

Convergence of circle packing of finite valence to Riemann mapping

京大 理 後藤 泰宏
(Gotoh Yasuhiro)

本論文の目標

regular hexagonal packing に対する結果

$$f_\varepsilon \rightrightarrows f \quad (\text{loc. unif.}) \quad \dots \text{Rodin-Sullivan}$$

$$f_{\varepsilon\bar{\varepsilon}} \rightrightarrows 0 \quad (\quad \quad) \quad \left. \vphantom{f_{\varepsilon\bar{\varepsilon}} \rightrightarrows 0} \right\} \text{Rodin \& He}$$

$$f_{\varepsilon\bar{\varepsilon}} \rightrightarrows f' \quad (\quad \quad)$$

を finite valenced packing に対しても示すこと。

証明の方針は regular hexagonal packing の場合と同じであり、regular hexagonal packing に対する証明の紹介は別ページにあるはずなのでここでは idea 上の相異点 (次の①, ②) についてのみ紹介する。証明の流れは §1, §2 で紹介する。

① Length-Area-Isoperimetric Ineq. のかわりに (通常の extremal length に関する) Length-Area Method を利用 (§3)

② Schwarz lemma のかわりに Schwarz Pick lemma を利用 (§4)

Schwarz Pick lemma は Schwarz lemma よりはるかに強力であり、§4 では Schwarz Pick lemma 及び それを導くのに用いた Perron's Method について紹介する。

§1. Regular hexagonal packing における $f_\varepsilon \rightarrow f$, $f_{\varepsilon\bar{z}} \rightarrow f'$, $f_{\varepsilon\bar{z}} \rightarrow 0$ の証明の復習

記号 P_ε : 有界単連結領域 Ω 上の、半径 ε の円より成る regular hexagonal packing.

P'_ε : P_ε に対応する $D = \{|z| < 1\}$ 上の (normalized) Andreev packing.

Ω_ε : P_ε に対応する triangulation の support.

Ω'_ε : P'_ε 〃

$$S_n = \left(\sup \frac{\text{rad } c_j}{\text{rad } c_i} \right) - 1,$$

ここで $\sup$ は 与えられた円 C を中心とする n -generation となっているような任意の hexagonal packing, 及び

C と C に接する円 (計 7 個) の中の任意の 2 円の組 (C_i, C_j) について取る。

基本評価

$r_\varepsilon: \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^+$ を 「 $P_\varepsilon \ni C$ の中心 $\mapsto \frac{\text{rad } C'}{\text{rad } C}$ 」 の素直な拡張とすると、

$$|f_{\varepsilon\bar{z}}| = r_\varepsilon \cdot (1 + O(S_N))$$

$$|f_{\varepsilon\bar{z}}| = r_\varepsilon \cdot O(\sqrt{S_N})$$

$$|\mu_{f_\varepsilon}| = O(\sqrt{S_N})$$

$$\left(\begin{array}{l} \Omega \text{ の各 opt set } K \text{ 上} \\ N = \left\lceil \frac{d(K, \partial\Omega)}{2\varepsilon} \right\rceil \end{array} \right)$$

Rodin-Sullivan による $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ (loc. unif) の証明

(Ring lemma
・ Klein 群論 など)

Length-Area Ineq

$\Downarrow$
(infinite hexagonal packing
の一意性)

$\Downarrow$
(P'_ε の border circle の
半径 $< C \cdot (\log \frac{1}{\varepsilon})^{-1} \rightarrow 0$)

$$S_n \rightarrow 0 \xRightarrow{\text{基本評価}} \underbrace{\mu_{f_\varepsilon} \rightrightarrows 0}_{f_\varepsilon \rightrightarrows f}$$

Rodin 及び He による $f_{\varepsilon\bar{z}} \rightrightarrows f'$, $f_{\varepsilon\bar{z}} \rightrightarrows 0$ (loc. unif) の証明

Schwarz lemma

(Length-Area-Isoperimetric
Ineq)

$\Downarrow$
 h_ε : loc unif bdd

$\Downarrow$
(P'_ε の border circle の
半径 $< C \cdot \varepsilon^\alpha$)

(Riemann map,
q.c. map の
distortion estimate)

$\swarrow$
 $S_n \rightarrow 0$
基本評価

$$f_{\varepsilon\bar{z}} \rightrightarrows 0$$

$$\left(\|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \leq C (S_N + \varepsilon)^\alpha \right) \quad S_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$N = \left\lfloor \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor$$

$\swarrow$
Fefferman-Stein

$f_{\varepsilon\bar{z}} \rightarrow f$ in BMO

$$\|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \leq C \cdot \varepsilon^\alpha$$

$f_{\varepsilon\bar{z}} \rightrightarrows f'$

○ $S_n = O(\frac{1}{n})$ は He, 他は Rudin.

§2. Finite valenced packing への一般化

Packing P_ε の仮定

- 1) P_ε の valence $\leq k_0$ (各 $c \in P_\varepsilon$ が, P_ε の高々 k_0 の円
としか接しないということ.)
- 2) P_ε の circle の半径 $\leq \varepsilon$
- 3) $\sup_{z \in 2\Omega_\varepsilon} d(z, \partial\Omega) \leq \varepsilon$

記号

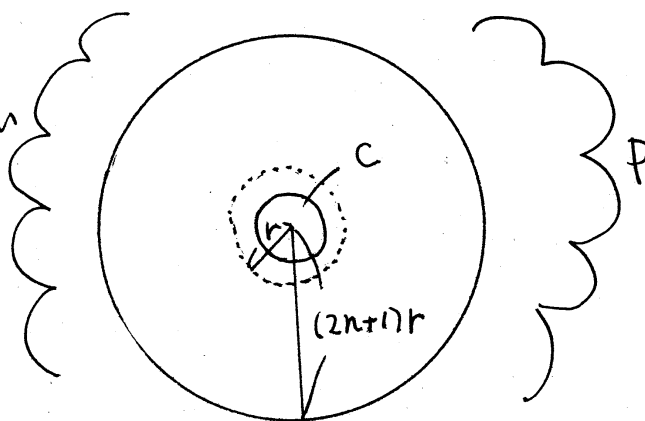
$P'_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, \Omega'_\varepsilon, f_\varepsilon, r_\varepsilon$ は先と同様に定める。

$$S_n = \left(\sup \frac{\text{rad } c_j / \text{rad } c_i}{\text{rad } c_j / \text{rad } c_i} \right) - 1$$

ここで $\sup$ は次の条件を満たす Packing P と circle $c \in P$ の組
(P, c) 及び, c と c に接する円 (高々 $k_0 + 1$ の) の中の任意の
2円の組 (c_i, c_j) について取る。

- 1) P の valence $\leq k_0$
- 2) P の circle の半径 $\leq r$
- 3) (c と同心, 半径 $(2n+1)r$ の円板) $\subset (P \text{ の support})$

P_ε の circle の半径比を cpt set 上
一様に評価することはもはやできない
が Ring lemma より f_ε は
 $K = K(k_0)$ - g.c map であり
g.c. map の理論が適用できる。



基本評価

$$|f_{\varepsilon z}| = r_{\varepsilon} (1 + O(S_N))$$

$$|f_{\varepsilon \bar{z}}| = r_{\varepsilon} \cdot O(\sqrt{S_N})$$

$$|\mu_{f_{\varepsilon}}| = O(\sqrt{S_N})$$

$$\left(\begin{array}{l} \Omega \text{ の各 cpt set } K \text{ 上 } r'' \\ N = \left\lfloor \frac{d(K, \partial\Omega)}{4\varepsilon} \right\rfloor \end{array} \right)$$

(注) $|f_{\varepsilon z}|$ の評価には $S_n \rightarrow 0$ (後出) を用いた。

 $f_{\varepsilon} \rightrightarrows f$ (loc. unif.) の証明

$$S_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

基本評価 $\searrow$
 $\mu_{f_{\varepsilon}} \rightrightarrows 0$

$$P'_{\varepsilon} \text{ の border circle の } \text{半径} < C \cdot \varepsilon^{\alpha} \rightarrow 0$$

$$f_{\varepsilon} \rightrightarrows f$$

 $f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'$, $f_{\varepsilon \bar{z}} \rightrightarrows 0$ (loc. unif.) の証明

$$\boxed{\text{Schwarz-Pick lemma}}$$

r_{ε} : loc. unif bdd

$S_n \rightarrow 0$
 基本評価) $\searrow$
 $f_{\varepsilon \bar{z}} \rightrightarrows 0$

Fefferman-Storn $\searrow$
 $f_{\varepsilon z} \rightarrow f'$ in BMO

$$P'_{\varepsilon} \text{ の border circle の } \text{半径} < C \cdot \varepsilon^{\alpha} \rightarrow 0$$

(Riemann map,
 g.c. map の
 distortion estimate)

$$\left(\|f_{\varepsilon} - f\|_{K, \infty} \leq C(S_N + \varepsilon)^{\alpha} \right. \\ \left. N = \left\lfloor \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor \right)$$

$$S_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\|f_{\varepsilon} - f\|_{K, \infty} \leq C \cdot \varepsilon^{\alpha}$$

$$f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'$$

よって新たに示すべきことは、以下の3つ。

$$\textcircled{1} S_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\textcircled{2} P'_\varepsilon \text{ の border circle の半径} < C \cdot \varepsilon^\alpha \quad (\rightarrow \S 3)$$

$$\textcircled{3} \text{ Schwarz-Pick lemma } (\rightarrow \S 4)$$

\textcircled{1} については、He による hexagonal packing についての証明がそのまま使える。(He-Rodin では He の証明との技術上の相異点が list up してあるだけである。)

\S 3. P'_ε の border circle の半径 $< C \cdot \varepsilon^\alpha$ なること.

$f_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow \Omega'_\varepsilon$ は $z_0 \in \Omega$ が 0 の近づくよう normalize したものである。

C : C' の半径が border circle 中最大であるような P の circle
(r : C の半径, r' : C' の半径とする。)

$$\gamma_1 := C \cap \Omega_\varepsilon$$

$$\gamma_2 := C_0 \cap \Omega_\varepsilon \text{ の } z_0 \text{ を含む成分 } (C_0 \text{ は } C \text{ と同じで } z_0 \text{ を通す円})$$

Γ : Ω_ε 内で γ_1 と γ_2 を結ぶ curve family

G : 円の領域  $\subset D (= \text{単位円板})$

C の取り方より $G \subset \Omega'_\varepsilon$.

f_ε は C の中心を中心とする star region 上 (scale をかえれば) 一様に bi-Lipschitz なので。

$0 < \exists s < 1$, $(C' \text{ と同じで半径 } s r' \text{ の円}) \cap G$ は $f_\varepsilon(\gamma_1)$ の内側にお

そこで

$$\gamma'_1 := (C' \text{ と同心で半径 } sr' \text{ の円}) \cap G$$

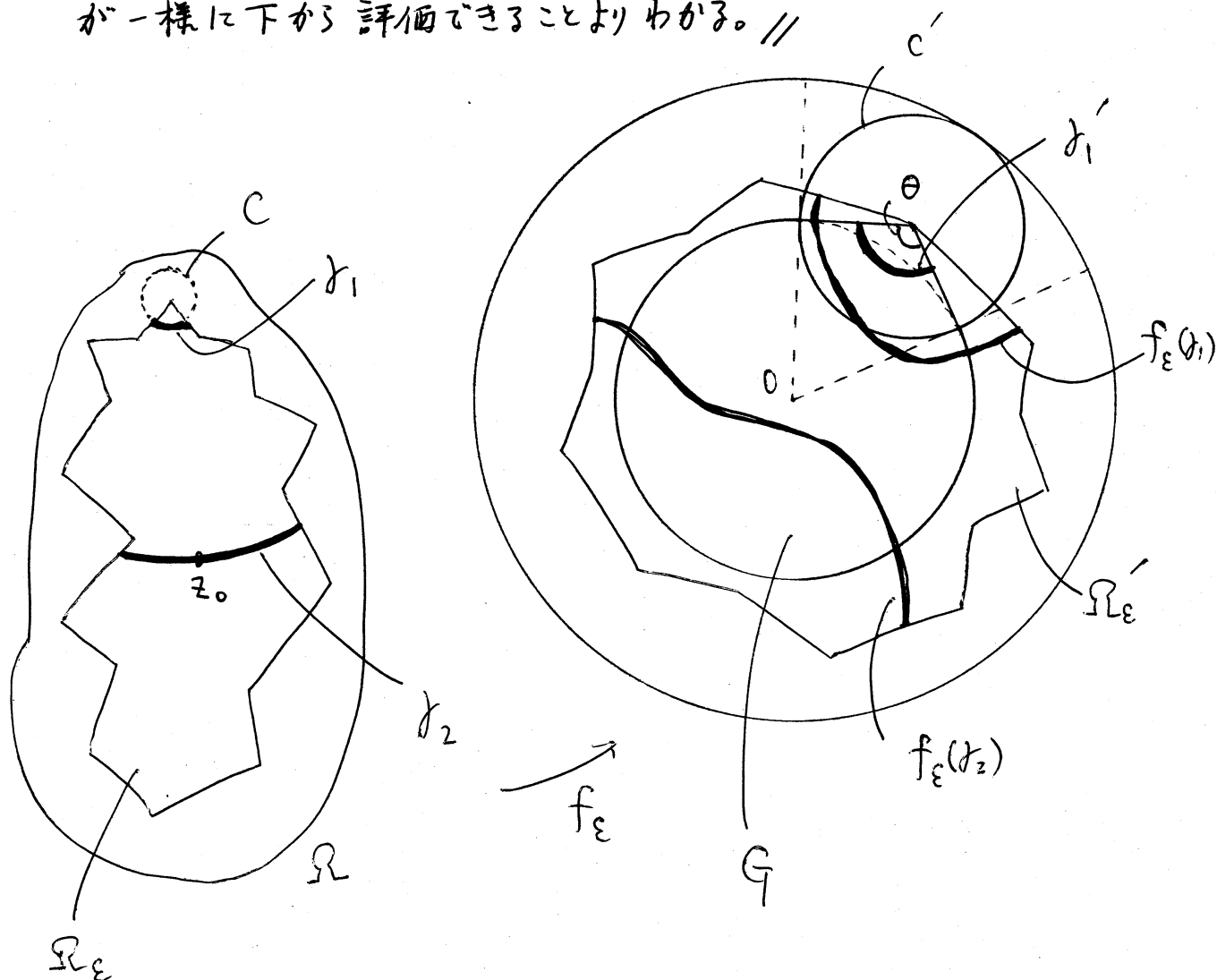
$$\Gamma' := G \text{ 内で } f_\varepsilon(z_2) \text{ と } \gamma'_1 \text{ を結ぶ curve family}$$

$$\lambda(\cdot): \text{ extremal length}$$

として.

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \frac{k}{\varepsilon} \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{k}{r} \leq \lambda(\Gamma) \leq k \cdot \lambda(f_\varepsilon(\Gamma)) \\ \lambda(f_\varepsilon(\Gamma)) \leq \lambda(\Gamma') \end{cases} \quad (k = k(R_0)).$$

よって $\lambda(\Gamma') \leq k_1 \log \frac{k_2}{r}$ から const $k_1, k_2 > 0$ の取れることといえは
 よいか. それは $f_\varepsilon(z_2)$ が原点の十分近くを通ること, 及び, 図の θ
 が一様に下から評価できることよりわかる. //



§4. Schwarz-Pick lemma (Perron's Method)

記号

K ; orientable compact bordered surface の triangulation

V ; K の vertex の全体

V_i ; K の interior vertex の全体

V_b ; K の border vertex の全体

$K(r)$; $r: V \rightarrow (0, \infty]$ の定める (singularity をもつ)
hyperbolic surface.

(r は hyperbolic radius fun. と呼ぶ)

$\mathcal{R} = \{ \text{hyperbolic radius fun.} \}$

$$\Theta_v(r) = \sum_f \theta(v, r, f), \quad v \in V, r \in \mathcal{R}$$

ここで Σ は v の star をなす triangle f の全体について取り、 $\theta(v, r, f)$ は、 f の structure $K(r)$ に関する v での angle とする。

定義

$r \in \mathcal{R}$ が subpacking とは、 $\Theta_v(r) \geq 2\pi, \quad \forall v \in V_i$

$r \in \mathcal{R}$ が packing とは、 $\Theta_v(r) = 2\pi, \quad \forall v \in V_i$

たとえは r : subpacking, $0 < t \leq 1 \Rightarrow tr$: subpacking.

$r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ に対し $r_1 \vee r_2 \in \mathcal{R}$ 且

$$r_1 \vee r_2 := \max_x (r_1, r_2),$$

また $r \in \mathcal{R}$, $v \in V_i$ に対し, $r^v \in \mathcal{R}$ 且

$$r^v(u) := \begin{cases} r(u), & u \neq v \\ c & u = v \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} c \text{ は } \theta_v(r^v) = 2\pi \\ \text{として一意に定まる} \\ \text{ところの値} \end{array} \right)$$

と置く.

r^v は、「領域内の円板上での関数の値を、その Poisson 積分でおきかえる」ことに対応していると考えられる.

補題

- ① $r_1, r_2 : \text{subpacking} \Rightarrow r_1 \vee r_2 : \text{subpacking}$
- ② $r : \text{subpacking}, v \in V_i \Rightarrow r^v : \text{subpacking}$ 且
 $r^v(v) \geq r(v)$
- ③ $r : \text{subpacking}, v \in V_b, c \geq r(v)$ に対し

$$r'(u) = \begin{cases} r(u) & u \neq v \\ c & u = v \end{cases}$$

は subpacking.

これは次の事実からわかる.

□ $v \in V_i$, $r \in \mathcal{R}$ において $r(v)$ の値のみ大きくしてゆけば

- $\theta(v)$ の値は狭義単調に減少する
- v により近い vertex u においては
 $\theta(u)$ は狭義単調に増加する. □

定義

subpacking の族 $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$ が Perron 族 とは.

- ① $\mathcal{R}_0 \neq \emptyset$
- ② $r \in \mathcal{R}_0, v \in V_i \Rightarrow r^v \in \mathcal{R}_0$.
- ③ $r_1, r_2 \in \mathcal{R}_0 \Rightarrow r_1 \vee r_2 \in \mathcal{R}_0$.

補題より, subharmonic fun. に対する Perron's Method の証明
がそのまま適用でき

定理 (Perron's Method)

$\mathcal{R}_0$ が Perron 族 ならば

$$\tilde{r}(u) = \sup_{r \in \mathcal{R}_0} r(u),$$

として $\tilde{r}$ は packing となる。

ただし, subharmonic fun. の Perron 族では 「恒等的に $+\infty$ 」
なる関数が生じることもあったが 今の設定では, そうはならない。

というのは

『 r : subpacking, $v \in V_i$, $n = (\text{vのstarをなす triangle のコスウ})$

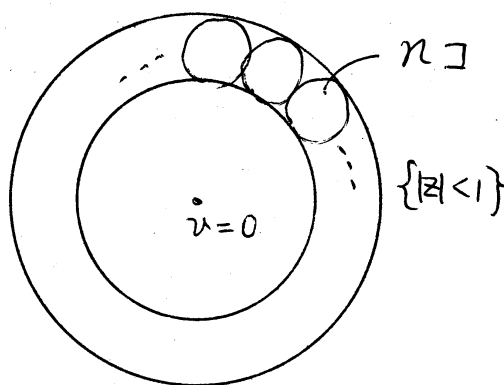
とするとき, $r(v) \leq \sqrt{n}$ 』

☺ v の star をなす subpacking についてのみ示せば十分。
必要なら $r(v)$ の値を大きく取りかえて packing としてよい。

u と v 以外の vertex とする。 $t(u)$ を大きく取り
かえると、 $\theta(v)$ の値は大きくなるので packing となる
ように $t(v)$ の値を調節すれば $t(v)$ の値は大きく
なる。 よって $t(u) = \infty$ とすれば $t(v)$ は最大となる。

よって v 以外のすべての vertex u に対し $t(u) = \infty$
なるときに $t(v)$ は最大。 あとは $v = 0$ となる

$\{|z| < 1\}$ なる hyperbolic surface の model 上で
考えてみればよい。(図参照) //



以下では Perron's Method を Dirichlet 問題に応用する。

$g: V_b \rightarrow (0, \infty]$ が与えられたとき

$$\mathcal{P}_0 = \{t \in \mathcal{P} \mid t: \text{subpacking}, t(v) \leq g(v), \forall v \in V_b\}$$

として

定理

$\mathcal{P}_0 \neq \emptyset$ ならば $\mathcal{P}_0$ は Perron 族であり $\hat{t}$ は $\hat{t}|_{V_b} = g$
をみたすただ一つの packing である。

☺ 一意性以外の主張は補題より O.K. 一意性のみ示す。

r を条件を満たす他の packing とすると. $\tilde{r}(v) \geq r(v), v \in V$
より $\text{Area}_{\tilde{r}}(K) \geq \text{Area}_r(K)$, かつ $\theta_v(\tilde{r}) \geq \theta_v(r), v \in V_b$

ここで

$$\begin{cases} N = K \text{ の triangle のコスウ} \\ p = \# V_b \end{cases}$$

とて

$$\text{Area}_{\tilde{r}}(K) = (N - 2p)\pi - \sum_{v \in V_b} \theta_v(\tilde{r})$$

$$\text{Area}_r(K) = (N - 2p)\pi - \sum_{v \in V_b} \theta_v(r)$$

$$\text{よって } \sum_{v \in V_b} \theta_v(r) \geq \sum_{v \in V_b} \theta_v(\tilde{r}) \text{ となり } \theta_v(r) = \theta_v(\tilde{r}), v \in V_b$$

$$\text{であり } \text{Area}_{\tilde{r}}(K) = \text{Area}_r(K). \text{ よって } r = \tilde{r} \text{ となる。}$$

特に K が closed disk の triangulation であれば, どのような

$g: V_b \rightarrow (0, \infty]$ に対しても $\mathcal{R}_0 \neq \emptyset$ なので

(☺ 十分小さい $\epsilon > 0$ に対し $\{K < \epsilon\}$ での K の Andreer packing は hyperbolic surface の model $\{K \leq 1\}$ にうまくめはばよい。

系

K : closed disk の triangulation

$g: V_b \rightarrow (0, \infty]$

$\Rightarrow r|_{V_b} = g$ なる packing r がただ一つ存在する。

さらに $g \equiv \infty$ とすれば K の任意の packing は $\mathcal{P}_0$ の元なので

系 (Schwarz-Pick lemma for circle packing)

K : closed disk の triangulation

r_a : K の Andreer packing

r : K の 任意の packing

$$\Rightarrow r(u) \leq r_a(u) \quad \forall u \in V$$

$$\text{Area}_r(f) \leq \text{Area}_{r_a}(f), \quad \forall f: \text{triangle}$$

また ある $u \in V_i$ (or ある $f: \text{triangle}$) で等号が成立すれば
 r は Andreer packing r_a に一致する。

☹ 一意性のみ示せばよいが、一般に 2つの packing

r_1, r_2 $r_1 \leq r_2$ について ある $u \in V_i$ で $r_1(u) = r_2(u)$

となれば $r_1 = r_2$ なることより O.K. f についても同様 //

[参考文献]

- [1] Zheng-Xu He and Burt Rodin, Convergence of circle packings of finite valence to Riemann mappings, Comm. in Analysis and Geometry 1 (1993) 31-41.

(Schwarz-Pick lemma については)

- [2] Alan F. Beardon and Kenneth Stephenson, The Schwarz-Pick lemma for circle packings, Ill. J. Math. 141 (1991), 577-606.