

波面追跡法とその周辺

浅倉史興

大阪電気通信大学・工学部

2002 年 3 月 15 日

1 保存則系

1.1 双曲型保存則系

状態変数 $u^1, u^2, \dots, u^n$ を縦に並べたベクトルを U , 対応する流速密度 $f^1, f^2, \dots, f^n$ を縦に並べたベクトルを $F(U)$ と表し, 1 次元の保存則系:

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \quad (1)$$

を考える. この方程式系について, $t = 0$ に初期値 $U_0(x)$ を与え, 初期条件:

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \mathbf{R} \quad (2)$$

をみたす解を求める問題を初期値問題という. 保存則系の例としては, 次の気体の運動方程式 (オイラー形式) が代表的である.

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 & : \text{質量保存則,} \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0 & : \text{運動量保存則,} \\ [\rho(\varepsilon + \frac{1}{2}u^2)]_t + [\rho u(\varepsilon + \frac{1}{2}u^2) + pu]_x = 0 & : \text{エネルギー保存則} \end{cases} \quad (3)$$

ここで, ρ : 質量密度, u : 速度, ε : 内部エネルギー, p : 圧力で, s : 比エントロピーとすると, p は状態方程式 $p = p(\rho, s)$ をみたす. とくに, 理想気体 (polytropic gas) では,

$$\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}, \quad p = \rho^\gamma \exp\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}(s - s_0)\right), \quad \gamma > 1 \quad (4)$$

となる. また, ξ : ラグランジュ (Lagrange) 座標, $v = \frac{1}{\rho}$: 比体積とすると, ラグランジュ形式は

$$\begin{cases} v_t - u_\xi = 0, & u_t + p_\xi = 0, \\ (\varepsilon + \frac{1}{2}u^2)_t + (pu)_\xi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

である. また, エントロピーが一定 (isentropic) であれば, エネルギー保存則は省かれて等エントロピー気体の運動方程式

$$v_t - u_\xi = 0, \quad u_t + p_\xi = 0 \quad (p = a^2 v^{-\gamma}, \gamma > 1, a: \text{定数}). \quad (6)$$

が得られる. 等温気体 (isothermal gas) の方程式は $\gamma = 1$ の場合である.

保存量 $U = U(x, t)$ が微分可能ならば, 保存則系 (1) は準線形偏微分方程式系:

$$U_t + F'(U)U_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \quad (7)$$

と同値である. この準線形偏微分方程式系において, 行列 $F'(U)$ が n 個の相異なる実固有値 (特性速度):

$$\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \cdots < \lambda_n(U) \quad (8)$$

を持つとき, (7) は 双曲系 (hyperbolic system) であるといい, (1) を 双曲型保存則系 (hyperbolic system of conservation laws) という. 双曲系では, 各特性速度 $\lambda_j(U)$ に属する $F'(U)$ の固有空間は 1 次元で, 右固有ベクトル $R_j(U)$ は U の滑らかなベクトル場として定まる; これらを 特性方向場 (characteristic field) という.

定義 1.1 双曲系 (7) の j -特性方向場が 真性非線形 (genuinely nonlinear) であるとは

$$R_j(U) \cdot \nabla \lambda_j \neq 0 \quad (9)$$

が成立するときをいう. ここで ∇ は $u^1, u^2, \dots, u^n$ についての勾配 (gradient) である. また

$$R_j(U) \cdot \nabla \lambda_j \equiv 0 \quad (10)$$

が恒等的に成り立つとき, 線形退化 (linearly degenerate) であるという.

真性非線形条件は, 特性速度が特性方向場に沿って単調であることを示し, 今後重要なはたらきをする. 双曲系では, 初期値 $U_0(x)$ の導関数が Lipschitz 連続ならば, 初期値問題は $t=0$ の近傍でただひとつの (同じクラスの) 解をもつが (Courant [11] 5 章 6 節), 真性非線形を仮定すると, 適当な初期値を選べば, 有限時間で解は C^1 -級でなくなる (John [20], Lax [24]). したがって, 双曲系 (7) をみたま C^1 -解を時間大域的に延長することはできない. そこで, 積分保存則をみたま関数を, 偏微分方程式 (1) の解と考えるのが 弱解 (weak solution) である.

定義 1.2 局所可積分関数 $U(x, t)$ が初期値問題 (1), (2) の弱解であるとは, 任意の C^1 - (ベクトル値) 関数 $\phi \in C_c^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ に対して積分等式:

$$\iint_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+} \{U \cdot \phi_t + F(U) \cdot \phi_x\} dx dt + \int_{\mathbf{R}} U_0(x) \cdot \phi(x, 0) dx = 0 \quad (11)$$

が成立することである. ここで $U \cdot \phi_t, F(U) \cdot \phi_x$ はそれぞれの内積を表し, 領域 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上の台 (support; $\phi(x, t) \neq 0$ をみたま (x, t) 全体の閉包) が有界な関数全体を $C_c^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ と表した.

部分積分により, C^1 -解は弱解の定義をみたまことがわかる. 代表的な弱解として, C^1 -曲線 $x = x(t)$ の両側では C^1 -級で, その曲線上で不連続な関数 $U(x, t)$ を考える. $s = \frac{dx}{dt}, U_{\pm} = U(x(t) \pm 0, t), F_{\pm} = F(U_{\pm})$ と表すと.

定理 1.1 C^1 -曲線 $x = x(t)$ の両側で微分保存則系 (1) をみたまし, その曲線上で不連続な関数 $U(x, t)$ が, 弱解となる必要十分条件は ランキン-ユーゴニオ条件

$$s(U_+ - U_-) - (F_+ - F_-) = 0 \quad (12)$$

が成立することである.

保存則系の j -特性方向場 $R_j(U)$ に対して, 微分方程式

$$\frac{dU}{d\epsilon} = R_j(U), \quad U(0) = U_0 \quad (13)$$

の解曲線を, U_0 をとおる j -積分曲線 (j -integral curve) という.

1.2 リーマン問題

双曲型保存則系は相似拡大 $(x, t) \rightarrow (\alpha x, \alpha t)$ ($\alpha > 0$) で不変である。したがって $U(\alpha x, \alpha t) = U(x, t)$ をみたす解：自己相似解 (self-similar solution) が線形方程式の基本解と同様な役割を持ち、保存則系の解の局所構造と漸近挙動などを定める (DiPerna [14], Liu [27])。自己相似解の初期値は 2 つの定数状態 U_L, U_R から成る：

$$U_0(x) = \begin{cases} U_L, & x < 0 \\ U_R, & x > 0. \end{cases} \quad (14)$$

この初期値問題をリーマン問題 (Riemann problem) という。リーマン問題の自己相似解の存在について次の定理は基本的である (Lax [22])

定理 1.2 各特性方向が真性非線形または線形退化のとき、 $|U_L - U_R|$ が十分に小さいならば、リーマン問題は自己相似解を持つ；解は $(n+1)$ 個の定数状態 $U_L = U_0, U_1, \dots, U_n = U_R$ とそれらを結ぶ膨張波・接触不連続とエントロピー条件をみたす衝撃波より成る。さらに、このような解は、現れる定数状態が U_L, U_R に十分近いという条件のもとで一意的である (図 1)。

注意 1.1 任意の $U_0 \in \Omega$ に対して、2 つの近傍 $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ を選ぶと、任意の $U_L, U_R \in \mathcal{U}_1$ に対して、定数状態 $U_1, \dots, U_{n-1}$ が $\mathcal{U}_2$ に入るような解がただひとつ存在する。さらに、これらの定数状態は初期値 U_L, U_R の C^2 -関数である。

波面追跡法を用いる際には、解の膨張波部分を定数状態と衝撃波のような不連続面で近似する。定理 1.2 で求められた解の定数状態を $U_L = U_0, U_1, \dots, U_n = U_R$ とする。ここで U_{j-1} と U_j が衝撃波または接触不連続で結ばれる場合はそのままにしておく。膨張波の場合は： U_0 からでる j -波曲線上の点を $U_j(\epsilon_j; U_0)$ と表すとき、任意の正数 h に対して $mh \leq \epsilon_j < (m+1)h$ (ϵ_j ： j -波の大きさ) をみたす m をとり、定数状態 $U_j^{(l)}$ ($0 \leq l \leq m$) を

$$U_j^{(0)} = U_{j-1}, \quad U_j^{(l)} = U_j(lh; U_{j-1}) = U_j(h; U_j^{(l-1)}) \quad (15)$$

と定め、近似解 U^h を $l = 0, 1, \dots, m$ について

$$U^h(x, t) = U_j^{(l)}, \quad \lambda_j(U_j^{(l)})t < x < \lambda_j(U_j^{(l+1)})t \quad (16)$$

と定義する ($U_j^{(m+1)} = U_j$)。この近似解は有限個の定数状態と、それらを結ぶ不連続面 (直線) よりなる。 j -特性方向に属する不連続面を、簡単に j -波 といい、 U^h をリーマン問題の解の h -近似と呼ぶ。明らかに、一様収束の意味で U^h は U に収束する。一方、弱解の定義式より、 ϕ の台が $[0, T]$ に含まれるならば、弱解の定義式の打ち切り誤差は次式で与えられる。

$$\iint_{R \times R_+} \{U^h \cdot \phi_t + F(U^h) \cdot \phi_x\} dxdt + \int_R U_0(x) \cdot \phi(x, 0) dx = O(hT) \sum_{\epsilon_j > 0} \epsilon_j \quad (17)$$

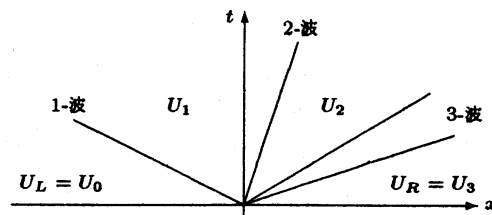


図 1: リーマン問題の解 ($n = 3$)

1.3 大域解の存在

保存則系に対して (11) の意味での弱解の存在を最初に示したのは Glimm [16] である。

定理 1.3 各特性方向が真性非線形または線形退化のとき、初期値の全変動量: $T.V.U_0$ が十分に小さいならば、初期値問題 (1), (2) はエントロピー条件をみたす弱解を持つ。

小節 1.2 節で述べたように、弱解において各点 (x, t) で極限 $U(x \pm 0, t)$ が存在すれば、それらを初期値とするリーマン問題の解が弱解を (局所的に) 近似すると考えられる。Glimm は次のような近似解 $U^h(x, t)$ を構成した。 $t = 0$ においては、初期値 $U_0(x)$ を区分的に定数状態として近似する

$$U^h(x, 0) = U_0^{(m)}, \quad mh < x < (m+1)h \quad (m = 0, \pm 1, \dots). \quad (18)$$

ここで $U_0^{(m)}$ は、区間 $mh < x < (m+1)h$ での初期値の適当な値とする。 k を Courant-Friedrichs-Lewy の安定性条件

$$\frac{h}{2k} = \lambda > \sup_{i, U} |\lambda_i(U)| \quad (19)$$

をみたようにとり、 $0 \leq t < k$ において近似解 $U^h(x, t)$ を

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_0^{(m-1)}, & x < mh \\ U_0^{(m)}, & x > mh \end{cases} \quad (20)$$

を初期値としたリーマン問題の解と定める。初期値の変動量が小さいと、定理 1.2 より解は存在する。また、条件 (19) より、各点 $(mh, 0)$ からでる波は $0 \leq t < k$ では衝突しないので、これらの解をつなぎ合わせた近似解 $U^h(x, t)$ は弱解となる。次に、 $U_1^{(m)}$ として区間 $mh < x < (m+1)h$ での近似解 $U^h(x, k-0)$ の「適当な値」を選び、 $t = k$ を初期面としてリーマン問題を解いて近似解を延長する。以下、同様に $U_k^{(m)}$ ($k = 1, 2, \dots$) を定め、解を延長する。各段階でリーマン問題が解けるためには、近似解の変動量 $T.V.U^h(*, t)$ が一様に (小さく) 評価できることを示す必要がある。これは後で述べる相互作用評価 (31) を用いて行われる。また、この評価により、近似解の部分列で x については L^1 で t については一様に収束するものがとれる。ここで、上の「適当な値」として、区間 $[0, 1]$ で一様分布する乱数列 $\theta = \{\theta_n\}$ をとり、

$$U^h(x, nk) = U^h((m + \theta_n)h, nk - 0), \quad mh < x < (m+1)h \quad (m = 0, \pm 1, \dots) \quad (21)$$

と定めると、ほとんどすべての乱数列に対して、極限関数は弱解となることが証明される。

Liu [28] は、一様等分布している乱数ならば、収束する部分列が必ず存在することを示した。一方 DiPerna [15] は 2×2 -系で、膨張波を (エントロピー条件をみたさない) 衝撃波で近似して、差分の格子をあらかじめ定めずに、2 つの衝撃波が衝突する時点でリーマン問題を解いて近似解を構成した。これは、Bressan [3], Risebro [33] により、波面追跡法 (wave-front tracking) として一般化された。この波面追跡法により、Glimm 差分法における乱数が不必要になっただけでなく、Bressan の一連の仕事 [4], [6], [5] において、弱解の L^1 -有界性、一意性が証明された。

この報告では、論文 Bressan [3] と教科書 [7] をもとにして、波面追跡法の概要と数値計算への応用を述べる。他の教科書としては、Lax [25], Smoller [36], Serre [35], Hörmander [19], Dafermos [13] などが挙げられる。

2 波面追跡法

2.1 Bressan [3], Risebro [33] 以前の結果

波面追跡法は Dafermos [12] で用いられた近似解の構成法の発展と考えられる. [12] では, 単独保存則の初期値問題:

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbf{R} \quad (22)$$

の近似解が以下のように構成された.

流速密度 $f(u)$ がリブシッツ関数であるとして, $f(u)$ の区分的 1 次関数による近似を, また $f(u)$ と表し, 初期値:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases}$$

に対するリーマン問題の解を次のように構成する. まず, $u_L < u_R$ と仮定する. 集合 $\{(u, v); u_L \leq u \leq u_R, v \geq f(u)\}$ の凸包の頂点を, $u_L = u^0 < u^1 < \dots < u^n = u_R$ と表し, 原点を頂点とする扇型 Π_j , $0 \leq j \leq n$ を

$$\Pi_j: \quad \frac{f(u^j) - f(u^{j-1})}{u^j - u^{j-1}} < \frac{x}{t} \leq \frac{f(u^{j+1}) - f(u^j)}{u^{j+1} - u^j}$$

と定義する; ここで $\frac{f(u^0) - f(u^{-1})}{u^0 - u^{-1}} = -\infty$, $\frac{f(u^{n+1}) - f(u^n)}{u^{n+1} - u^n} = \infty$ と考える. 関数 $u(x, t)$ を

$$u(x, t) = u^j \quad (x, t) \in \Pi_j, \quad 0 \leq j \leq n$$

と定義すれば, $u(x, t)$ は次の性質を持つ.

1. 関数 $u(x, t)$ は有限個の値をとり, 不連続面は線分または半直線である (区分的定数関数).
2. 任意の不連続面における両側の値を, それぞれ u_+, u_- と表すとき.
 - (a) 不連続面の傾き $s = \frac{dx}{dt}$ は有限で次の等式をみたす.

$$s = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \quad (23)$$

- (b) u_+ と u_- の間の任意の値 u に対して, 次の不等式が成立する.

$$\frac{f(u_+) - f(u)}{u_+ - u} \leq \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \quad (24)$$

したがって, $u(x, t)$ はリーマン問題のエントロピー条件をみたす解であることがわかる. なお, $u_L > u_R$ のときは, 集合 $\{(u, v); u_L \leq u \leq u_R, v \leq f(u)\}$ の凸包を考えればよい.

流速密度関数 (区分的 1 次関数) のグラフの頂点を $(u^j, f(u^j))$, $1 \leq j \leq n$ と表し, 初期値 $u_0(x)$ を有限個の値 u_0^j , $1 \leq j \leq m$ をとる, 区分的定数関数とすると, 値を

$$\mathcal{I} = \{u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^m\} \cup \{u^1, u^2, \dots, u^n\}$$

にもつ弱解が次の手順で構成される.

1. 初期値において隣り合った値 u_0^{j-1} と u_0^j をリーマン・データとするリーマン問題を解き, それらをつなぎ合わせる.

2. リーマン解において隣り合った不連続面が、最初に衝突する時刻を t_1 とおくと、 $u(x, t_1)$ も区分的定数関数であるので、これを初期値とする解を、上記と同様に解く。
3. この手順を繰り返す。

このように構成された解は

$$1. \quad T.V.u(*, t) \leq T.V.u_0, \quad 2. \quad \|u\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}, \quad (25)$$

$$3. \quad \|u(*, t) - u(*, s)\|_{L^1} \leq K(t - s), \quad t > s, \quad (26)$$

をみたすことは容易にわかる。また、この評価 1. により、上記の衝突時刻 $t_1, t_2, \dots, t_N$ は有限個で、したがって解は $t = \infty$ まで延長される ([7] を参照)。流速密度関数が一様に近似されることと、上の評価と Helly の選出定理を用いると Oleinik [32] の議論 (Glimm [16], Smoller [36] 参照) により、もとの方程式のエントロピー条件をみたす弱解が得られる。

80 年代に入ると、石油の 2 次回収に関連して、Glimm は原油層に注入した水と油の 2 相流のシミュレーションを始めた。Glimm-Issacson-Marchesin-McBryan [18] では、モデル方程式に滑らかな不連続面を持つ初期値を与え、その不連続面の運動の数値解析を行った。そこでは、不連続面を区分的に線形近似をして、法線方向に (1 次元と考え) リーマン問題を解き近似解を計算している。また、このような計算により、荒い格子 (30×30) でも十分に実用的であることを示している。Chern-Glimm-McBryan-Plohr-Yaniv [9] では、その方法を持ちいて、気体力学のオイラー方程式の数値解が計算されている。これらの方法も front tracking と呼ばれており、この方向で理論的に成功したのが Chern [8] である。そこでは、1 次元の一般双曲型保存則系の (単一な) 大きな衝撃波を初期面で摂動したとき、その摂動の全変動が十分に小さければ大域的弱解が存在することが証明されている。とくに、大きな衝撃波の不連続点が Glimm 差分近似の不連続点になるようにして、その不連続面を連続的につなげて行けば、差分の打ち切り誤差の評価にその衝撃波の大きさが現れないことを注意した。この方法を用いて、筆者は [2] で Maxwell 相境界の安定性を示した。

2.2 Bressan のスキーム

以下 [3], [7] に沿って大域解の存在を示す。初期値 $U_0(x)$ が $U_0(x) - U_\infty \in L^1(\mathbf{R} \cap BV(\mathbf{R}))$, $U_\infty = U_0(\pm\infty)$ をみたすとき、任意の正数 h について、 $\mathbf{R}$ の分点 $\{x_j\}_{j=1}^{N_0}$ を次のように定める。

$$x_1 = \inf\{x; |U_0(x) - U_\infty| > h\},$$

$$x_{n+1} = \inf\{x; x > x_n \text{ and } |U_0(x) - \lim_{x \rightarrow x_n+0} U(x)| > h\}.$$

初期値の階段関数近似を

$$U_0^h(x) = \begin{cases} U_\infty, & x < x_1, \\ U_0(x_n + 0), & x_n \leq x < x_{n+1}, \\ U_\infty, & x \geq x_{N_0} \end{cases}$$

とすると、 $\sup_{x \neq x_n} |U_0^h(x) - U_0(x)| \leq h$ をみたし $h \rightarrow 0$ のとき L^1_{loc} で $U_0^h \rightarrow U_0$ が成立する。各不連続点 $x = x_n$ において、 $U_L = U_0^h(x_n - 0)$, $U_R = U_0^h(x_n + 0)$ としてリーマン問題を解き、その h -近似 (小節 1.2 参照) をつなぎ合わせたものを近似解とする。この近似解は (また h -近似解と呼び $U^h(x, t)$ と表す) となり合った h -近似の波が衝突するまで定義される。 $t = t_1$ で最初の衝突が起こったとする。 $U^h(x, t_1 - 0)$ もまた階段関数となるので、各不連続点でそれらを初期値とする h -近似をつくれれば (衝突点でのみつくればよい) 近似解を次の衝突時刻 $t = t_2$ まで延長で

きる。このような構成をくり返して近似解が得られる (図 3)。 $t = t_m$ を m 回目の衝突時刻として、 $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = T$ とおく。 $T = \infty$ ならば、近似解は大域的であるが、 $n \geq 2$ ではこのことは一般に期待できない。したがって、近似解を評価して、十分に衝突を重ねた小さい波を無視する必要がある。

帯領域 $J_m = \mathbf{R} \times [t_{m-1}, t_m)$ を横切る波全体を $W(J_m)$ と表し、その各波の大きさを $|\epsilon|$ とする。 J_m を横切る波の大きさを加え合わせたものを

$$L(J_m) = \sum_{\epsilon \in W(J_m)} |\epsilon|$$

と表す。これは、 J_m における $U^h(x, t)$ の x についての全変動量と同値である。 $L(J_m)$ は波の相互作用により変化する。 $t = t_m$ において、波の衝突が起こる位置を $x = x_l$ と表し、そこで衝突する波を、左から順番に $\alpha_{i_1}^{(1)}, \alpha_{i_2}^{(2)}, \dots, \alpha_{i_p}^{(p)}$ と表す (図 2)。ここで、下の添字 i_k は、その波が i_k -方向であることを示し、衝突することより

$$i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_p \quad (27)$$

をみたす。ここで $U_L = U^h(x_l - 0, t_m)$, $U_R = U^h(x_l + 0, t_m)$ として解いたリーマン問題の解を $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ と表し、衝突点 $P_{l,m} = (x_l, t_m)$ における局所相互作用量を次のように定義すると

$$Q(P_{l,m}) = \sum_{k \neq k'} |\alpha_{i_k}^{(k)} \alpha_{i_{k'}}^{(k')}| \quad (28)$$

補題 2.1 (相互作用量の局所評価) 入射波が十分に小さいとき、衝突点 $P_{l,m}$ において

$$\epsilon_i = \sum_k \epsilon_i^{(k)} = \sum_{k: i_k = i} \alpha_{i_k}^{(k)} + O(1)Q(P_{l,m}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

が成立する。右辺の和は入射波のうちで、 i -波のみを加えることを表している。

相互作用量の局所評価を得るために、Glimm [16] では次のような量が導入された。2つの波 $\alpha, \beta \in W(J_m)$ が、 $\alpha: j$ -波、 $\beta: k$ -波で α は β と $x = -\infty$ の間で J_m を横切るとする。このとき、(1) $j > k$ 、または (2) $j = k$ で少なくとも片方が衝撃波であるとき、これらは **近づく** という。 J_m を横切り近づく波の積を加え合わせたもの

$$Q(J_m) = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in W(J_m) \\ \text{approach}}} |\alpha \beta| \quad (30)$$

を **相互作用ポテンシャル (interaction potential)** という。

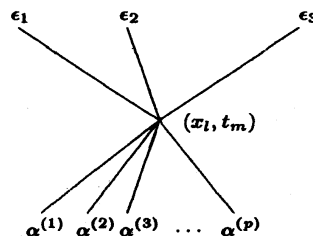


図 2: 波の衝突 ($n = 3$)

補題 2.2 (相互作用量の大域評価) 近似解の全変動が $L(J_m) \leq \frac{1}{2K}$ をみたすならば

$$\sum_i Q(P_{i,m}) \leq 2\{Q(J_m) - Q(J_{m+1})\} \quad (31)$$

が成立する. さらに $K_0 \geq 2K$ ならば次の式も成立する.

$$L(J_{m+1}) + K_0 Q(J_{m+1}) \leq L(J_m) + K_0 Q(J_m). \quad (32)$$

ここで, $F(J) = L(J) + K_0 Q(J)$ とおき, 初期値の全変動が十分小さいとして

$$F(J_1) \leq T.V.U_0 + K_0(T.V.U_0)^2 \leq \frac{1}{2K}$$

が成り立つとすると, 補題 2.2 と数学的帰納法により, $F(J_m)$ はすべての m について単調減少となることがわかる. 従って, 次の評価式が成立する.

$$L(J_m) \leq F(J_1) \leq \frac{1}{2K}. \quad (33)$$

大域評価 (31) を m について加えると, 以後の議論で重要な次の評価式が示される;

$$\sum_{i,m} Q(P_{i,m}) \leq 2Q(J_1) \leq 2(T.V.U_0)^2. \quad (34)$$

以上を用いて, $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = T < \infty$ のときの近似解の構成法を述べる. 閾値: $\rho > 0$ を与えると, (34) より, ある $t = t_{M_1}$ における相互作用量全体について

$$\sum_i Q(P_{i,M_1}) < \rho \quad (35)$$

が成立するので, このときはリーマン問題の別の近似解をつくる. 衝突点 $x = x_l$ における入射波で, 相異なる特性方向を $j_1 < j_2 < \dots < j_p$ と表し, $U_L = U^h(x_l - 0, t_{M_1}), U_R = U^h(x_l + 0, t_{M_1})$ を初期値とするリーマン問題の解の j -波の大きさを ϵ_j とする. U_L より大きさ ϵ_{j_1} の j_1 -波で結ばれる状態を U_1 , U_1 より大きさ ϵ_{j_2} の j_2 -波で結ばれる状態を U_2 のように, 定数状態 $U_1, U_2, \dots, U_p = \tilde{U}_R$ を定め, これらからなるリーマン問題の解をつくる. さらに, 定数 λ_{n+1} を $\lambda_{n+1} > \max_{j,U} |\lambda_j(U)|$ をみたすように選び固定し, この $\tilde{U}_R$ と U_R を不連続面 $x - x_l = \lambda_{n+1}(t - M_l)$ で結んだものを近似解とする. このように定めた近似解を (必要ならばさらに分割して) また $U^h(x, t)$ と表す. さらに $t > t_{M_1}$ での最初の衝突点を $t_1^{(2)}$ として, ここで (35) が成り立てば $t_1^{(2)} = t_{M_2}$ として上のよう近似解を選び, そうでなければ従来のリーマン問題の近似解を採用する. このような構成法により, 衝突時刻

$$t_1^{(1)}, \dots, t_{M_1}^{(1)}, t_1^{(2)}, \dots, t_{M_2}^{(2)}, \dots, t_1^{(k)}, \dots, t_{M_k}^{(k)}, \dots \quad (36)$$

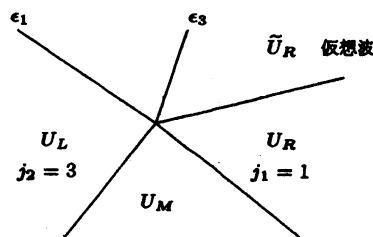


図 3: 仮想波 ($n = 3$)

を持つ近似解が得られる ($t_j = t_j^{(1)}, 1 \leq j \leq M_1$ とおいた). 新しい近似解に現れる $n+1$ 番目の波の大きさは $O(Q(P_{L,M_k}))$ で, 定数 λ_{n+1} は一定なので互いに衝突することはない; これを 仮想波 (non-physical wave) という. 仮想波が他の波と衝突するときは, 上に述べた近似解を用いて逃がしてやる; 具体的には, 状態 U_L が $\tilde{U}_L$ と仮想波で結ばれているとき, $\tilde{U}_L$ と U_R を結ぶリーマン問題の解の j -波の大きさを ϵ_j とし, U_L より大きさ ϵ_j の j -波で結ばれる定数状態からなるリーマン問題の解をとり, 右端の値 $\tilde{U}_R$ と U_R を仮想波で結ぶ.

以上の構成法により, 近似解が $t = \infty$ まで延長される. このようにして構成された近似解 $U^h(x, t)$ は, 区分的に定数関数で, 不連続面は有限個の折れ線である. これらの不連続面をそれぞれ, $\{x = x_\alpha(t)\}_{1 \leq \alpha \leq N}$: 衝撃波または膨張波, $\{y = y_\beta(t)\}_{1 \leq \beta \leq N'}$: 仮想波 と 2 種類に分けて表し, 閾値 ρ を適当に選ぶと次の事柄が成り立つ.

1. 不連続面 $x = x_\alpha(t)$ において, 極限值 $U_\pm = U^h(x_\alpha \pm 0, t)$ は, 有限個の衝突点を除き, (a) ランキン-ユークニオ条件とエントロピー条件をみたす衝撃波で結ばれるか, または (b) U_+ と U_- は, 同じ方向場の積分曲線上にあつて, $U_+ = U(\epsilon_\alpha; U_-)$ と表すと, $0 < \epsilon_\alpha < h$ をみたす.
2. 不連続面 $x = y_\beta(t)$ の傾きは一定値 λ_{n+1} で, 不連続の大きさの総和は一様に小さい:

$$\sum_{1 \leq \beta \leq N'} |U^h(y_\beta + 0, t) - U^h(y_\beta - 0, t)| < h.$$

1. は明らかで, 2. を示すために, 記号

$$\Delta L(t_m) = L(J_{m+1}) - L(J_m), \quad \Delta Q(t_m) = Q(J_{m+1}) - Q(J_m)$$

を導入し, 不連続面の 世代番号 (generation order) を次のように定義する.

1. 初期面 $t = 0$ より出る不連続面は order 1.
2. 時刻 $t = t_m$ において p 個の入射波 $\alpha_{i_1}^{(1)}, \alpha_{i_2}^{(2)}, \dots, \alpha_{i_p}^{(p)}$ ($i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_p$) が衝突し, n 個の波 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ が生成されるときは
 - (a) $i = i_1 = i_{l+1} = \dots$ ならば ϵ_i の order は, これら i -入射波の order の最小値.
 - (b) $i \neq i_1, i_2, \dots, i_p$ ならば ϵ_i の order は, これら入射波の order の最大値 + 1.

ここで, 後の計算のための約束として: 膨張波の近似 $\alpha_{i_l}^{(l)}$ が衝突により大きさが h より大きな膨張波になった場合は, h と $\epsilon_l - h$ の部分に分けて, 前者に上で定めた世代番号を与えて後者にはその世代番号 + 1 を与えることにする (このとき $h < \epsilon_l < 2h$ に注意). この世代番号は, 大きな初期値の問題を扱う上でも重要で, 筆者は, [1] で同様の方法を用いた. 世代番号 k について

$$L_k(J_m) = \sum |\epsilon| : \epsilon \in W(J_m), \text{ order} \geq k$$

$$Q_k(J_m) = \sum |\alpha\beta| : \alpha, \beta \in W(J_m), \text{ approaching, } \alpha \text{ と } \beta \text{ の order の大きな方} \geq k$$

と表し, さらに衝突時刻の集合 I_k を, 入射波 $\alpha_{i_1}^{(1)}, \alpha_{i_2}^{(2)}, \dots, \alpha_{i_p}^{(p)}$ のうちで order が最大のものが k である時刻全体とする. このとき次の補題が成立する.

補題 2.3

1. $\Delta L_k(t) = 0 \quad t \in I_1 \cup \dots \cup I_{k-2}$
2. $\Delta L_k(t) + C_0 \Delta Q_{k-1}(t) \leq 0 \quad t \in I_{k-1} \cup I_k \cup I_{k+1} \dots$
3. $\Delta Q_k(t) + C_0 \Delta Q(t) L_k(t-0) \leq 0 \quad t \in I_1 \cup \dots \cup I_{k-2}$
4. $\Delta Q_k(t) + C_0 \Delta Q_{k-1}(t) L(t-0) \leq 0 \quad t \in I_{k-1}$
5. $\Delta Q_k(t) \leq 0 \quad t \in I_k \cup I_{k+1} \dots$

証明は, 1, 3, 4, 5 については定義より直ちである. 2. については: $L_k(t)$ の増加分は, order が $\geq k-1$ の波の衝突による局所相互作用量である; それらの量は $Q_{k-1}(t-0)$ に現れるが, $Q_{k-1}(t+0)$ に現れないことにより証明される.

これらを用いて $L_k(t)$ ($k \geq 2$) の評価を行う. 以後, $[s]_+ = \max\{s, 0\}$, $[s]_- = \max\{-s, 0\}$ と表せば, $L_k(0) = Q_k(0) = 0$, $k \geq 2$ であることより, 上の 1. - 5. を用い, 方程式の係数と考える領域のみに依存する定数を $O(1)$ と表せば

$$\begin{aligned} L_k(t) &\leq O(1) \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q_{k-1}(\tau)]_-, \\ Q_k(t) &\leq O(1) \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q_{k-1}(\tau)]_+ \\ &\leq O(1) \sup_{t > 0} L_k(t) \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q(\tau)]_- + O(1) \sup_{t > 0} L(t) \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q_{k-1}(\tau)]_- \end{aligned}$$

を得る. ここで

$$\begin{aligned} 0 \leq Q_k(t) &= \sum_{0 < \tau \leq t} \{[\Delta Q_k(\tau)]_+ - [\Delta Q_k(\tau)]_-\} \\ \sum_{0 < \tau < \infty} [\Delta Q(\tau)]_- &= Q(0) - Q(\infty) \leq F(0) \\ L_k(t) &\leq L(t) \leq F(0) \end{aligned}$$

を用いて $\tilde{Q}_k = \sum_{0 < \tau < \infty} [\Delta Q_k(\tau)]_+$, $\tilde{L}_k = \sup_{0 < \tau < \infty} L_k(t)$ とおくと, 漸化不等式

$$\begin{aligned} \tilde{L}_k &\leq O(1)\tilde{Q}_{k-1}, \\ \tilde{Q}_k &\leq O(1)F(0)\tilde{L}_k + O(1)F(0)\tilde{Q}_{k-1} \leq O(1)F(0)\tilde{Q}_{k-1} \end{aligned}$$

を得る. 初期値の全変動を十分に小さくとれば $\gamma = O(1)F(0) < 1$ とできるので, 上の漸化不等式を解けば次の評価式が成立することがわかる.

$$Q_k(t) \leq \tilde{Q}_k \leq O(1)\gamma^k, \quad L_k(t) \leq \tilde{L}_k \leq O(1)\gamma^{k-1} \quad (37)$$

仮想波の全体量を評価するために, 任意の世代番号 k 以下の波の数 M_k を評価する. 初期面における波の数を N とおくと, $M_1 = N$. 2つの order 1 の波が衝突するのは高々 1 回で, 衝突において希薄波が発生すれば, それらは $O(1)h^{-1}$ に分割される可能性がある. したがって, $M_2 \leq N + O(1)h^{-1}N^2$ と評価される. 同様の議論で, 漸化不等式 $M_n \leq M_{n-1} + O(1)h^{-1}M_{n-1}^2$ が得られる. 以上により, M_k は高々 $N, \frac{1}{h}$ の多項式オーダーであることがわかった. したがって, 任意の時刻 t において仮想波の全体量は

$$\begin{aligned} \sum |\alpha|: \text{仮想波全体} &\leq \sum_{\text{order} > k} |\alpha| + \sum_{\text{order} \leq k} |\alpha| \\ &= O(1)\gamma^k + O(1)(N^{p_k} + h^{-q_k})\rho \end{aligned}$$

のように評価される. ゆえに, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $O(1)\gamma^k < \frac{1}{2}\epsilon$ が成立するように k を十分に大きくとり, その k について $O(1)(N^{p_k} + h^{-q_k})\rho < \frac{1}{2}\epsilon$ となるように閾値: ρ を選べば, 仮想波全体が ϵ より小であることがわかる.

仮想波を加えた相互作用がテンシヤル (30) を考えると, 新しい近似解についても補題 2.2 の評価がなりたつので, このように延長した近似解のすべての衝突点 $P_{i,m}$ について大域評価 (34) が成立する. 以上により

命題 2.1 初期値の全変動 $T.V.U_0$ が十分小さいとき

$$1. \quad T.V.U^h(*, t) \leq M, \quad 2. \quad \|U^h(*, *)\|_{L^\infty} \leq M, \quad (38)$$

$$3. \quad \|U^h(*, t) - U^h(*, s)\|_{L^1} \leq M(t - s), \quad t > s \quad (39)$$

が成立する。ここで M は h, t, s に無関係な定数である。

以上の評価 (38), (39) と、小節 2.1 と同じ議論により、次の定理が得られる。

定理 2.1 近似解 U^h は $h \rightarrow 0$ のとき L^1_{loc} で収束する部分列 (また U^h と表す) を持ち、極限関数を U とすると L^1_{loc} で $F(U^h) \rightarrow F(U)$ が成立する。

ここで、極限関数 $U(x, t)$ も全変動の評価 (38) と L^1 -連続性 (39) を持つことに注意する。最後に、得られた $U(x, t)$ が求める弱解であることを示す。衝突時刻 (36) を $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ と書き直す。また、有界な台をもつ C^1 -関数 ϕ について、汎関数 $\mathcal{J}(U, \phi; [s_1, s_2])$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(U, \phi; [s_1, s_2]) &= \iint_{R_+ \times [s_1, s_2]} \{\phi_t \cdot U + \phi_x \cdot F(U)\} dx dt \\ &\quad + \int_R \phi(x, s_2) \cdot U(x, s_2) dx - \int_R \phi(x, s_1) \cdot U(x, s_1) dx \end{aligned}$$

と定義する。 J_m における波面を $x = x_l(t)$ (傾き s_l の直線) で表すと

$$\mathcal{J}(U^h, \phi; [t_m, t_{m+1}]) = \sum_l \int_{t_m}^{t_{m+1}} \{s_l [U^h]_{x=x_l} - [F(U^h)]_{x=x_l}\} \cdot \phi(x_l, t) dt$$

と表されるので、すべての波面がリーマン問題の近似解から来ているとすると、小節 1.2 17 式により上の式は $O(hT.V.U_0)(t_{m+1} - t_m)$ で評価される。一方、仮想波が生ずる場合も、それらを集めても誤差は $O(h)$ であるので

$$\mathcal{J}(U^h, \phi; [t_m, t_{m+1}]) = O(hT.V.U_0)(t_{m+1} - t_m) + O(h)(t_{m+1} - t_m) \quad (40)$$

が成立するので、 $\text{supp } \phi \in R \times [-T, T]$ とすると

$$\tilde{\mathcal{J}}(U^h, \phi; [0, \bar{T}]) = O(h\bar{T}.V.U_0)\bar{T} + O(h)\bar{T} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

が成り立ち、極限関数 U は弱解であることがわかる。また、凸なエントロピー密度 η とエントロピー流速密度 q について同様な計算をすると (Lax [23], Bressan [3] 参照), 得られた弱解がエントロピー条件をみたすことがわかる。以上により定理 1.3 が証明された。

注意 2.1 西田 [30], [31] の等温気体方程式は Glimm 差分法を用いて大域解の存在が証明されたが、波面追跡法を適用することは可能であろう。浅倉 [1] では、初期面より発生する 1 つの衝撃波の大きさを α_0^- と表すと、そこから派生する order k の衝撃波の全体量は $O(1)\gamma^k|\alpha_0^-|$ と評価されることが示されている。これを用いれば、(37) の評価を得ることは見やすい。

2.3 数値解析への応用

最後に、数値解析への応用について述べる。しかし、筆者はこの分野の専門家でないので、以下に述べる内容のなかには、正確でないものが混じっていることをお断りしておく。

Glimm 差分法を実際の数値計算に用いたのは, Chorin [10] が早い時期と思われる. とくに, 複雑な衝撃波とそれらの相互作用が現れる場合には, 他の人工的に粘性とか散逸性を与える方法に比べて, スキームが簡単になるようである. たとえば, 複雑な衝撃波に対して, どのように粘性・散逸性を与えたらよいかという問題は, かなり難しい問題であろう. Glimm 他 [18], Chern 他 [9] などにおいても, 1次元化した問題を解くのに Glimm 差分法が用いられている.

ここで述べた波面追跡法により, 数値計算を実際に行っている例として Risebro-Tveito [34] を挙げる (スキームは Risebro [33] に従っている). ここでは, 他に Friedrichs-Lax のスキームと Glimm のスキームにより, 同じデータについて数値計算を行い, 結果を比較しているのが興味深い. さすがに, 衝撃波はきれいに計算されているが, 膨張波の部分の近似は荒さが目立つ; これは, Glimm 差分でも同様である. しかし, 波面追跡法の利点は, 荒い近似スキームでも衝撃波の位置を正確に捉えられることのように, この面では充分に実用적であると思われる. 波面追跡法において, 理論的に微妙なところは, 閾値: $\rho > 0$ の選択であるが, 論文 [34] においては定かではない. この辺を厳密にするために, 波の世代番号を正確に数えようとすれば, スキーム自身が複雑になりすぎるのかもしれない.

参考文献

- [1] F. Asakura, Decay of solutions for the equations of isothermal gas dynamics, Japan J. Industrial and Applied Math. Vol. 10, No.1,(1993), 133-164.
- [2] F. Asakura, Large Time Stability of Maxwell Phase Boundaries, Methods and Applications of Analysis, Vol. 6, No. 4 (1999) 477-504.
- [3] A. Bressan, Global solutions of systems of conservation laws by wave-front tracking, J. Math. Analysis and App. 170 (1992), 414-432.
- [4] A. Bressan, The unique limit of the Glimm scheme, Arch. Rat. Mech. Anal. 130 (1995), 205-230.
- [5] A. Bressan-P. Goatin, Oleinik type estimates and uniqueness for $n \times n$ conservation laws, J. Differential Equations, 156 (1999), 26-49.
- [6] A. Bressan-T.-P. Liu-T. Yang, L_1 stability estimates for $n \times n$ conservation laws, Arch. Rational Mech. Anal.,149 (1999), 1-22.
- [7] A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Oxford Univ. Press, 2000.
- [8] I. L. Chern, Stability theorem and truncation error analysis for the Glimm scheme and for a front tracking method for flows with strong discontinuities. Comm. Pure Appl. Math., 42 (1989), 815-844.
- [9] I.-L. Chern-J. Glimm-O. McBryan-B. Plohr-S. Yaniv, Front tracking for gas dynamics, J. Comp. Phys. 62 (1986), 83-110.
- [10] A. J. Chorin, Random choice sokution of hyperbolic systems, J. Comp. Phys. 22 (1976), 517-533.

- [11] R. Courant, *Partial Differential Equations*. Wiley-Interscience New York, 1962.
- [12] C. Dafermos, Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for a conservation law, *J. Math. Analysis and App.* 38 (1972), 33-41.
- [13] C. M. Dafermos, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, 2000.
- [14] R. J. DiPerna, Singularities of solutions of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 60 (1975), 75-100.
- [15] R. J. DiPerna, Global existence of solutions to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, *J. Diff. Eqns.*, 20 (1976), 187-212
- [16] J. Glimm, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 (1965), 697-715.
- [17] J. Glimm-P. D. Lax, *Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, Amer. Math. Soc. Memoir, No. 101. A.M.S. Providence, 1970.
- [18] J. Glimm-E. Issacson-D. Marchesin-O. McBryan, Front tracking for hyperbolic systems, *Adv. in Appl. Math.* 2 (1981), 91-119.
- [19] L. Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Mathématiques & Applications 26, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [20] F. John, Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 (1974), 337-405.
- [21] L. D. ランダウ- E. M. リフシッツ (竹内均訳), 「流体力学」 (東京図書) 1970.
- [22] P. D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 (1957), 537-566.
- [23] P. D. Lax, Shock waves and entropy. *E. Zangtanello (ed.), Contributions to nonlinear Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1971, 603-634.
- [24] P. D. Lax, Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 611-613.
- [25] P. D. Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 11, S.I.A.M., 1973.
- [26] T.-P. Liu, Decay to N-waves of solutions of general systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, *Comm. Pure Appl. Math.*, 30 (1977), 585-610.
- [27] T.-P. Liu, Linear and nonlinear large time behavior of general systems of hyperbolic conservation laws, *Comm. Pure Appl. Math.*, 30 (1977), 767-796.
- [28] T.-P. Liu, The deterministic version of the Glimm scheme, *Comm. Math. Phys.*, 57 (1977), 135-148.

- [29] T.-P. Liu , Admissible solution of hyperbolic conservation laws, Amer. Math. Soc. Memoir, Vol. 30, No. 240. A.M.S. Providence, 1981.
- [30] T. Nishida, Global solution for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system. Proc. Japan Acad., 44 (1968), 642-646.
- [31] T. Nishida, *Nonlinear Hyperbolic Equations and Related Topics in Fluid Dynamics*. Publ. Math. No. 79-02. Univ. Paris-Sud, 1978.
- [32] O. Oleinik, Discontinuous solutions of nonlinear differential equations, Usp. Mat. Nauk, 12, 1957, 3-73 (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 26, 1957, 95-172).
- [33] N. H. Risebro, A front-tracking alternative to the random choice method, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), 1125-1139.
- [34] N. H. Risebro-A. Tveito, A front-tracking method for conservation laws in one dimension, J. Comp. Phys. 101 (1992), 130-139.
- [35] D. Serre, *Systèmes de Lois de Conservation I et II*, Diderot Editeur, Arts et Sciences, Paris, 1996.
- [36] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations (2nd ed.)*, Springer Verlag, New York, 1994.
- [37] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley-Interscience Publication, New York, 1974.