

Exact Eigenstates of the Pairing-Force-Hamiltonian. I

Fermion System

山口大・文理・物理 下 瀬 育 郎
秋 吉 康 光

(9 月 17 日 受 理)

§ 1. ま え が き

pairing force interactionをもつ fermion からなる体系の問題は, J. Bardeen, L. N. Cooper および J. R. Schrieffer⁽¹⁾, N. N. Bogoliubov⁽²⁾, J. G. Valatin⁽³⁾ 等によって超伝導について, また R. W. Richardson および N. Sherman⁽⁴⁻⁷⁾ 等によって原子核 model について扱われてきた。とくに, Richardson⁽⁵⁾ は核 model への応用として, pair energy の縮退がない条件のもとに, pair 数の小さい場合にも成立つ厳密解をえた。本論文では, Richardson が Boson 系の場合について扱った方法⁽⁸⁾ にならい, しかし上記の条件をもうけることなしに厳密解をえた結果について報告する。

§ 2. pairing - force - Hamiltonian の eigenstates

paired fermion からなる体系 (pair 数 N) を考察し, その Hamiltonian を次式で与える。

$$H = \sum_f 2 \epsilon_f \hat{N}_f - g \sum_f \sum_{f'} a_f^+ a_{f'}, \quad (1)$$

ここに

f : single - particle quantum numbers,

ϵ_f : single - particle energy levels,

g : pair interaction の強さを表わす constant,

(2)

$$\hat{N}_f = \frac{1}{2} (a_{f+}^+ a_{f+} + a_{f-}^+ a_{f-}) , \quad (2)$$

$$\alpha_f^+ = a_{f+}^+ a_{f-}^+ , \quad \alpha_{f'} = a_{f'-} a_{f'+} \quad (3)$$

指標 $(f+)$, $(f-)$ は time reversal に関して共役な状態を表わす。また a_{f+}^+ , a_{f-}^+ は creation operators を, $a_{f'+}$, $a_{f'-}$ は, annihilation operators を表わし, fermion 反交換関係

$$[a_{f\sigma}, a_{f'\sigma'}^+]_+ = \delta_{ff'} \delta_{\sigma\sigma'} , \quad (4)$$

$$[a_{f\sigma}^+, a_{f'\sigma'}^+]_+ = [a_{f\sigma}, a_{f'\sigma'}]_+ = 0$$

をみたすとする。

$$[\alpha_f, \hat{N}_{f'}] = \delta_{ff'} \alpha_f , \quad [\hat{N}_f, \alpha_{f'}^+] = \delta_{ff'} \alpha_f^+ , \quad (5)$$

$$[\alpha_f, \alpha_{f'}^+] = \delta_{ff'} (1 - 2\hat{N}_f) \quad (6)$$

$$[\alpha_f^+, \alpha_{f'}^+] = [\alpha_f, \alpha_{f'}] = 0$$

が成立する。次の pair creation および annihilation operators を定義する。

$$A_i^+ = \sum_f u_i(f) \alpha_f^+ , \quad A_i = \sum_f u_i(f) \alpha_f , \quad (7)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

$$\text{明らかに } A_i^+ A_j^+ = A_j^+ A_i^+ . \quad (8)$$

$u_i(f)$ は次の $|\psi\rangle$ が H の eigen vector であるようにきめる。

$$|\psi\rangle = A_1^+ \cdots A_N^+ |0\rangle , \quad (9)$$

下瀬育郎, 秋吉康光

ここに $|0\rangle$ は vacuum state である。

さて

$$\alpha_f |0\rangle = 0, \quad (10)$$

だから

$$H |0\rangle = 0.$$

よって

$$H |\psi\rangle = [H, A_1^+ \cdots A_N^+] |0\rangle. \quad (11)$$

次に

$$H = \sum_{i=1}^N H_i + \frac{1}{2} \sum'_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} H_{ij} \quad (12)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} H |\psi\rangle = & \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\prod_{j \neq i} A_j^+ \right) (H_i A_i^+ - A_i^+ H_i) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum'_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \left(\prod_{k \neq i,j} A_k^+ \right) (H_{ij} A_i^+ A_j^+ - A_i^+ A_j^+ H_{ij}) \right\} |0\rangle, \end{aligned}$$

書きなおすと

$$\begin{aligned} H |\psi\rangle = & \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\prod_{j \neq i} A_j^+ \right) [H, A_i^+] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum'_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \left(\prod_{k \neq i,j} A_k^+ \right) [[H, A_i^+], A_j^+] \right\} |0\rangle \quad (13) \end{aligned}$$

容易に説明できる次の交換関係

$$[\alpha_f^+ \alpha_{f'}, \alpha_{f''}^+] = \delta_{f', f''} \alpha_f^+ (1 - 2\hat{N}_{f'}) \quad (14)$$

$$[\alpha_f^+ \hat{N}_{f'}, \alpha_{f''}^+] = \delta_{f', f''} \alpha_f^+ \alpha_{f'}^+ \quad (15)$$

および (5), (6) を用いて

$$[H, A_i^+] = \sum_f 2 \epsilon_f u_i(f) \alpha_f^+ - g \sum_f \sum_{f'} \alpha_f^+ u_i(f') (1 - 2 \hat{N}_{f'}) , \quad (16)$$

$$[[H, A_i^+], A_j^+] = 2g \sum_f \sum_{f'} \alpha_f^+ u_i(f') u_j(f') \alpha_f^+ , \quad (17)$$

をうる。

次に H の固有値 E を

$$E = \sum_{i=1}^N E_i \quad (18)$$

とおくと

$$\begin{aligned} (H - E) |\psi\rangle &= \sum_{i=1}^N \left(\prod_{j \neq i} A_j^+ \right) \sum_f \alpha_f^+ \{ (2 \epsilon_f - E_i) u_i(f) \\ &\quad - g \sum_{f'} u_i(f') (1 - 2 \hat{N}_{f'}) \} |0\rangle \\ &\quad + g \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}}^N \left(\prod_{k \neq i,j} A_k^+ \right) \sum_f \alpha_f^+ \{ \sum_{f'} u_i(f') u_j(f') \alpha_f^+ \} |0\rangle . \end{aligned} \quad (19)$$

$\hat{N}_{f'} |0\rangle = 0$ を使い, $\langle \psi | H - E | \psi \rangle = 0$ の関係から

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_f [\{ (2 \epsilon_f - E_i) u_i(f)^2 - g u_i(f) \sum_{f'} u_i(f') \} \cdot \prod_{j \neq i} (\sum_{f''} u_j(f'')^2) \\ + g u_i(f) \sum_{f'} u_i(f') \sum_{j=i}^N \{ u_j(f')^2 \cdot \prod_{k \neq i,j} (\sum_{f''} u_k(f'')^2) \}] = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

をうる。これから

$$\begin{aligned} (2 \epsilon_f - E_i) u_i(f) - g \sum_{f'} u_i(f') \\ + g \sum_{f'} u_i(f') \sum_{j \neq i}^N \frac{u_j(f')^2}{\sum_{f''} u_j(f'')} = 0 , \end{aligned} \quad (21)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

上式左辺の第2項，第3項は指標 i だけによるから

$$u_i(f_i) = \frac{g C_i}{2 \epsilon_f - E_i}, \quad (22)$$

ここに

$$C_i = \sum_{f'} u_i(f') - \sum_{f'} u_i(f') \sum_{j=1}^N \frac{u_j(f')^2}{\sum_{f''} u_j(f'')^2}. \quad (23)$$

よって

$$1 - g \sum_f (2 \epsilon_f - E_i)^{-1} + g \sum_f (2 \epsilon_f - E_i)^{-1} \sum_{j=1}^N \frac{(2 \epsilon_f - E_j)^{-2}}{\sum_{f'} (2 \epsilon_{f'} - E_j)^{-2}} = 0, \quad (24)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

これから pair energy E_i ($i=1, \dots, N$) がきめられる。

§ 3. 結 び

Richardson⁽⁵⁾ は

$$E_i \neq E_j \quad (i \neq j)$$

の条件のもとに，pair energy E_i ($i=1, \dots, N$) を厳密に求める式（同論文における (3・24)）

$$1 - g \sum_f (2 \epsilon_f - E_i)^{-1} + 2g \sum_{j=1}^N (E_j - E_i)^{-1} = 0,$$

$$i = 1, \dots, N$$

をえているが，この式は本論文における (24) に相当する。本論文では上の条件を課することなく，しかも E_i の厳密値を求める式として (24) がえられた。

文 献

- 1) J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 108 (1957) 1175.
- 2) N. N. Bogliubov, Nuovo Ciment 7 (1958) 794.
- 3) J. G. Valatin, Nuovo Ciment 7 (1958) 843.
- 4) R. W. Richardson, Phys. Letters 3 (1963) 277.
- 5) R. W. Richardson and N. Sherman, Nuclear Phys. 52 (1964) 221.
- 6) R. W. Richardson and N. Sherman, Nuclear Phys. 52 (1963) 253.
- 7) R. W. Richardson, J. Math. Phys. 6 (1965) 1034.
- 8) R. W. Richardson, J. Math. Phys. 9 (1968) 1327.