

一階非線型偏微分方程式の 初期値問題

早大 理工 小島清史

§1. 序

非線形双曲型方程式の初期値問題の解は、弱解の範囲では一意に定まらない。そこで、一意に解を定めるために、通常エントロピー条件をつけ加えている。Kružkov [1] は、初期値問題、

$$(1) \quad u_t + \sum_{i=1}^n (f_i(u))_{x_i} = 0 \quad f_i \in C^1$$

$$(2) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

の *generalized solution* を、つぎのよう に定義した。すなわち有界可測関数 $u(t, x)$ が (1) (2) の *generalized solution* であるとは、つぎの二つの条件を満たす場合をいう。

(i). 任意の実数 k と任意の $\varphi(t, x) \in C_c^1(\Pi_T)$, $\Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n$
 $\varphi(t, x) \geq 0$ に対し

$$(ii) \quad \iint_{\Pi_T} \left\{ |u - k| \varphi_t + \sum_{i=1}^n \text{sign}(u - k) [f_i(u) - f_i(k)] \varphi_{x_i} \right\} dx dt \geq 0$$

(ii). 測度 0 の集合 $N \subset [0, T]$ が存在して、 $u(t, x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 对 any $t \in [0, T] - N$, かつ、任意の球 $K_R = \{x; |x| \leq R\}$ に対し、

$$(14) \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in [0, T] - N}} \int_{K_R} |u(t, x) - u_0(x)| dx = 0.$$

(13) において、 $k = \pm \sup |u(t, x)|$ とおけば gen. sol. u は (1) の弱解であることが分かる。Kružkov は、gen. sol. の一意性と存在を示した。

ここで、(1)(2) に対する差分近似解が、上で述べた (1), (2) の gen. sol. に収束することを示す。

§2. 差分方程式.

簡単のために、 $n = 2$ とする。すなわち、つぎのような初期値問題に対する差分近似を考える。

$$(15) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 & f, g \in C^1 \\ (16) \quad u(0, x, y) = u_0(x, y) \in L^\infty \end{cases}$$

ここで、つぎのような記号を導入する。

$$u_{\ell, m}^n = u(n\tau, \ell p, m q) \quad f_{\ell, m}^n = f(u_{\ell, m}^n) \quad g_{\ell, m}^n = g(u_{\ell, m}^n)$$

(15)(16) に対する差分近似として、つぎのようなものを考える。

$$(7) \frac{u_{l,m}^{n+1} - \overline{u_{l,m}^n}}{r} + \frac{f_{l+1,m}^n - f_{l-1,m}^n}{2p} + \frac{g_{l,m+1}^n - g_{l,m-1}^n}{2q} = 0$$

$$\therefore \overline{u_{l,m}^n} = \frac{1}{4} (u_{l+1,m}^n + u_{l-1,m}^n + u_{l,m+1}^n + u_{l,m-1}^n) \quad \text{である。}$$

補題 1. $\sup |u_{l,m}^n| = M$, $\frac{r}{p}A < \frac{1}{2}$, $\frac{r}{q}B < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow |u_{l,m}^n| \leq M$$

$$\text{ただし } A = \sup_{|v| \leq M} |f'(v)|, \quad B = \sup_{|v| \leq M} |g'(v)|$$

証明). (7) より

$$(8) \quad u_{l,m}^{n+1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2p} \alpha_{l,m}^n\right) u_{l+1,m}^n + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2p} \alpha_{l,m}^n\right) u_{l-1,m}^n \\ + \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2q} \beta_{l,m}^n\right) u_{l,m+1}^n + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2q} \beta_{l,m}^n\right) u_{l,m-1}^n$$

$$\therefore \alpha_{l,m}^n = \begin{cases} (f_{l+1,m}^n - f_{l-1,m}^n) / (u_{l+1,m}^n - u_{l-1,m}^n) & u_{l+1,m}^n \neq u_{l-1,m}^n \\ f'(u_{l,m}^n) & u_{l+1,m}^n = u_{l-1,m}^n \end{cases}$$

$$\beta_{l,m}^n = \begin{cases} (g_{l,m+1}^n - g_{l,m-1}^n) / (u_{l,m+1}^n - u_{l,m-1}^n) & u_{l,m+1}^n \neq u_{l,m-1}^n \\ g'(u_{l,m}^n) & u_{l,m+1}^n = u_{l,m-1}^n \end{cases}$$

である。 $\therefore \sup_{l,m} |u_{l,m}^n| \leq M$ とすると仮定より $u_{l-1,m}^n, u_{l,m+1}^n$

の係数は正で和が 1 (したがって $|u_{l,m}^{n+1}| \leq M$)

補題 2. $u_{l,m}^n; k_1, k_2 = u_{l+k_1, m+k_2}^n - u_{l,m}^n$ とおくとき、

$$\sum_{\substack{|k_1| \leq N_1 \\ |k_2| \leq N_2}} |u_{l,m}^n; k_1, k_2| p q \leq \sum_{\substack{|k_1| \leq N_1 + n \\ |k_2| \leq N_2 + n}} |u_{l,m}^n; k_1, k_2| p q$$

証明 補題 1 の証明と同様にし 2

$$u_{l,m;h_1,h_2}^{n+1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2p} \alpha_{l,m;h_1,h_2}^n\right) u_{l+1,m;h_1,h_2}^n + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2p} \alpha_{l,m;h_1,h_2}^n\right) u_{l-1,m;h_1,h_2}^n \\ + \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2q} \beta_{l,m;h_1,h_2}^n\right) u_{l,m;h_1,h_2+1}^n + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2q} \beta_{l,m;h_1,h_2}^n\right) u_{l,m;h_1,h_2-1}^n$$

:= 7

$$\alpha_{l,m;h_1,h_2}^n = \begin{cases} f_{l,m;h_1,h_2}^n / u_{l,m;h_1,h_2}^n & u_{l,m;h_1,h_2}^n \neq 0 \\ f'(u_{l,m}^n) & u_{l,m;h_1,h_2}^n = 0 \end{cases}$$

$$\beta_{l,m;h_1,h_2}^n = \begin{cases} g_{l,m;h_1,h_2}^n / u_{l,m;h_1,h_2}^n & u_{l,m;h_1,h_2}^n \neq 0 \\ g'(u_{l,m}^n) & u_{l,m;h_1,h_2}^n = 0 \end{cases}$$

したがって,

$$\sum_{\substack{|l| \leq N_1 \\ |m| \leq N_2}} |u_{l,m;h_1,h_2}^{n+1}| p q \leq \sum_{\substack{|l| \leq N_1+1 \\ |m| \leq N_2+1}} |u_{l,m;h_1,h_2}^n| p q$$

補題 3. $u_{l,m}^{n+h} = u_{l,m}^{n+h} - u_{l,m}^n$ とおくと,

$$\sum_{\substack{|l| \leq N \\ |m| \leq N_2}} |u_{l,m}^{n+h}| p q \leq \sum_{\substack{|l| \leq N_1+n \\ |m| \leq N_2+n}} |\text{conv}\{u_{l,m;h_1,h_2}^0; |h_1|+|h_2| \leq h\}| p q$$

証明. 補題 2 の証明とまったく同様にし 2.

$$\sum_{\substack{|l| \leq N \\ |m| \leq N_2}} |u_{l,m}^{n+h}| p q \leq \sum_{\substack{|l| \leq N_1+n \\ |m| \leq N_2+n}} |u_{l,m}^{n+h}| p q$$

よって (8) より

$$u_{l,m}^h = \text{conv}\{u_{l,m;h_1,h_2}^0; |h_1|+|h_2| \leq h\}$$

補題4. 差分方程式 (7) の解は任意の定数 k に対して

$$\begin{aligned} & \frac{|u_{l,m}^{n+1} - k| - |u_{l,m}^n - k|}{1} + \frac{\text{sign}(u_{l+1,m}^n - k)[f_{l+1,m}^n - f(k)] - \text{sign}(u_{l,m}^n - k)[f_{l,m}^n - f(k)]}{2p} \\ & + \frac{\text{sign}(u_{l,m+1}^n - k)[g_{l,m+1}^n - g(k)] - \text{sign}(u_{l,m}^n - k)[g_{l,m}^n - g(k)]}{2q} \leq 0, \end{aligned}$$

証明.

$$\begin{aligned} u_{l,m}^{n+1} - k &= \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2p} \alpha_{l+1,m}^n(k)\right)(u_{l+1,m}^n - k) + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2p} \alpha_{l-1,m}^n(k)\right)(u_{l-1,m}^n - k) \\ &+ \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2q} \beta_{l,m+1}^n(k)\right)(u_{l,m+1}^n - k) + \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{2q} \beta_{l,m-1}^n(k)\right)(u_{l,m-1}^n - k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\alpha_{l,m}^n(k) = \begin{cases} (f_{l,m}^n - f(k)) / (u_{l,m}^n - k) & u_{l,m}^n \neq k \\ f'(k) & u_{l,m}^n = k \end{cases}$$

$$\beta_{l,m}^n(k) = \begin{cases} (g_{l,m}^n - g(k)) / (u_{l,m}^n - k) & u_{l,m}^n \neq k \\ g'(k) & u_{l,m}^n = k \end{cases}$$

$u_{l+1,m+1}^n - k$ の係数はすべて正であることより補題は従う。

§ 3. 差分解の収束.

$$u_{l,m}^c = \frac{1}{pq} \int_{p_l}^{(n+1)p} \int_{qm}^{(n+1)q} u_0(x,y) dx dy \quad \text{とし.}$$

$$v(t,x,y) = u_{l,m}^n \quad nr \leq t < (n+1)r, \quad lp \leq x < (l+1)p, \quad mq \leq y < (m+1)q$$

とおく.

11. ま

$$(9) \quad \frac{r_n}{p_n} = \lambda_1 < \frac{1}{2A} \quad \frac{r_n}{q_n} = \lambda_2 < \frac{1}{2B}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ 定数}, \quad r_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

この列に対応して、上のよう定義した関数列を $U^n(t, x, y)$

とすると、補題1より

$$|U^n(t, x, y)| \leq M.$$

補題2および補題3より

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{|x| \leq X \\ |y| \leq Y}} |U^n(t+\tau, x+\tilde{h}_1, y+\tilde{h}_2) - U^n(t, x, y)| dx dy \\ & \leq \iint_{\substack{|x| \leq X + \frac{1}{\lambda_1} \tau \\ |y| \leq Y + \frac{1}{\lambda_2} \tau}} |U_0^n(x+\tilde{h}_1, y+\tilde{h}_2) - U_0^n(x, y)| dx dy \\ & \quad + \iint_{\substack{|x| \leq X + \frac{1}{\lambda_1} \tau \\ |y| \leq Y + \frac{1}{\lambda_2} \tau}} |U^n(x, y)| dx dy \end{aligned}$$

$$= = \text{conv} \{ U_0^n(x+\tilde{h}_1, y+\tilde{h}_2) - U_0^n(x, y), |\lambda_1 \tilde{h}_1 + \lambda_2 \tilde{h}_2| \leq \tau \}$$

と3が、明らかに、 $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tau \rightarrow 0$ としたとき、上式の右辺は、 n に拘りなく一様に0に収束する。したがって、 $\{U^n\}$ は、 L'_{loc} でコンパクトである。したがって、一般性を失わずにとおしに $\{U^n\}$ が L'_{loc} で収束すると仮定してよい。

このことと補題4、および、gen. sol の一意性より、

定理、条件(9)をみたす列 $\{r_n, p_n, q_n\}$ に対する差分方程式の解 $\{U^n(t, x, y)\}$ は、初期値問題(5), (6)の gen. sol に収束する。

証明. $\varphi(t, x, y) \in (C_c^\infty(\Pi_T))$, $\varphi(t, x, y) \geq 0$ に對して.

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{t,m}'' \left(\frac{u_{t,m}^{n+1} - u_{t,m}''}{1} + \frac{f_{t+1,m} - f_{t-1,m}}{2p} + \frac{g_{t+1,m} - g_{t-1,m}}{2q} \right) \\ &\geq \varphi_{t,m}'' \left\{ \frac{|u_{t,m}^{n+1} - t_2| - |u_{t,m}'' - t_2|}{1} + \frac{\text{sign}(u_{t+1,m} - t_2)[f_{t+1,m} - f(t_2)] - \text{sign}(u_{t-1,m} - t_2)[f_{t-1,m} - f(t_2)]}{2p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\text{sign}(u_{t+1,m} - t_2)[g_{t+1,m} - g(t_2)] - \text{sign}(u_{t-1,m} - t_2)[g_{t-1,m} - g(t_2)]}{2q} \right\} \end{aligned}$$

に $|p|$ をかけて, t, m, n について加えると容易に分かるように.

$$\begin{aligned} &\iint \left\{ |U^n(t, x, y) - t_2| \varphi_t + \text{sign}(U^n - t_2)[f(U^n) - f(t_2)] \varphi_x + \text{sign}(U^n - t_2)[g(U^n) - g(t_2)] \right\} \\ &\quad dt dx dy \geq C(|V_m| + |p_m| + |q_m|) \end{aligned}$$

したがって $n \rightarrow \infty$ とすると $U^n \rightarrow u(t, x, y)$ in $L^1_{loc}(\Pi_T)$

より, $u(t, x, y)$ は 条件 (i) を満たす. 条件 (ii) を満たすことは補題 4 より直ちに分かる.

§4. 補註.

この結果は 混合問題の場合でも, sim. bc (加. 境界条件) を満たすということを 初期値のときと同様に, L^1_{loc} で定義すれば, 適用出来る.

さらに 非斉次項がくわわ, 5 場合にそ適用出来る.

すなわち.

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x + g(u)_y + h(t, x, y, u) = -h_u(t, x, y, u), \text{ odd} \\ u(t, x, y) = u_0(x, y) \in L^2 \end{cases}$$

のとき、gen. sol を 条件 (i) のかわりに.

(i)' 任意の $\varphi(t, x, y) \in C_0^1(\Pi_T)$, $\varphi \geq 0$ と任意の定数 k に対し

2.

$$\iint \left\{ |u-k| \varphi_t + \text{sign}(u-k) \left[f(u) - f(k) \right] \overset{f_x}{+} \text{sign}(u-k) \left[g(u) - g(k) \right] \overset{g_y}{+} \text{sign}(u-k) h \varphi \right\} dx dy dt \geq 0$$

と変え、差分近似を

$$\frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^n}{\tau} + \frac{f_{l+1,m}^n - f_{l,m}^n}{2\tau} + \frac{g_{l,m+1}^n - g_{l,m}^n}{2\tau} + h_{l,m}^{n+1} = 0$$

とすればよい。

このとき、gen. sol の一意性は Kruglov の場合とまったく同様に示される。また差分解の今まで得られた評価に対応する評価も同様に示される。

文 献

- [1]. Kražkov, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. Tom 187 ('69) No 1
(Soviet Math. Dokl. Vol 10 ('69), No 4)
- [2]. Conway and Smoller, C.P.A.M. Vol 19 ('66)
- [3] Oleinik, Uspekhi Mat. Nauk 12 ('57)
(A.M.S. trans. Ser. 2, 26)
- [4]. Kojima Proc. Jap. Acad. 42 ('66)
- [5] Quinn C. P. A. M. 24 ('71)
- [6] Hopf. J. Math. Mech. 19 ('69)