

AND-OR 木の均衡点：確率制約がある場合

首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻

鈴木 登志雄* toshio-suzuki@tmu.ac.jp

仁井田 哲尚† yn.sputnik@gmail.com

平成 27 年 3 月

概要

一様二分 AND-OR 木を考え、 d をその真理値割り当て上の確率分布とする。Liu and Tanaka [2007, Inform. Process. Lett.] は以下を示した。「 d が ID (独立分布) の中で均衡値を実現するならば、 d は IID (独立同分布) である」

実数 r ($0 < r < 1$) に対して、我々は制約「 $p(= \text{prob}[\text{木のルートが値 } 0 \text{ をもつ}]) = r$ 」を考える。この制約をみたす ID だけを考えると、上記と同様の結果がやはり成り立つ。解法の鍵となる手法は以下の通りである。ここでは OR-AND 木上の IID を考える。cost はルートの値を求めるまでにアクセスするリーフ個数の期待値である。

(1) cost / p は (リーフの) 確率 x の減少関数である。

(2) cost' / p' (導関数の比) もまた、 x の減少関数である。

1 背景

概要に述べた結果と証明手法を概観する。本研究は結果それ自体だけでなく、手法が興味深いと考えている。技術的詳細はプレプリント [7] の通りである。本稿はややくだけた解説記事であり、背景、あらすじと、理解の助けになる図表を示していく。

ゼロサム二人ゲームでミニマックス戦略を行うとき、ゲームの展開は樹形図で表され、これをゲーム木という。木のリーフには評価関数の値が割り当てられる。通常、評価関数を何回呼び出したかによってコストを評価する。深さ優先ミニマックス探索を改良し、探索不要な枝を切り捨てる探索アルゴリズムとして、アルファ・ベータ法 (alpha-beta pruning) がよく知られている。

ゲーム木におけるアルファ・ベータ法の効率を厳密に数学的に評価するのは意外と難しい。理由の一つは、アルファ・ベータ法に関する様々な概念を数学的にわかりやすく定式化することが難しいことにある。Knuth-Moore (1975) [2] は黎明期の研究を数学的に体系化した。

アルゴリズムと真理値割り当てをプレイヤーとみることにより、ゲーム理論的な均衡値が自然に導入される。つまり、アルゴリズムはなるべくコストを下げたい、真理値割り当てはなるべくコストを上げたいという設定を考える。リーフの探索優先順位をどう設定するかによって、様々なアルファ・ベータ法アルゴリズムが得られる。途中までの探索履歴に応じて、次の探索先を選んでよいものとする (こ

*Toshio Suzuki. 本研究は部分的に学術振興会科研費 (C) 22540146 および (B) 23340020 の援助を受けた。

†Yoshinao Niida. 現所属 パテントリザルト

のようなアルゴリズムを undirectional とか adaptive という)。個々のこうした探索優先順位が、アルゴリズムとしての単純戦略である。また、個々の真理値割り当てが、真理値割り当てとしての単純戦略である。アルゴリズムと真理値割り当ての一方、あるいは両方について混合戦略を考える（単純戦略について確率の重みをつけて加重平均をとる）ことにより、均衡値を扱えるようになる。とくに Yao (1977) [10] はフォンノイマンのミニマックス定理の変種について考察しており、その形のミニマックス定理は Yao の原理の名で知られている。これは片方だけ単純戦略、もう片方が混合戦略である場合のミニマックス定理である。

本研究では確率分布が ID（独立分布）で評価関数が二値である場合を扱う。その背景を手短に振り返ろう。Baudet (1978) [1] は [2] を発展させ、真理値割り当て上の IID（独立同分布）に対するアルファ・ベータ法のコスト期待値について漸近的な評価を与えている。Pearl (1980, 1982) [4, 5] および Tarsi (1983) [9] は、一定の条件の下でアルファ・ベータ法が最適であることを示している。評価関数が二値である場合は、いくつかの意味で興味深い。Baudet [1] は離散的な場合、二値の場合、連続的な場合をいずれも論じているが、二値の場合についてとくに精密な評価式を与えている。また、二値の場合は、リーフが「勝ち」と「負け」いずれかにラベル付けされている場合とも解釈できる [4]。評価関数が二値の場合、ゲーム木は AND-OR 木となる。すなわち、ルートが AND ゲートであり、以下 OR の層と AND の層が交互に現れる。この場合、リーフはブール変数であり、木はブール式となる。真理値割り当ては与えられているが、当初、各変数の値は隠されている。コストとしては時間計算量でなく、値を取得した変数の個数を用いる。

このように、AND-OR 木は人工知能（知識情報処理）におけるゲーム木探索アルゴリズムの文脈からも、また、命題論理の計算量の観点からも興味をもてる対象である。

Saks-Wigderson (1986) [8] は、独立同分布とは限らない、相関のある分布について研究した。彼らは Yao の原理と Tarsi の手法を発展させ、乱択アルゴリズムの均衡値を評価している。

Saks-Wigderson の研究を踏まえ、Liu-Tanaka (2007) [3] は真理値割り当てが混合戦略、アルゴリズムが単純戦略である場合について、独立分布とそうでない分布に場合分けして研究した。木としては二分木で、しかも一様なものを考える。ここでいう一様とは、すべての葉の高さ（深さ）が同じであることを指す。一連の結果の一つとして、彼らは次のことを述べている。

主張 1 「 d が ID の中で均衡値を実現するならば、 d は IID である」

証明は単に「It is not hard」と書かれている。たしかに一見したところ、これはラグランジュの未定乗数法と帰納法の単なる演習問題のように見える。ところがそれは早計なのである。

高さ $h+1$ の木について、ID の中で均衡値を実現する確率分布 d が与えられたとする。ルートの左部分木、右部分木それぞれに d を制限することにより、確率分布 d_L, d_R を得る。これらはそれぞれ、高さ h の木について、ID の中で均衡値を実現しない。したがって、単純な帰納法は適用できない。主張 1 を証明するにはなにかトリッキーなアイデアが必要である。

2 我々の結果と手法

そこで主張 1 を示すため、確率制約を導入する。 $0 < r < 1$ となる実数 r が与えられたとする。ID のうち、ルートの（値 0 をとる）確率が r であるものだけを考え、それを rID とよぼう。我々は以下を証明した。

定理 1 「 d が r ID の中で均衡値を実現するならば、 d は IID である」

定理の系としてもとの主張 1 が得られる。では、定理 1 をどのように証明するのか。

いま、 h を正の整数とし、高さ h の OR-AND 木を一つ固定し、その上の IID を考える。OR-AND 木を考える動機は、与えられた木のルート直下にある左部分木と右部分木を考えたいからである。個々のリーフの（値 0 をとる）確率を x とし、その変域を $0 < x < 1$ とする。OR-AND 木ルートの確率は x の関数である。これを $p(x)$ と表そう。また、ルートの値を求めるまでにアクセスするリーフ個数の期待値は、付随するアルゴリズムおよび x の関数である。しかし、いま考えている分布は IID なので、どのようなアルファ・ベータ法アルゴリズムを選んでもコスト期待値は変わらない。ゆえにコスト期待値もまた x の関数である。これを $c(x)$ で表そう。このとき、以下が成り立つ。この補題が、我々の証明の鍵である。

補題 1

- (1) 比 $c(x)/p(x)$ は減少関数である。
- (2) 導関数の比 $c'(x)/p'(x)$ もまた、減少関数である。

いま、高さ $h+1$ の AND-OR 木を考える。 h は正の整数である。左部分木、右部分木は高さ h の OR-AND 木であり、それぞれの個々のリーフの確率が x と y 、それぞれのルートの確率が z と w であるとする。

ここで、次のような条件付き極値問題を考えよう。図 1 において、 $\wedge$ は AND ゲート、 $\vee$ は OR ゲートを表す。

条件付き極値問題 1

問題のタイプ：最大化。

文字はノードにおける（値 0 をとる）確率を表す。

主変数： z 。

目的関数：ルートの値を求めるコスト期待値。

付随するアルゴリズムは左から右へ探索する。

制約条件：

- r は確率制約 (固定, $0 < r < 1$),
- $1 - \sqrt{1-r} < z < r$,
- $(1-z)(1-w) = 1-r$.

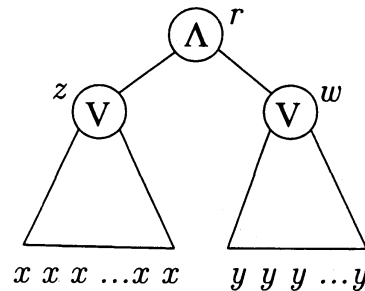


図 1: 高さ $h+1$ の AND-OR 木

補題 1 により、目的関数は与えられた开区間において減少関数であることがわかる。ここから、以下を得る。

補題 2 条件付き極値問題 1 において、解は一意的である。

補題 2 と組み合わせ論的な議論 [6], および帰納法によって, 我々の主定理である定理 1 が導かれる. そしてその系として, もとの主張 1 が導かれる.

3 グラフの概形

高さ h の OR-AND 木におけるコスト期待値とルートの確率をそれぞれ $c_{V,h}(x)$, $p_{V,h}(x)$ で表そう. $h = 1, 2, 3, 4$ に対して $c_{V,h}(x)/p_{V,h}(x)$ および $c'_{V,h}(x)/p'_{V,h}(x)$ のグラフの概形を示す.

まずは $c_{V,h}(x)/p_{V,h}(x)$ から.

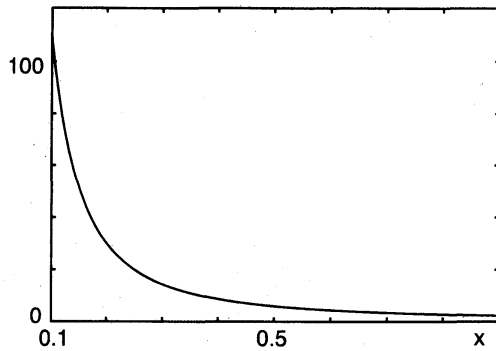


図 2: $c_{V,1}(x)/p_{V,1}(x)$ ($0.1 < x < 0.9$)

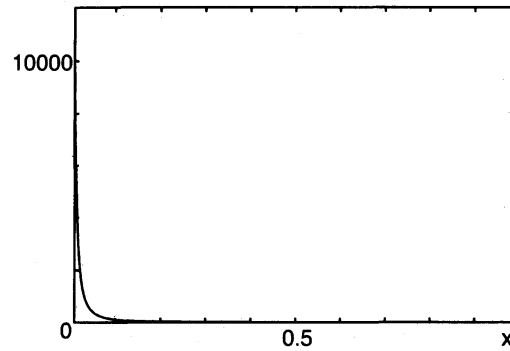


図 3: $c_{V,2}(x)/p_{V,2}(x)$ ($0.007 < x < 0.99$)

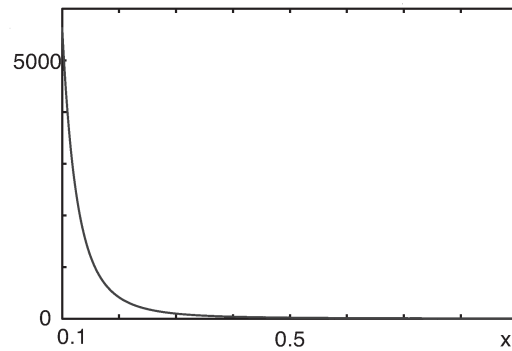


図 4: $c_{V,3}(x)/p_{V,3}(x)$ ($0.1 < x < 0.9$)

続いて $c'_{V,h}(x)/p'_{V,h}(x)$ の図を示す.

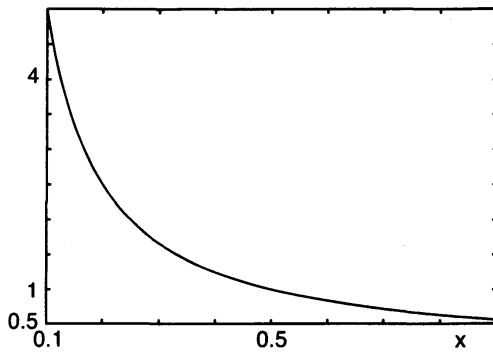


図 5: $c'_{V,1}(x)/p'_{V,1}(x)$ ($0.1 < x < 0.9$)

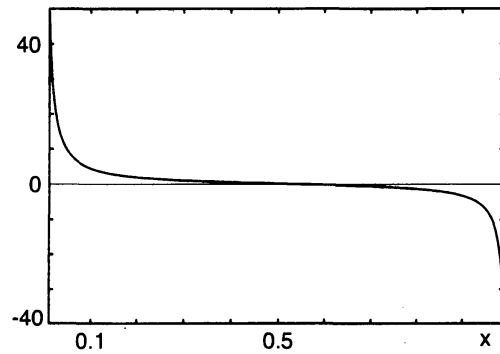


図 6: $c'_{V,2}(x)/p'_{V,2}(x)$ ($0.008 < x < 0.985$)

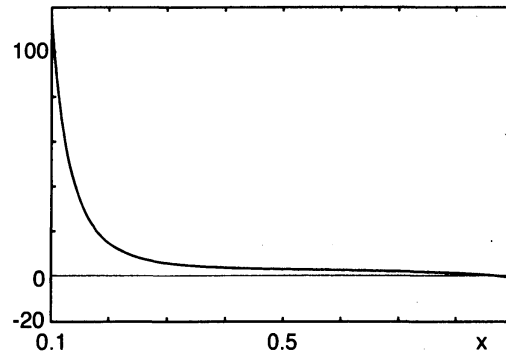


図 7: $c'_{V,3}(x)/p'_{V,3}(x)$ ($0.1 < x < 0.9$)

高さ 4 の場合のグラフについては [7] を参照されたい。本節では数値計算の例をグラフで観察しただけであるが、[7] においては任意の正の数 h に対して補題 1 を数学的に証明している。

4 展望

今後取り組むべき課題として、以下が考えられる。

- 深さ優先アルゴリズムの最適性についての検討
- 二分木でない場合への拡張
- リーフの値が二値ではない Min-Max 木への拡張

以下で第一の項目について述べる。次のような先行研究がある。

- d が IID $\Rightarrow \exists$ 深さ優先 かつ d に対して最適なアルゴリズム (Tarsi, 1983 [9]).
- d が (独立でも相関でもよい) すべての確率分布について均衡値を実現する (ただしアルゴリズムが動く範囲は、決定性アルゴリズムであれば深さ優先であってもなくてもよい)
 $\Rightarrow \exists$ 深さ優先 かつ d に対して最適なアルゴリズム (Saks and Wigderson, 1986 [8]).

以下の二つの問題は興味深い.

1. d が ID $\Rightarrow \exists$ 深さ優先 かつ d に対して最適なアルゴリズム?
2. d が ID について均衡値を実現する (ただしアルゴリズムが動く範囲は, 決定性アルゴリズムであれば深さ優先であってもなくてもよい)
 $\Rightarrow \exists$ 深さ優先 かつ d に対して最適なアルゴリズム?

謝辞

有意義な議論をしていただいた小川孝典氏と隈部正博氏に感謝する.

参考文献

- [1] G.M.Baudet, On the branching factor of the alpha-beta pruning algorithm, *Artif. Intell.*, 10 (1978) 173–199.
- [2] D.E.Knuth and R.W.Moore, An analysis of alpha-beta pruning, *Artif. Intell.*, 6 (1975) 293–326.
- [3] C.-G.Liu and K.Tanaka, Eigen-distribution on random assignments for game trees, *Inform. Process. Lett.*, 104 (2007) 73–77.
- [4] J.Pearl, Asymptotic properties of minimax trees and game-searching procedures, *Artif. Intell.*, 14 (1980) 113–138.
- [5] J.Pearl, The solution for the branching factor of the alpha-beta pruning algorithm and its optimality, *Communications of the ACM*, 25 (1982) 559–564.
- [6] T.Suzuki and R.Nakamura, The eigen distribution of an AND-OR tree under directional algorithms, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 42 (2012) 122–128. An online version may be found at the following.
http://www.iaeng.org/IJAM/issues_v42/issue_2/index.html
- [7] T.Suzuki and Y.Niida, Equilibrium Points of an AND-OR Tree: under Constraints on Probability, preprint, arXiv:1401.8157 [cs.AI] (2014).
- [8] M.Saks and A.Wigderson, Probabilistic Boolean decision threes and the complexity of evaluating game trees,
 In: *Proc. 27th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pp.29–38 (1986).
- [9] M.Tarsi, Optimal search on some game trees, *J. ACM*, 30 (1983) 389–396.
- [10] A.C.-C.Yao, Probabilistic computations: towards a unified measure of complexity. in: *Proc. 18th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, 1977, pp.222–227.