

多変数の SIEGEL MODULAR FORM の LIFTING の構成について

池田 保 (京都大学大学院理学研究科)

§ Introduction

$$f(\tau) = \sum_{N>0} a(N)q^N \in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), \quad a(1) = 1$$

を weight $2k$ の cusp form で Hecke 作用素の同時固有関数とする。 $L(s, f) = \sum_N a(N)N^{-s}$ を $f(\tau)$ の L 関数とする。

以下では weight $2k$ を固定して、 $\varepsilon = (-1)^k$ とおく。 $N \in \mathbb{Q}_+^\times$ に対して、 $\mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon N})/\mathbb{Q}$ の判別式の絶対値を $\mathfrak{d}_N$ で表わし、 $\mathfrak{f}_N = \sqrt{N\mathfrak{d}_N^{-1}}$ とおく。 また、 $\mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon N})/\mathbb{Q}$ に対応する原始的な Dirichlet 指標を χ_N で表わす。 N が自然数で $\varepsilon N \equiv 0, 1 \pmod{4}$ ならば $\mathfrak{f}_N$ も自然数である。 B が正定値半整数対称行列のとき、 $D_B = \det(2B)$, $\mathfrak{d}_B = \mathfrak{d}_{D_B}$, $\mathfrak{f}_B = \mathfrak{f}_{D_B}$, $\chi_B = \chi_{D_B}$ とおく。

$f(\tau)$ の Satake parameter を $\{\alpha_p, \alpha_p^{-1}\}$ とする。 α_p は

$$(1 - p^{k-\frac{1}{2}}\alpha_p X)(1 - p^{k-\frac{1}{2}}\alpha_p^{-1}X) = 1 - a(p)X + p^{2k-1}X^2$$

によって与えられる。 志村対応によって f と対応する Kohnen subspace $S_{k+\frac{1}{2}}^+(\Gamma_0(4))$ に属する Hecke eigenform を

$$h(\tau) = \sum_{\substack{N>0 \\ (-1)^k N \equiv 0, 1 \pmod{4}}} c(N)q^N$$

とする。 D が fundamental discriminant で $(-1)^k D > 0$ のとき、

$$c(f^2|D) = c(|D|) \sum_{d|f} \mu(d) \chi_{|D|}(d) d^{2k-1} a\left(\frac{f}{d}\right)$$

が成り立つ。

§ Siegel Series:

p を素数とする。

$\mathbb{Z}_p$ 上の $2n$ 次の non-degenerate half-integral symmetric matrix B に対して

$$\begin{aligned} D_B &= \det(2B) \\ \delta(B) &= \begin{cases} 2 \left[\frac{\text{ord}_p(D_B)+1}{2} \right], & p \neq 2 \\ 2 \left[\frac{\text{ord}_p(D_B)}{2} \right], & p = 2 \end{cases} \\ \xi(B) &= \begin{cases} 1 & (-1)^n D_B \in (\mathbb{Q}_p^\times)^2, \\ -1, & [\mathbb{Q}_p(\sqrt{(-1)^n D_B}) : \mathbb{Q}_p] = 2, : \text{unramified}, \\ 0, & [\mathbb{Q}_p(\sqrt{(-1)^n D_B}) : \mathbb{Q}_p] = 2, : \text{ramified} \end{cases} \end{aligned}$$

とおく。

$$b_p(B, s) = \sum_{R \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Q}_p) / \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Z}_p)} \psi(\text{tr}(BR)) p^{-\text{ord}_p(\mu(R))s}$$

を Siegel series という。ここで $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Q}_p)$, $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ はそれぞれ $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$ 係数の対称行列の空間である。また、 $\mu(R)$ は次のように定義される。 (C, D) を symmetric coprime pair で $D^{-1}C = R$ なるものをとるとき、 $\mu(R) = \det D$ で定義される。 X の多項式 $\gamma_p(B; X)$ を

$$\gamma_p(B; X) = (1 - X)(1 - p^n \xi(B)X)^{-1} \prod_{i=1}^n (1 - p^{2i} X^2)$$

で定義する。このとき、 X の多項式 $F(B; X)$ で $F(B; p^{-s}) = b_p(B, s) \gamma_p(B; p^{-s})^{-1}$ を満たすものが存在する。 $F(B; X)$ は次のような関数等式を満たす。

$$F(B; p^{-2n+1} X^{-1}) = (p^{n+\frac{1}{2}} X)^{-\delta(B)+2-2\xi(B)^2} F(B; X)$$

$\tilde{F}_p(B; X) = X^{-\frac{\delta(B)}{2}+1-\xi(B)^2} F(B; X)$ とおく。このとき上の関数等式から、 $\tilde{F}_p(B; X^{-1}) = \tilde{F}_p(B; X)$ が成り立つことがわかる。

§ Eisenstein 級数の Fourier 展開

Eisenstein 級数の Fourier 係数の計算を復習する。 s を複素変数とする。

$$E_{2n,l}(Z, s) = \det \text{Im}(Z)^{s-\frac{1}{2}} \sum_{\{C,D\}} \det(CZ + D)^{-l} |\det(CZ + D)|^{-2s+l}$$

を考える。 $E_{2n,l}(Z, s)$ は次のように Fourier 展開される。

$$E_{2n,l}(X + \sqrt{-1}Y, s) = \sum_{B \in \mathcal{S}'_{2n}(\mathbb{Z})} c_{2n,l}(B; Y, s+l) e(\frac{1}{2}BX)$$

ここで $\mathcal{S}'_{2n}(\mathbb{Z})$ は j 次の整係数 half-integral symmetric matrix の集合であり、 B が非退化なら

$$c_{2n,l}(B; Y, s) = \Gamma_{2n,l}(B; Y, s) \prod_{p|D_B} F_p(B; p^{-2s})$$

$$\Gamma_{2n,l}(B; Y, s) = (\det Y)^{s-\frac{l}{2}} \frac{\Xi(Y, B; s + \frac{l}{2}, s - \frac{l}{2})}{\zeta(2s) \prod_{i=1}^n \zeta(4s - 2i)} L(\chi_B; 2s - n)$$

$$\Xi(g, h; s, s') = \int_{S_{2n}(\mathbb{R})} \mathbf{e}(-hx) \det(x + \sqrt{-1}g)^{-s} \det(x - \sqrt{-1}g)^{-s'} dx$$

ここで

$$D_B = \det(2B)$$

$$\chi_B = \chi_{D_B}$$

l が十分大のとき、この式において $s = \frac{l}{2}$ とおけば正則な Eisenstein series の Fourier 展開をえる。 B が正定値のとき、

$$\begin{aligned} \Xi(Y, B; l, 0) &= \frac{(-1)^{nl} 2^{-n(2n-1)} (2\pi)^{2nl}}{\Gamma_{2n}(l)} (\det(B))^{l-\frac{2n+1}{2}} \mathbf{e}(\sqrt{-1}BY) \\ &= \frac{(-1)^{nl} 2^{2n} \pi^{2nl}}{\Gamma_{2n}(l)} (\det B)^{l-\frac{2n+1}{2}} \mathbf{e}(\sqrt{-1}BY) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{2n}(s) = \pi^{n(2n-1)/2} \prod_{i=0}^{2n-1} \Gamma(s - \frac{i}{2})$$

である。 l が偶数ならば、

$$\Gamma_{2n}(l) = 2^{n^2+n-2nl} \pi^{n^2} \prod_{i=1}^n (2l - 2i)!$$

$$\zeta(l) = (-1)^{l/2-1} (2\pi)^l \frac{\zeta(1-l)}{(l-1)!}$$

$$\prod_{i=1}^n \zeta(2l - 2i) = (-1)^{(2nl+n^2+n)/2} 2^{-n} (2\pi)^{2nl-n(n+1)} \prod \frac{\zeta(1-2l+2i)}{(2l-2i-1)!}$$

$$L(\chi_B, l-n) = (-1)^{(l+n^2+n)/2} (2\pi)^{l-n-1} \pi^{\frac{\frac{1}{2}+n-l}{2}} \frac{L(\chi_B, 1+n-l)}{(l-n-1)!}$$

なので、 $E_{2n,l}(Z)$ の B -th Fourier 係数は

$$\frac{2^n}{\zeta(1-l) \prod_{i=1}^n \zeta(1+2i-2l)}$$

と

$$L(\chi_B; 1+n-l) \prod_{p|D_B} (p^{2l-2n-1})^{\frac{1}{2} \text{ord}_p \mathfrak{f}_B} F_p(B; p^{-l})$$

の積に等しい。 $l = k + n$ とおけば、 $k \equiv n \pmod{2}$ であり、この式は

$$L(\chi_B; 1 - k) f_B^{k - \frac{1}{2}} \prod_{p|D_B} \tilde{F}_p(B; p^{k - \frac{1}{2}})$$

となる。

§ Cohen の Eisenstein series

Cohen の関数 $H(k, N)$ は

$$H(k, N) = \begin{cases} \zeta(1 - 2k), & N = 0, \\ 0, & N \not\equiv 0, 1 \pmod{4}, \\ L(\chi_N, 1 - k) \sum_{d|f_N} \mu(d) \chi_N(d) d^{k-1} \sigma_{2k-1}(f_N/d), & N > 0, N \equiv 0, 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

によって定義される。

Cohen の Eisenstein series $\mathcal{H}_{k+\frac{1}{2}}(\tau)$ を

$$\mathcal{H}_{k+\frac{1}{2}}(\tau) = \sum_{N=0}^{\infty} H(k, N) q^N$$

によって定義する。これは weight $k + \frac{1}{2}$ の modular form で Kohnen plus space $M_{k+\frac{1}{2}}^+(\Gamma_0(4))$ に属する。さらに、 $\mathcal{H}_{k+\frac{1}{2}}(\tau)$ は志村対応により、一変数の Eisenstein 級数 $E_{2k}(\tau)$ と対応する。前節であらわれた因子 $L(\chi_B, 1 - k)$ は $\mathcal{H}_{k+\frac{1}{2}}(\tau)$ の $\mathfrak{d}_B$ 番目の Fourier 係数であると考えることができる。

§ 主定理 1

以下では自然数 k, n で $k \equiv n \pmod{2}$ を満たすものを固定し、 $\varepsilon = (-1)^k$ とおく。 $N \in \mathbb{Q}_+^\times$ に対して、 $\mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon N})/\mathbb{Q}$ の判別式の絶対値を $\mathfrak{d}_N$ で表わし、 $f_N = \sqrt{N\mathfrak{d}_N^{-1}}$ とおく。また、 $\mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon N})/\mathbb{Q}$ に対応する原始的な Dirichlet 指標を χ_N で表わす。 B を rank $2n$ の正定値半整数対称行列とすると、 $(-1)^n \det(2B) \equiv 0, 1 \pmod{4}$ である。このとき、 $D_B = \det(2B)$, $\mathfrak{d}_B = \mathfrak{d}_{D_B}$, $f_B = f_{D_B}$, $\chi_B = \chi_{D_B}$ とおく。

定理 1 : $n \equiv k \pmod{2}$ のとき、 $A(B)$ を

$$A(B) = c(\mathfrak{d}_B) f_B^{k - \frac{1}{2}} \prod_p \tilde{F}_p(B; \alpha_p)$$

によって定義すれば

$$F(Z) = \sum_{B>0} A(B) e(BZ)$$

は $S_{k+n}(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ に属する degree $2n$, weight $k+n$ の Siegel cusp form で Hecke 作用素の同時固有関数である。ここで正方行列 T に対して $\mathbf{e}(T) := \exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(T))$ である。 $F(Z)$ の standard L -function は

$$L(s, F) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{2n} L(s + k + n - i, f)$$

である。したがって $F(Z)$ で生成される $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A})$ の保型表現は既約で、その有限成分は退化主系列表現

$$\mathrm{Ind}_{P_{2n}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Q}_p)} |\det|^{s_p}$$

に同型である。

§ 主定理 2

$f(\tau) \in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を normalized cuspidal Hecke eigenform とする。 r, n を自然数とし、 $n+r \equiv k \pmod{2}$ と仮定する。定理 1 による $f(\tau)$ の $S_{k+n+r}(\mathrm{Sp}_{2n+2r}(\mathbb{Z}))$ への lift を $F(Z)$ とする。 $g(Z) \in S_{k+n+r}(\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z}))$ を Hecke 作用素の同時固有関数とする。

$$\mathcal{F}_{f,g}(Z) = \int_{\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{h}_r} F\left(\begin{pmatrix} Z & \\ & Z' \end{pmatrix}\right) \overline{g(Z')} (\det \mathrm{Im} Z')^{k+n-1} dZ', \quad Z \in \mathfrak{h}_{2n+r}$$

と定義する。 $\mathcal{F}_{f,g} \in S_{k+n+r}(\mathrm{Sp}_{2n+r}(\mathbb{Z}))$ である。

定理 2 : $\mathcal{F}_{f,g}(Z)$ が恒等的に 0 でないならば $\mathcal{F}_{f,g}(Z)$ は Hecke 作用素の同時固有関数であり、

$$L(s, \mathcal{F}_{f,g}) = L(s, g) \prod_{i=1}^{2n} L(s + k + n - i, f)$$

が成り立つ。ここで $L(s, \mathcal{F}_{f,g})$, $L(s, g)$ はそれぞれ $\mathcal{F}_{f,g}(Z)$, $g(Z)$ の standard L 関数である。

証明 : $G_1 = \mathrm{Sp}_r$, $G_2 = \mathrm{Sp}_{2n+r}$, $H = \mathrm{Sp}_{2n+2r}$ とする。 H の Siegel parabolic subgroup を P_H とおく。 $G_1 \times G_2$ は埋め込み

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1 & & \\ & A_2 & & B_2 \\ \hline C_1 & & D_1 & \\ & C_2 & & D_2 \end{array} \right)$$

によって H の部分群とみる。 $F(Z)$ で生成される $H(\mathbb{A})$ の既約保型表現の p 成分は退化主系列表現

$$\mathrm{Ind}_{P_H(\mathbb{Q}_p)}^{H(\mathbb{Q}_p)} (\chi_p \circ \det)$$

である。ここで $\mathbb{Q}_p^\times$ の不分岐指標 χ_p は $\chi_p(p) = \alpha_p$ で定める。 π_1 を $g(Z)$ で生成される $G_1(\mathbb{A})$ の既約 unitary 保型表現の p 成分とする。 $\mathcal{F}_{f,g}(Z)$ で生成される $G_2(\mathbb{A})$ の保型表現は長さ有限で unitary であるから既約表現の有限個の直和である。 π_2 を適当な既約成分の p 成分とする。 π_1, π_2 は共に不分岐主系列表現である。

以下、簡単のためこの節では代数群等はすべて $\mathbb{Q}_p$ 上で考えることとし、記号から $\mathbb{Q}_p$ 等を省略する。このとき、

$$\mathcal{B}_{G_1 \times G_2}(\text{Ind}_{P_H}^H(\chi \circ \det)|_{G_1 \times G_2}, \pi_1 \otimes \pi_2) \neq (0)$$

である。ここで ρ_1, ρ_2 を $G_1 \times G_2$ の表現とすると、 $\mathcal{B}_{G_1 \times G_2}(\rho_1, \rho_2)$ は $\rho_1 \times \rho_2$ 上の $G_1 \times G_2$ 不変な bilinear form の空間である。さて、両側剰余類 $P_H \backslash H / (G_1 \times G_2)$ は $r+1$ 個の代表元 $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_r$ をもつ。ここで

$$\eta_i = \left(\begin{array}{cc|cc} & & & -\mathbf{1}_i \\ & \mathbf{1}_{r-i} & & \\ \mathbf{1}_i & & & \\ & & \mathbf{1}_{2n+r-i} & \\ \hline \mathbf{1}_i & \mathbf{1}_i & & \\ & & & \\ & & \mathbf{1}_{r-i} & \\ \mathbf{1}_i & & -\mathbf{1}_i & \\ & & & \mathbf{1}_{2n+r-i} \end{array} \right)$$

である。ここで block の大きさは縦横とも順に $i, r-i, i, 2n+r-i, i, r-i, i, 2n+r-i$ である。

とのとき、 $Q_i = (\eta_i^{-1} P_H \eta_i) \cap (G_1 \times G_2)$ は

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & \beta & * \\ * & A & * & * \\ \gamma & 0 & \delta & * \\ 0 & 0 & 0 & D \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & -\beta & * \\ * & A' & * & * \\ -\gamma & 0 & \delta & * \\ 0 & 0 & 0 & D' \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{Sp}_i, \\ A = {}^t D^{-1} \in \text{GL}_{r-i}, \\ A' = {}^t D'^{-1} \in \text{GL}_{2n+r-i}, \end{array} \right\}$$

である。Parabolic subgroup $P_i^{(1)} \subset G_1, P_i^{(2)} \subset G_2$ を

$$P_i^{(1)} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & \beta & * \\ * & A & * & * \\ \gamma & 0 & \delta & * \\ 0 & 0 & 0 & D \end{array} \right) \mid \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{Sp}_i, A = {}^t D^{-1} \in \text{GL}_{r-i}, \right\}$$

$$P_i^{(2)} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & \beta & * \\ * & A' & * & * \\ \gamma & 0 & \delta & * \\ 0 & 0 & 0 & D' \end{array} \right) \mid \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{Sp}_i, A' = {}^t D'^{-1} \in \text{GL}_{2n+r-i}, \right\}$$

で定義する。 X_i ($i = 0, \dots, r+1$) を $\text{Ind}_{P_H}^H(\chi \circ \det)$ の部分空間で support が

$$\bigcup_{j=i}^r P_H \eta_j (G_1 \times G_2)$$

に含まれるような元全体からなるものとする。ただし $X_{r+1} = (0)$ とする。このとき、 $X_0, \dots, X_r$ は $G_1 \times G_2$ の作用で不変な部分空間で

$$\text{Ind}_{P_H}^H(\chi \circ \det) = X_0 \supset X_1 \cdots \supset X_r \supset X_{r+1} = (0),$$

であり、

$$X_i/X_{i+1} \simeq \text{Ind}_{Q_i}^{G_1 \times G_2}(\chi \circ \det \cdot \delta_{P_H}^{\frac{1}{2}})^{\eta_i} \delta_{Q_i}^{-\frac{1}{2}}$$

に等しい。ここで $(\chi \circ \det \cdot \delta_{P_H}^{\frac{1}{2}})^{\eta_i}(q) = (\chi \circ \det \cdot \delta_{P_H}^{\frac{1}{2}})(\eta_i q \eta_i)$ であり、 $\delta_{P_H}, \delta_{Q_i}$ はそれぞれ P_H, Q_i の modulus character である。さて、Jacquet module $r_{P_i^{(1)}}^{G_1} \pi_1, r_{P_i^{(2)}}^{G_2} \pi_2$ はそれぞれ $\text{Sp}_i \times \text{GL}_{r-i}, \text{Sp}_i \times \text{GL}_{2n+r-i}$ の表現である。上の考察から、適当な i ($0 \leq i \leq r$) に対して、Jacquet module $r_{P_i^{(1)}}^{G_1} \pi_1, r_{P_i^{(2)}}^{G_2} \pi_2$ はそれぞれ

$$\rho^{(1)} \boxtimes (\chi^{-1} \circ \det) |\det|^{-n-\frac{r-i}{2}}$$

$$\rho^{(2)} \boxtimes (\chi^{-1} \circ \det) |\det|^{-\frac{r-i}{2}},$$

という形の subquotient で $\rho^{(1)} \simeq \rho^{(2)}$ となるものを含んでいなくてはならない。 π_1 の Satake parameter を $\{\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_r^{\pm 1}\}$ とすれば、 $r_{P_i^{(1)}}^{G_1} \pi_1$ が $\rho^{(1)} \boxtimes (\chi^{-1} \circ \det) |\det|^{-n-\frac{r-i}{2}}$ という形になるのは $\{\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_r^{\pm 1}\}$ の中に $\alpha_p^{-1} p^{-n-\frac{1}{2}}, \dots, \alpha_p^{-1} p^{-n-r+i+\frac{1}{2}}$ に等しいものがあるときに限る。それを $\beta_{i+1}, \dots, \beta_r$ としてよい。すると、 π_2 の Satake parameter は $\{\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_r^{\pm 1}\}$ から $\{\beta_{i+1}^{\pm 1}, \dots, \beta_r^{\pm 1}\}$ を取り除き、かわりに $\alpha_p^{-1} p^{-n-\frac{1}{2}}, \dots, \alpha_p^{-1} p^{-n-r+i+\frac{1}{2}}$ とその逆数を付け加えたものである。いずれにしても i や $\beta_{i+1}, \dots, \beta_r$ の取り方に関係なく、 π_2 の Satake parameter として可能なものは $\{\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_r^{\pm 1}, \alpha_p^{\pm 1} p^{\frac{n-1}{2}}, \dots, \alpha_p^{\pm 1} p^{-\frac{n-1}{2}}\}$ であることがわかる。とくに、 $\mathcal{F}_{f,g}(Z)$ で生成される $G_2(\mathbb{A})$ の表現の p 成分は isotypic であることがわかる。しかるにこれは class 1 vector $\mathcal{F}_{f,g}$ で生成されているので既約である。従って $\mathcal{F}_{f,g}$ は Hecke 作用素の同時固有関数であり、その standard L 関数は

$$L(s, \mathcal{F}_{f,g}) = L(s, g) \prod_{i=1}^{2n} L(s + k + n - i, f)$$

で与えられる。

定理 2 において $\mathcal{F}_{f,g}$ が恒等的には 0 でない実例をあげる。 $2k = 20, n = r = 1$ の場合を考える。 $f(\tau) = \sum_{N=1}^{\infty} b(N) q^N \in S_{20}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を weight 20 の normalized Hecke eigenform とする。 Fourier 係数 $b(N)$ の値をいくつかあげる。

p	$b(p)$	p	$b(p)$	p	$b(p)$
2	456	7	-16917544	17	225070099506
3	50652	11	-16212108	19	-1710278572660
5	-2377410	13	50421615062	23	14036534788872
				29	1137835269510

weight $21/2$ の modular form $\delta_{21}(\tau)$ を次のように定義する。

$$\delta_{21}(\tau) = \frac{1}{16\pi\sqrt{-1}}(4E_8(4\tau)\theta'(\tau) - E_8'(4\tau)\theta(\tau)) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n,$$

$$E_8(\tau) = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n)q^n, \quad \theta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$$

とおく。 $\delta_{21}(\tau)$ は志村対応によって $f(\tau)$ と対応する Kohnen plus subspace $S_{21/2}^+(\Gamma_0(4))$ の元である。fundamental discriminant D に対して $c(D)$ の値をいくつか示す。

D	$c(D)$	D	$c(D)$
1	1	17	526320
5	-360	21	-710640
8	-13680	24	2475360
12	-177120	28	8830080
13	266760	29	-5835240

Miyawaki [13] によれば $\dim S_{12}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z})) = 1$ であり、 $F^{(3)}(Z) \in S_{12}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ とすればその

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

番目の Fourier 係数は 0 でない。この Fourier 係数が 1 となるよう $F^{(3)}(Z)$ を正規化しておく。

$F(Z)$ を定理 1 による $f(\tau)$ の $S_{12}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ への lift とする。

正定値半整数対称行列 B が

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 2 & -1 & \\ \lambda_2 & -1 & 2 & -1 \\ \lambda_3 & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}^3$$

という形のときに $F(Z)$ の B 番目の Fourier 係数 $A(B)$ を計算する。 $D_B = \det(2B)$ の取りうる値は 4, 5, 8 の 3 通りでそうなるような λ の個数はそれぞれ 6, 8, 1 である。

$\det B = 4$ となるのは $\lambda = \pm(0, 1, 0), \pm(1, 0, -1), \pm(1, -1, 1)$ の場合でそのとき、

$$F_2(B; X) = 1 - (2^2 + 2^3)X + 2^5 X^2, \\ A(B) = c(1)(b(2) - 2^9 - 2^{10}) = -1080$$

である。

$\det B = 5$ となるのは $\lambda = \pm(1, 0, 0), \pm(1, -1, 0), \pm(0, 0, 1), \pm(0, 1, -1)$ の場合でそのとき、 $A(B) = c(5) = 360$ である。

$\det B = 8$ となるのは $\lambda = (0, 0, 0)$ の場合でそのとき、 $A(B) = c(8) = -13680$ である。

$\dim S_{12}(\mathrm{Sp}_1(\mathbb{Z})) = \dim S_{12}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z})) = 1$ であるので、 $F(Z)$ の $\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_3$ への制限は $\Delta(\tau) \times F^{(3)}(Z)$ の

$$-1080 \times 6 + 360 \times 8 - 13680 = -17280$$

倍である。

したがって $g(\tau) = \Delta(\tau)$ とおけば

$$\mathcal{F}_{f,g}(Z) = -17280 \langle \Delta, \Delta \rangle F^{(3)}(Z) \in S_{12}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$$

は恒等的には 0 でない。したがって定理 2 により

$$L(s, F^{(3)}) = L(s+10, f)L(s+9, f)L(s, \Delta, \mathrm{st})$$

である。(ただし $\beta_p^{\pm 1}$ を $\Delta(\tau)$ の Satake parameter とするとき、

$$L(s, \Delta, \mathrm{st}) = \prod_p [(1 - \beta_p^2 p^{-s})(1 - p^{-s})(1 - \beta_p^{-2} p^{-s})]^{-1}$$

である) これは Miyawaki [13] において数値計算によって予想されていたものと一致する。

REFERENCES

1. J. Arthur, *Unipotent automorphic representations: conjectures*, Asterisque **171-172** (1989), 13–71.
2. R. E. Borcherds, E. Freitag, and R. Weissauer, *A Siegel cusp form of degree 12 and weight 12*, J. Reine Angew. Math. **494** (1998), 141–153.
3. S. Breulman and M. Kuss, *On a conjecture of Duke-Imamoglu*, preprint.
4. H. Cohen, *Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters*, Math. Ann. **217** (1975), 271–285.
5. J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups. Third edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, vol. 290., Springer-Verlag, New York, 1999.
6. M. Eichler and D. Zagier, *The theory of Jacobi forms. Progress in Mathematics*, vol. 55, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, Mass., 1985.
7. E. Freitag, *Siegelsche Modulformen*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.
8. T. Ibukiyama, *Conjecture on the lifting of modular forms to Siegel modular forms*, informal note.
9. H. Katsurada, *An explicit formula for Siegel series*, Amer. J. Math. **121** (1999), 415–452.
10. Y. Kitaoka, *Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms*, Nagoya Math. J. **95** (1984), 73–84.
11. W. Kohnen, *Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$* , Math. Ann. **248** (1980), 249–266.
12. W. Kohnen and D. Zagier, *Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip*, Invent. Math. **64** (1981), 175–198.
13. I. Miyawaki, *Numerical examples of Siegel cusp forms of degree 3 and their zeta functions*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **46** (1992), 307–309.
14. G. Shimura, *Euler products and Eisenstein series. CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, vol. 93, the American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
15. G. Shimura, *Euler products and Fourier coefficients of automorphic forms on symplectic groups*, Invent. Math. **116** (1994), 531–576.
16. G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, 11, 1974.
17. G. Shimura, *On Eisenstein series*, Duke Math. J. **50** (1983), 417–476.
18. G. Shimura, *On modular forms of half integral weight*, Ann. of Math. **97** (1973), 440–481.
19. D. Zagier, *Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'après H. Maass)*, Seminar on Number Theory 1979–80, Paris, Progr. Math., 12., Birkhäuser, Boston, Mass., 1981, pp. 371–394.