

氏 名	な 那 須 弘 和
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2855 号
学位授与の日付	平 成 17 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme (空間曲線の変形における障害と Hilbert スキームの非被約成分)
論文調査委員	(主 査) 教 授 向 井 茂 教 授 森 重 文 教 授 齋 藤 恭 司

論 文 内 容 の 要 旨

3次元射影空間 P^3 内の完備非特異連結曲線を単に空間曲線と呼び、それらの Hilbert 概型を H_P で表す。 H_P は空間曲線の次数 d と種数 g を (すなわち Hilbert 多項式を) 固定した時の曲線からなる部分概型 $H_{d,g}$ の disjoint union である。Mumford は H_P が被約でないことを証明し、これを pathology と呼んだ。彼は被約でない $H_{14,24}$ の既約成分を以下のように構成した: まず一般元 C が非特異3次曲面に含まれるような $H_{14,24}$ の56次元既約閉部分集合 W を考え、 $H_{14,24}$ の点 $[C]$ における接空間の次元が57次元であることを示した。さらに W が $(H_{14,24})_{red}$ の部分多様体として極大であることを示し $H_{14,24}$ が (従って H_P が) 被約でないことを証明した。

申請者は提出論文において Mumford's pathology の一般化を考察している。Hilbert 概型 $H_{d,g}$ の既約閉部分集合であり、かつその一般の曲線 C が非特異3次曲面に含まれるもののうちで極大な W がひとつ与えられたとする。

問題. W は $(H_{d,g})_{red}$ の既約成分か? もし既約成分なら $H_{d,g}$ は W に沿って非被約か?

まず $d > 9$ の時 $\dim W = d + g + 18$ であることと、 $H_{d,g}$ の既約成分の次元は $4d$ 以上であることから、問題が自明でないような対 (d, g) の自然な範囲として $\Omega := \{(d, g) \in \mathbb{Z}^2 \mid d > 9, g \geq 3d - 18\}$ が考えられる。次に W の一般元 C に対する cohomology 群 $H^1(P^3, I_C(3))$ を考える。その次元 $h^1(I_C(3))$ は、Hilbert 概型 $H_{d,g}$ の点 $[C]$ における接空間の次元と W の次元の差に一致し、3次曲面の外へ出ようとする C の1位無限小変形に対応する量になる。もし $H^1(I_C(3)) = 0$ であれば、 W は $H_{d,g}$ の既約成分であり、さらに $H_{d,g}$ は W の一般の点で非特異である。申請者は問題が非自明である $H^1(I_C(3)) \neq 0$ の場合のうち、 $h^1(I_C(3)) = 1$ の場合を考えた。この場合、問題の答えは次の2つのうちのどちらか1つになることは簡単にわかる:

- (A) W は $(H_{d,g})_{red}$ の既約成分であり、 $H_{d,g}$ は W に沿って被約でない。
- (B) W を真に含む $H_{d,g}$ の既約成分 V が存在しその一般元は非特異3次曲面に含まれない。

さらに $H_{d,g}$ は W の生成点で非特異である。

申請者は(B)が起らず、いつでも(A)になることを示した。

定理. $(d, g) \in \Omega$ とする。 W を $H_{d,g}$ の既約閉部分集合とし、その一般元 C が非特異3次曲面に含まれるとする。さらに W はそのような集合の中で極大とする。もし $h^1(I_C(3)) = 1$ なら W は $(H_{d,g})_{red}$ の $(d + g + 18)$ 次元既約成分であり、 $H_{d,g}$ は W に沿って被約でない。

証明には曲線 C の1位無限小変形を2位変形にリフトする為の障害類を計算し、 C のある1位無限小変形が2位にリフトできないことを示す。この結果は Mumford's pathology に対する Curtin の結果の一般化であると同時に、Hilbert 概型の非被約既約成分に関する Kleppe-Ellia の予想が正しいことを $h^1(I_C(3)) = 1$ の場合に証明するものである。さらに定理の応用として、 H_P の可算無限個の非被約既約成分を具体的に構成している。

論文審査の結果の要旨

3次元射影空間 P^3 内に埋め込まれた非特異完備連結代数曲線を以下では単に空間曲線と呼ぶ。この研究は約100年前の Halphen や Max Noether までさかのぼることができ、非常に古典的で具体的な対象である。しかし未解明な部分も多い。申請者は Grothendieck が構成した空間曲線のパラメータ空間で Hilbert 概型と呼ばれるものを考察し、非被約性に関する D. Mumford (1962) や D. Curtin (1981) の結果を大きく発展させた。その応用として J. O. Kelppe が1987年に提出した予想を部分的に解決した。以下、詳細を具体的に述べる。

Hilbert 概型は空間曲線の基本的な不変量である次数と種数によって分割される。次数が d で種数は g の空間曲線の Hilbert 概型を $H_{d,g}$ で表す。Mumford は変形理論の実験として $H_{14,24}$ を採り上げ、その56次元既約成分で各点での接空間の次元が57であるものを発見した。Mumford 自身の証明はリエゾンという手法に基づく大域的な論法であったが、その後 Curtin は障害類を計算する無限小解析的な証明を与えた。しかし、込み入った証明で Mumford の例に特有の事情を多く使っていた。申請者はこの Curtin の証明から本質部分を抽出して Mumford の場合 $(14, 24)$ を最も簡単な場合として含む無限に多くの対 (d, g) に対して空間曲線の Hilbert 概型 $H_{d,g}$ が $4d$ 次元の既約成分でもって各点での接空間の次元が $4d+1$ であるものをもっていることを証明した。

一般に変形理論を適用するにあたって、モジュライ（今の場合だと Hilbert 概型）の接空間の次元、すなわち、独立な1位無限小変形の個数はわりと簡単に求められる。しかし、モジュライの実際の次元を無限小解析的に求めることはそう容易ではない。無限小変形に対する障害の定義される群（今の場合だと空間曲線の法束の第1コホモロジー群）が消えている場合に二つの次元が一致するという幸運な場合もある（小平の定理）。しかし、Mumford や申請者の扱っているのはそうではない場合である。実際、申請者はある幾何的な意味のある設定の下で障害類が常に消えないという、一般論とは正反対の方向の事実を証明している。この意味で変形理論のこれからの進展に役立つと思える。また、申請者はこの結果を応用して、3次曲面に含まれる空間曲線族の中で極大なある種の族に沿って Hilbert 概型が被約でないだろうという Kleppe（と Ellia）の予想を、tautological 直線束で3回捻ったイデアル層 $I_C(3)$ の第1コホモロジー群が1次元の場合に解決した。これは何人もの専門家が目指したができなかったことで予想の全面解決に向けての大きな礎を築いたといえる。

以上の理由で本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。