、

$$\underline{\dot{X}_\lambda(t) = -\lambda X_\lambda(t) + (2\lambda)^{\frac{1}{2}} \dot{B}(t)}$$

我々の最初の目的は、 T -正値性をもつ正規定常過程に対して、その運動を支配する方程式として、無限次元の Langevin equation ^[2] を導入することによって、特徴付けることである。

次の目的は、 X_λ を支配する Langevin 方程式において、

drift の係数、diffusion 係数がそれぞれ $-\lambda, (2\lambda)^{\frac{1}{2}} (\lambda > 0)$ となるようにするのは、何故か。もう少し、一般に、drift 係数を $-\alpha$ 、diffusion 係数を β ($\alpha > 0, \beta \neq 0$) とする拡散方程式

$$\dot{X}(t) = -\alpha X(t) + \beta \dot{B}(t)$$

に内蔵する性質は何なのか。これに答えるのが、いわゆる

Einstein の関係式 とよばれるもので、拡散散逸定理の静的な部分を表わしている。このことと、無限次元の Langevin 方程式に対して、又、多次元の正規拡散方程式に対して調べてみる。

前半の目的である、無限次元の Langevin 方程式を求め特徴付ける際に、Lax-Phillips の散乱理論の一端が用いられた。

このことを、さらに追求すると、S-行列が具体的に計算出来、Langmuir 方程式を完全に記述する。さらに、その具現化として、弦の振動方程式がえられる。一方、もともと、T-正値性は、場のモデルを構成するために導入されたものであったから、我々の場合にも、場の作用素がえられる。Langmuir 方程式を介して、逆散乱問題と場の作用素との関係が深くものと思われる。これは、最近、佐藤-三輪-神澤氏の研究の一次元のモデルを与えているものと思われる。ただし、相互作用は、それほど強くない (Jacobi 行列)。このことに関して、別の機会に報告したいと思う。

§2. Hamiltonian system

M^+ を、 $P_M Y$ ($Y \in M^+$) によって張られる内部分空間とする。このとき、

Theorem 2.1. $\exists H$: 擬自己共役作用素 on M^+)

(i) 単純スペクトルをもち、 $X(\omega)$ が M^+ の generating vector である。

(ii) $R(t) = (e^{-itH} X(\omega), X(\omega))$.

(iii) $d\sigma(\lambda) = d(E(\lambda) X(\omega), X(\omega))$, 但し $(E(\lambda); \lambda \in \mathbb{R})$ は H の単位分解。

$M. H. Stone's Theorem$ を使うことによって、

Theorem 2.2 次の三条件は同値である:

(i) X は 純非決定的

(ii) $d\sigma(\{0\}) = 0$.

(iii) $H > 0$.

そこで、我々は、三つ組 $[X, H, x_0]$ が次の条件を満足するとき、Hamilton system といふ。

(H.1) X は H -s.p., $x_0 \in X$.

(H.2) H は 正の自己共役作用素で、単純スペクトルを持ち、 x_0 がひとつの生成元である。

Theorem 2.3

純非決定的、T-E値性をもつ正規定常過程 X



Hamilton system $[X, H, x_0]$

これは、 $X(t) \longleftrightarrow x_0$

$$R(t) = (e^{-itH} x_0, x_0)$$

§3. 無限次元の Langevin 方程式

$[X, H, x_0]$ をひとつの Hamilton system とする。

Theorem 2.3 で与えられた正規定常過程 X は 純非決定的ゆえ、標準表現が可能で、前向き表現に与えられる ブラウン運動を $(B(t), t \in \mathbb{R})$ とする:

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi}^{-1} E(t-s) dB(s), \quad E \in L^2((0, \infty))$$

$$\sigma(X(s); s \leq t) = \sigma(B(s_2) - B(s_1); s_1 < s_2 \leq t).$$

H-sp $\mathcal{H}$ 上.

$$\mathcal{H} = \left\{ Y \in L^2((0, \infty) \times \Omega, d\sigma \times dP); \exists f \in L^2((0, \infty) \times \mathbb{R}, d\sigma \times d\omega) \right. \\ \left. Y(\lambda, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda, s) dB(s, \omega) \right\}$$

によって定義する。

Theorem 3.1 $\exists \mathcal{F} = (\mathcal{F}(t); t \in \mathbb{R})$

- (i) $\mathcal{F}(t): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ bounded linear
- (ii) $\mathcal{F}(0) = 0, (\mathcal{F}(s)x, \mathcal{F}(t)y) = s \wedge t \cdot (x, y)$
- (iii) $\bigvee_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{F}(t)\mathcal{H} = \mathcal{H}.$

Remark 3.1 2の $\mathcal{F}$ は、ブラウン運動 $(B(t); t \in \mathbb{R})$ を用いて表わされる。2の $\mathcal{F}$ を operator-valued の Brown 運動 とよぶことにする。

2の $\mathcal{F}$ を用いて、 $\mathcal{H}$ より $\mathcal{H}$ への作用素 $\mathcal{K}(t)$ を、

$$\mathcal{K}(t)x \equiv \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(ds) \chi_{(0, \infty)}(\bullet - s) \sqrt{2H} e^{-(t-s)H} x$$

によって定義する。積分は、 $\mathcal{F}$ に関する確率積分である。

$\mathcal{K}(t)$ の集まりを $\mathcal{K} \equiv (\mathcal{K}(t); t \in \mathbb{R})$ とおくとき、

Theorem 3.2

- (i) $\mathcal{K}$ は 定常過程である; 即ち、
- $$(\mathcal{K}(s)x, \mathcal{K}(t)y) = (e^{-(t-s)H} x, y).$$

が成り立つ。

(ii) X は 純非決定的である; $\mathcal{X}^-(t) \equiv \bigvee_{s \leq t} X(s)X$ とおく

$$\text{とて, } \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{X}^-(t) = \{0\}$$

(iii) X は マルコフ性をもち; $\mathcal{X}^+(t) \equiv \bigvee_{s \geq t} X(s)X$,

$$\mathcal{X}^{+-}(t) \equiv \bigvee \{P_{\mathcal{X}^-(t)} Y; Y \in \mathcal{X}^+(t)\}, \quad \mathcal{X}(t) \equiv X(t)X$$

とおくとき、

$$\mathcal{X}^{+-}(t) = \mathcal{X}(t)$$

もつと詳しく、 $P_{\mathcal{X}(t)} X(t+s)X = X(t)T_s X \quad (t \in \mathbb{R}, s > 0)$.

(iv) X_0 は X の generating vector である;

$$\bigvee_{\mathcal{X}(0)} \{P_{\mathcal{X}(0)} X(t)X_0, t \in [0, \infty)\} = \mathcal{X}(0).$$

(v) X は 次の 確率微分方程式の一解である;

$$s < t, \quad X \in \mathcal{A}(H)$$

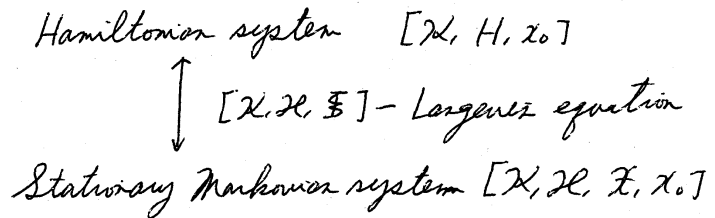
$$X(t)X - X(s)X = - \int_s^t X(u)H X du + (\xi_t - \xi_s) \sqrt{2} H X.$$

この方程式を、 $[X, \mathcal{X}, \mathcal{X}]$ -Langevin equation と名付けた。

そこで、我々は、四つ組 $[X, \mathcal{X}, X, X_0]$ が Theorem

3.2 の (i) ~ (iv) を満足するとき、定常マルコフ系 とよぶこ

とにする。

Theorem 3.3§4 付録動散逸定理

次の拡散方程式を考えよう。

$$dX(t) = -\alpha X(t)dt + \beta dB(t) \quad \alpha > 0, \beta \neq 0$$

この diffusion の transition probability density $p(t, x, y)$ は、

$$\begin{cases}
 p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi\Lambda(t))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(y - e^{-\alpha t}x, \Lambda^{-1}(t)(y - e^{-\alpha t}x))} \\
 \Lambda(t) = \frac{\beta^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t})
 \end{cases}$$

従って、

$$p(t, x, y) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi \frac{\beta^2}{2\alpha})^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y^2}{2 \frac{\beta^2}{2\alpha}}} = N(0, \frac{\beta^2}{2\alpha})(y)$$

即ち $p(t, x, y)$ の不変測度が $N(0, \frac{\beta^2}{2\alpha})(y)$ である。これを正規化即ち、 $\frac{\beta^2}{2\alpha} = 1$ としたとき、§12のへた、Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動を記述する Langevin equation であったと理解される。

もっと、一般に、次の線型の確率微分方程式を考えよう。

$$dX(t) = A \cdot X(t)dt + B dB(t)$$

但し A は $N \times N$ -matrix, B は $N \times r$ -matrix,

$B(t)$ は r 次元のブラウン運動

次の完全制御のための条件を与えた。

$$\text{rank} [B, AB, A^2B, \dots, A^{N-1}B] = N$$

このとき、上の diffusion の transition probability density $P(t, x, y)$ は存在し

$$\begin{cases} P(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det \Lambda(t))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (y - e^{tA}x, \Lambda^{-1}(t)(y - e^{tA}x))} \\ \Lambda(t) = \int_0^t e^{sA} B B^* e^{sA^*} ds \end{cases}$$

と表現される。

Theorem 4.1 次の三条件は同値である:

(i) A の固有値の実部がすべて負 (stable)

(ii) $\exists \Lambda$: pos. definite sym. $\rightarrow$
(7.1)

$$A\Lambda + \Lambda A^* = -B B^*$$

(iii) $P(t, x, y)$ は確率測度の不変測度をもち、それは

$$N(0, \Lambda)(y) dy$$

で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{このとき、} & \begin{cases} P(t, x, y) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} N(0, \Lambda(\infty))(y) \\ (*) \quad \Lambda(\infty) = \int_0^\infty e^{sA} B B^* e^{sA^*} ds \end{cases} \end{aligned}$$

Remark 4.1 Theorem 4.1 (ii) の関係式が、Einstein の関係 とよばれる。その数学的特徴付けが、(X) である。([5]).

最後に、§3 の Langevin equation に対して見ておこう。

dim $\mathcal{X} = N < \infty$ $q \in \mathbb{R}$.

このときは、 H の固有ベクトル e_n を bases にとり、 $\mathcal{X}(H)$ を座標表現すると、Theo 3.2 (vi) の $[\mathcal{X}, \mathcal{X}, \xi]$ -Langevin equation は、

$$\begin{aligned} d \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^N}}{\eta}(t) &= - \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^N}}{\left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & \lambda_N \end{array} \right)} \eta(t) dt + \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^N}}{\mu} \cdot d \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^N}}{B}(t) \\ (He_n &= \lambda_n e_n, \quad \mu_n = \frac{\sqrt{2\lambda_n}}{\lambda_n}, \quad X(0) = \sum_{n=1}^N x_n e_n) \end{aligned}$$

と書ける。これは、初 $\mathcal{X}$ にのべた特徴の場合の、揺動散逸定理が成り立つ。

dim $\mathcal{X} = \infty$ $q \in \mathbb{R}$.

この制限は、 H は、固有ベクトル e_n に対して決まるとし、固有値 λ_n が $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} < \infty (s > 0)$ を満足してゐるとする。このときは、前と同様に、 $[\mathcal{X}, \mathcal{X}, \xi]$ -Langevin equation は、

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \ell_2}}{d\eta}(t) = - \underset{\substack{\uparrow \\ H}}{\left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{array} \right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \ell_2}}{\eta}(t) dt + \underset{\substack{\uparrow \\ \ell_2}}{\mu} \cdot d \underset{\substack{\uparrow \\ \ell_2}}{B}(t)$$

となる。このとき、

$$\left\{ \begin{aligned} E(e^{\langle \eta, \eta(t) \rangle} | \eta(0) = \xi) &= e^{\langle \eta, e^{-tH} \xi \rangle - \frac{1}{2} \langle \eta, A(t) \eta \rangle} \\ \xi, \eta &\in \ell_2 \\ (A(t))_{nn} &= (\lambda_n + \lambda_n)^{-1} \mu_n^2 (1 - e^{-(\lambda_n + \lambda_n)t}) \end{aligned} \right.$$

と与るから、

$$(\Lambda(\infty))_{nn} \equiv \frac{\Lambda_n \Lambda_n}{\Lambda_n + 1}$$

と亦く2と12より2、

$$E(e^{i(\eta, \eta^{(1)})} | \eta^{(0)} = \xi) \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}(\eta, \Lambda(\infty)\eta)}$$

が成り立つ。と312、

$$H \cdot \Lambda(\infty) + \Lambda(\infty) H = \Lambda \cdot \Lambda^*$$

が成り立つ。従って、この意味では、無限次元のときも、拡散過程の生成が成り立つ。

一般のときは、Jacobi 行列と関係して2 < 3 であるが、別の機会に報告する。

文献

- [1] G.C. Hegerfeld. From euclidean to relativistic fields and on the notion of Markov fields, *Comm. math. Phys.* 35(1974), 155-171.
- [2] J. T. Lewis & L.C. Thomas. A characterization of regular solutions of a linear stochastic differential equation *Zeitschr. für Wahr.*, 30 (1974), 45-55
- [3] 岡部 靖憲. 正規定常過程の T-正値性とマルコフ性 — Langevin equation — *Sem. on Prob.* 47 (1977), 他7編
- [4] L. Streit & T. Hida. On Quantum theory in terms of white noise, *Pre-Print.*
- [5] 掘原 淳一, ランジュバン方程式: 岩波(1977) 以上。