

$SL(3, \mathbb{R})$ の帯球函数について

名大理 関口次郎

§ 0 序

対称空間 $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ 上の帯球函数が Legendre の函数 $P_n(x)$ であらわされることは、よく知られている。一般に $\text{rank} = 1$ の対称空間上の帯球函数は 超幾何型特殊函数であらわされる。

ここでは $\text{rank} = 2$ の対称空間 $SL(3, \mathbb{R})/SO(2)$ 上の帯球函数を考える。それは 2 変数の函数であり Legendre の函数と似た解析的性質をもつと思われる。特殊なパラメータの場合には Appell の超幾何函数 $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ によってあらわすことができる。Legendre の函数の間には漸化式、昇降漸化式などが知られているが、この場合にもその類似が成立つ。

さらに一般の $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ 上の帯球函数についても 特殊なパラメータの場合には Lauricella の超幾何函数であらわせる。

§ 1 準備

G を半単 ^純 Lie 群, K をその極大コンパクト部分群, A を極大輪環部分群とする. $\mathbb{D}(G/K)$ を G -不変微分作用素のなす環とする. $\dim A (= l)$ を対称空間 G/K の rank とよぶ. $\mathbb{D}(G/K)$ は l 個の基 $\Delta_1, \dots, \Delta_l$ をもち, しかも $\mathbb{D}(G/K) \cong \mathbb{C}[\Delta_1, \dots, \Delta_l]$ が成立つ. （それらは可換で）

定義 $\varphi \in C^\infty(G/K)$ は

$$D\varphi = \lambda(D)\varphi \quad \text{for } \forall D \in \mathbb{D}(G/K)$$

$$\varphi(eK) = 1$$

が成立つとき, 球函数とよぶ. ただし $\lambda \in \text{Hom}(\mathbb{D}(G/K), \mathbb{C})$

e は G の単位元とする. さらに

$$\varphi(kx) = \varphi(x) \quad \text{for } \forall k \in K, x \in G/K$$

が成立つとき φ を帯球函数とよぶ.

G/K 上の函数は G 上の函数とみなせる. そのとき帯球函数は K -不変な G 上の函数となる. さらに $G = KAK$ という Cartan 分解を考えれば, A 上の函数とみてよい.

$D \in \mathbb{D}(G/K)$ の動径部分を $\mathcal{I}(D)$ とかくとき 以上のことから 帯球函数を求めることは

$$\begin{cases} \mathcal{I}(\Delta_i)\varphi = \lambda(\Delta_i)\varphi & i=1, \dots, l \\ \varphi(e) = 1 \end{cases}$$

をみたす A 上の関数を求めることに帰着される.

§2 $G = SL(3; \mathbb{R})$ の場合.

$G = SL(n; \mathbb{R})$ のとき $K = SO(n)$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t_n} \end{pmatrix}; t_i \in \mathbb{R}, t_1 + \cdots + t_n = 0 \right\}$ である. この場合, 不変微分作用素の基は Cartan の恒等式によって得られることが知られている.

$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする. $f \in C^\infty(G)$ に対して $X \in \mathfrak{g}$ は $(Xf)(g) = \frac{d}{dt} f(g \exp tX) \big|_{t=0}$ とし 左不変微分作用素と同一視できる.

$X_{ij} := \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}_i$ $X_i := X_{ii} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{jj}$
 とすれば $X_{ij}, X_k \in \mathfrak{g}$ ($i \neq j$) である.

$$\Delta(\lambda) := \det \begin{vmatrix} \lambda + X_1 + \frac{n-1}{2} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & \lambda + X_2 + \frac{n-3}{2} & \cdots & X_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & \lambda + X_n - \frac{n-1}{2} \end{vmatrix}$$

として $\Delta(\lambda)$ を定義する. ただし λ は X_{ij} などとは無関係な文字, $\det$ は 行列式を左から右へとかけて求めることを意味する (X_{ij} は非可換なのでこのように定義する)

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1} \Delta_1 + \lambda^{n-2} \Delta_2 + \cdots + \Delta_n$$

とおく. 明らかに $\Delta_1 = X_1 + \cdots + X_n = 0$

Prop. $G = SL(n; \mathbb{R})$ のとき $\Delta_2, \dots, \Delta_n$ は $D(G/K)$ の基である.

Δ_i の動径部分 $I(\Delta_i)$ を求めるには, $g \in SL(n; \mathbb{R})$ に對して $f(g) := \det(\lambda + t g g)$ を考え $(\Delta_i f(g))|_A$ を計算すればよい. (あるいは [4] 9.1.2 に従ってもよい)

$n=3$ の時の計算を実行すると結果は次のようになる. 便宜上 $GL(3; \mathbb{R}) = G$ とする. そのときは A に $t_1 + \dots + t_n = 0$ という条件を除けばよい. また X_i として X_{ii} をそのままとて $\Delta(\lambda)$ を考える. すると $\Delta_i \neq 0$ となることに注意しておく. $\tau_i = e^{2t_i}$ $i=1, \dots, n$. $\mathcal{J}_i = \tau_i \frac{\partial}{\partial \tau_i}$ $i=1, \dots, n$

$$I(\Delta_1) = 2\mathcal{J}_1 + 2\mathcal{J}_2 + 2\mathcal{J}_3$$

$$I(\Delta_2) = 4\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3 + 4\mathcal{J}_3\mathcal{J}_1 + 4\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 + \frac{2(\tau_1^2 - \tau_2\tau_3)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_1 - \tau_2)}\mathcal{J}_1 \\ + \frac{2(\tau_2^2 - \tau_3\tau_1)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_2 - \tau_3)}\mathcal{J}_2 + \frac{2(\tau_3^2 - \tau_1\tau_2)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_3 - \tau_1)}\mathcal{J}_3 - 1$$

$$I(\Delta_3) = 8\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3 - \frac{4(\tau_1^2 - \tau_2\tau_3)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_1 - \tau_2)}\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3 - \frac{4(\tau_2^2 - \tau_3\tau_1)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_2 - \tau_3)}\mathcal{J}_3\mathcal{J}_1 \\ - \frac{4(\tau_3^2 - \tau_1\tau_2)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_3 - \tau_1)}\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 - \frac{2\tau_1(\tau_2 + \tau_3)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_1 - \tau_2)}\mathcal{J}_1 - \frac{2\tau_2(\tau_3 + \tau_1)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_2 - \tau_3)}\mathcal{J}_2 \\ - \frac{2\tau_3(\tau_1 + \tau_2)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_3 - \tau_1)}\mathcal{J}_3$$

(今後は $I(\Delta_i)$ の代りに Δ_i とそのまま書くことにする.)

$$(1) \begin{cases} \Delta_1 \varphi = 0 \\ \Delta_2 \varphi = (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) \varphi \quad (\text{ただし } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0) \\ \Delta_3 \varphi = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \varphi \end{cases}$$

が帯球函数のみたす微分方程式系である.

Δ_2, Δ_3 を見やすい形にかきかえるために, 次の微分作用素を考える.

$$L_{ij} := 4 \left\{ g_i g_j + \frac{1}{4} \frac{\tau_i + \tau_j}{\tau_i - \tau_j} g_j + \frac{1}{4} \frac{\tau_j + \tau_i}{\tau_j - \tau_i} g_i \right\} \quad (i \neq j)$$

Lemma.

$$\circ \quad \Delta_2 = L_{23} + L_{31} + L_{12} - 1$$

$$\circ \quad 3\Delta_3 = 2g_1 L_{23} + 2g_2 L_{31} + 2g_3 L_{12} + \frac{2(\tau_2 \tau_3 - \tau_1^2)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_1 - \tau_2)} L_{23} \\ + \frac{2(\tau_3 \tau_1 - \tau_2^2)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_2 - \tau_3)} L_{31} + \frac{2(\tau_1 \tau_2 - \tau_3^2)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_3 - \tau_1)} L_{12}$$

次に新たに以下の微分方程式系を考える.

$$(2) \begin{cases} \Delta_1 \varphi = 0 \\ L_{23} \varphi = \left\{ \left(\frac{4}{3} \nu + 1 \right) g_1 - \frac{4}{9} \nu \left(\nu + \frac{3}{2} \right) \right\} \varphi \\ L_{31} \varphi = \left\{ \left(\frac{4}{3} \nu + 1 \right) g_2 - \frac{4}{9} \nu \left(\nu + \frac{3}{2} \right) \right\} \varphi \\ L_{12} \varphi = \left\{ \left(\frac{4}{3} \nu + 1 \right) g_3 - \frac{4}{9} \nu \left(\nu + \frac{3}{2} \right) \right\} \varphi \end{cases}$$

Prop. 方程式系 (2) の解に対して

$$\Delta_2 \varphi = -\frac{4}{3} \left(\nu^2 + \frac{3}{2} \nu + \frac{3}{4} \right) \varphi$$

$$\Delta_3 \varphi = 4 \cdot \frac{\nu}{3} \left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{4}{3} \nu + 1 \right) \varphi$$

$$\begin{aligned}
\text{proof.) } (L_{23} + L_{31} + L_{12})\varphi &= -\frac{4}{3}\nu(\nu + \frac{3}{2})\varphi \\
3\Delta_3\varphi &= \cancel{2\varphi} \left\{ 2\left(\frac{4}{3}\nu + 1\right)(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{4}{3}\nu + 1\right)\left(\frac{2(\tau_2\tau_3 - \tau_1^2)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_1 - \tau_2)}\vartheta_1 + \dots\right) \right\} \varphi \\
&= \left(\frac{4}{3}\nu + 1\right) \left\{ -4(\vartheta_2\vartheta_3 + \vartheta_3\vartheta_1 + \vartheta_1\vartheta_2) + \frac{2(\tau_2\tau_3 - \tau_1^2)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_1 - \tau_2)}\vartheta_1 + \dots \right\} \varphi \\
&= -\left(\frac{4}{3}\nu + 1\right)(\Delta_2 + 1)\varphi \\
&= \frac{4}{3}\nu(\nu + \frac{3}{2})\left(\frac{4}{3}\nu + 1\right)\varphi \quad //
\end{aligned}$$

このことから $\lambda_1 = \frac{2}{3}\nu$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}\nu + 1$, $\lambda_3 = -\frac{4}{3}\nu - 1$ としたとき (2) の解は (1) の解であることがわかる.

方程式系(2) を解く. φ は 3 変数の函数である. これは $SL(3; \mathbb{R})$ の代りに $GL(3; \mathbb{R})$ で計算したためにそうなったのであった. そこで A の変数 τ_1, τ_2, τ_3 の間に $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 = 1$ として $SL(3; \mathbb{R})$ に "もどす". ~~と~~ として $y_1 = \tau_1/\tau_3$, $y_2 = \tau_2/\tau_3$ という変数をつかって 方程式系(2) を書きかえると 次のようになる.

$$(2') \left\{ \begin{aligned}
&\left\{ \vartheta_1(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{1}{2}\vartheta_1 + \frac{\nu}{3}\vartheta_2 - \frac{\nu}{3}\left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{2}\right) \right\} \varphi \\
&\quad = y_1 \left\{ \vartheta_1(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \frac{1}{2}\vartheta_1 + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{2}\right)\vartheta_2 - \frac{\nu}{3}\left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{2}\right) \right\} \varphi \\
&\left\{ \vartheta_2(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \frac{\nu}{3}\vartheta_1 - \frac{1}{2}\vartheta_2 - \frac{\nu}{3}\left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{2}\right) \right\} \varphi \\
&\quad = y_2 \left\{ \vartheta_2(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{2}\right)\vartheta_1 + \frac{1}{2}\vartheta_2 - \frac{\nu}{3}\left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{2}\right) \right\} \varphi \\
&\left\{ y_1 \vartheta_1\vartheta_2 + \frac{\nu}{3}\vartheta_1 + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{2}\right)\vartheta_2 + \frac{\nu}{3}\left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{2}\right) \right\} \varphi \\
&\quad = y_2 \left\{ \vartheta_1\vartheta_2 + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{2}\right)\vartheta_1 + \frac{\nu}{3}\vartheta_2 + \frac{\nu}{3}\left(\frac{\nu}{3} + \frac{1}{2}\right) \right\} \varphi
\end{aligned} \right.$$

ただし $\partial_i = y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ $i=1, 2$ (前の ∂_i でない!!). $\Delta_1 \varphi = 0$ は Euler の恒等式なので 2変数にしてしまえばいい.

さらに $\varphi = (y_1 y_2)^{-\frac{\nu}{2}} u$ として, u についての微分方程式系を求めると 次のようになる.

$$(2'') \quad \begin{cases} \partial_1(\partial_1 + \partial_2 - \nu - \frac{1}{2}) u = y_1(\partial_1 + \frac{1}{2})(\partial_1 + \partial_2 - \nu) u \\ \partial_2(\partial_1 + \partial_2 - \nu - \frac{1}{2}) u = y_2(\partial_2 + \frac{1}{2})(\partial_1 + \partial_2 - \nu) u \\ y_1(\partial_1 + \frac{1}{2}) \partial_2 u = y_2 \partial_1(\partial_2 + \frac{1}{2}) u \end{cases}$$

これは Appell の超幾何函数 $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ のみたす微分方程式系になっている. ところで この函数は次のようにして定義される, ([2] 参照)

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) := \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n) m! n!} x^m y^n$$

$$(\text{ただし } (\alpha, m) = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+m-1))$$

この函数のみたす微分方程式系は

$$(3) \quad \begin{cases} \partial_x(\partial_x + \partial_y + \gamma - 1) u = x(\partial_x + \partial_y + \alpha)(\partial_x + \beta) u \\ \partial_y(\partial_x + \partial_y + \gamma - 1) u = y(\partial_x + \partial_y + \alpha)(\partial_y + \beta') u \\ x(\partial_x + \beta) \partial_y u = y \partial_x(\partial_y + \beta') u \end{cases}$$

$$\text{ただし } \partial_x = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y = y \frac{\partial}{\partial y}$$

また, 次のような積分表示が知られている.

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du$$

(ただし $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) > 0$)

(3) の解の次元は 3 である. それらはみな F_1 をつかってあらわすことができる.

さて (2'') は (3) で $\alpha = -\nu$, $\beta = \beta' = \frac{1}{2}$, $\gamma = -\nu + \frac{1}{2}$ とした形になっている. $F_1(\alpha, \beta, \beta', \alpha + \beta + \beta' - \gamma; 1 - \alpha, 1 - \gamma)$ も (3) の解になっているので

$$u = F_1(-\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 1 - y_1, 1 - y_2)$$

は (2'') の解である. ~~$\phi =$~~

$$\phi = (y_1 y_2)^{-\frac{\nu}{2}} F_1(-\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1 - y_1, 1 - y_2)$$

は, $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1$, のとき $y_1 = y_2 = 1$ となるから $\phi = 1$ となる. これは ϕ が ~~帯球~~ 帯球函数であることを意味する. (2') の 3 つの独立解として ϕ の他に次の 2 つをえらぶこともできる.

$$(y_1 y_2)^{-\frac{\nu}{2}} F_1(-\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\nu + \frac{1}{2}; y_1, y_2)$$

$$y_1^{\frac{2\nu}{3}} y_2^{-\frac{\nu}{2}} F_1(-\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\nu + \frac{1}{2}; \frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1})$$

とくに ν が整数のときは 次が成立つ.

$$\text{Prop. } [(1 - \tau_1 \zeta)(1 - \tau_2 \zeta)(1 - \tau_3 \zeta)]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{3}{2}, n)}{n!} \phi_n \zeta^n$$

とするとき ϕ_n は帯球函数である.

これは Legendre の多項式の母函数の類似である. すなわち, 次のことは知られている.

$$[(1-\tau_1\zeta)(1-\tau_2\zeta)]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\zeta)\zeta^n$$

(ただし $\tau_1\tau_2=1$, $\zeta = \frac{\tau_1+\tau_2}{2}$, τ_1, τ_2 は $SL(2; \mathbb{R})$

の max. torus $A = \{(\sqrt{\tau_1} \ 0; \sqrt{\tau_2}) : \tau_1 > 0, \tau_2 > 0\}$ の座標)

上の母函数より次の漸化式は容易に示せる.

$$(4) \quad (\nu+1)\psi_{\nu+1} - (\nu+\frac{1}{2})\alpha_1\psi_{\nu} + \nu\alpha_2\psi_{\nu-1} - (\nu-\frac{1}{2})\psi_{\nu-2} = 0$$

(ただし $\psi_{\nu} = \frac{(\frac{3}{2}, \nu)}{\nu!} \varphi_{\nu}$, $\alpha_1 = \zeta + \tau_2 + \tau_3$, $\alpha_2 = \tau_1^{-1} + \tau_2^{-1} + \tau_3^{-1}$.)

§3 $SL(3; \mathbb{R})$ の帯球函数のみたす漸化式

$$\alpha_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \quad \alpha_2 = \tau_1^{-1} + \tau_2^{-1} + \tau_3^{-1} \quad (\tau_1\tau_2\tau_3=1)$$

を変数として, 不変微分作用素の基 Δ_2, Δ_3 を書きかえると

$$\Delta_2 = 4(\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_1^2)D_1^2 + 4(3 - \frac{1}{3}\alpha_1\alpha_2)D_1D_2 + 4(\alpha_1 - \frac{1}{3}\alpha_2^2)D_2^2 \\ - \frac{10}{3}\alpha_1D_1 - \frac{10}{3}\alpha_2D_2 - 1$$

$$\Delta_3 = 8(1 - \frac{1}{3}\alpha_1\alpha_2 + \frac{2}{27}\alpha_1^3)D_1^3 + 8(\alpha_1 - \frac{2}{3}\alpha_2^2 + \frac{1}{9}\alpha_1^2\alpha_2)D_1^2D_2 \\ - 8(\alpha_2 - \frac{2}{3}\alpha_1^2 + \frac{1}{9}\alpha_1\alpha_2^2)D_1D_2^2 - 8(1 - \frac{1}{3}\alpha_1\alpha_2 + \frac{2}{27}\alpha_2^3)D_2^3 \\ - \frac{14}{3}(\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_1^2)D_1^2 + \frac{14}{3}(\alpha_1 - \frac{1}{3}\alpha_2^2)D_2^2 + \frac{35}{27}\alpha_1D_1 - \frac{35}{27}\alpha_2D_2$$

となる.

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta_2 \varphi = (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)\varphi \\ \Delta_3 \varphi = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\varphi \end{cases} \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0)$$

の解を $\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}(\alpha_1, \alpha_2)$ ($\varphi_{\mu\nu}(3, 3) = 1$) とする. た

$$\mu = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{2} \quad \nu = \frac{\lambda_3 - \lambda_2 - 1}{2}$$

§2 で求めた帯球函数は $\varphi_{\mu 0}, \varphi_{0 \nu}$ などである.

μ, ν が非負整数のとき $\varphi_{\mu\nu}(\alpha_1, \alpha_2)$ は α_1, α_2 の多項式である. 実際 $\varphi_{\mu\nu}$ は次のような形をしている.

$$\varphi_{\mu\nu}(\alpha) = \sum c_{pg} \alpha_1^p \alpha_2^g$$

ただし (p, g) は ~~$m+2n$~~ $\mu+2\nu \equiv p+2g \pmod{3}$

$p+g \leq \mu+\nu$ という格子を動く. それは

$$\begin{aligned} \Delta_2 \alpha_1^m \alpha_2^n &= (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) \alpha_1^m \alpha_2^n \\ &\quad + m(m-1) \alpha_1^{m-2} \alpha_2^{n+1} + 3mn \alpha_1^{m-1} \alpha_2^{n-1} + n(n-1) \alpha_1^{m+1} \alpha_2^{n-2} \end{aligned}$$

などからわかる. $\Psi_{\mu\nu}(\alpha) = c \varphi_{\mu\nu}(\alpha)$ を $\alpha_1^\mu \alpha_2^\nu$ の係数が 1 となるように定める.

$$\Psi_{\mu\nu}(\alpha) = \alpha_1^\mu \alpha_2^\nu - \frac{2\mu(\mu-1)}{2\mu-1} \alpha_1^{\mu-2} \alpha_2^{\nu+1} - \frac{2\nu(\nu-1)}{2\nu-1} \alpha_1^{\mu+1} \alpha_2^{\nu-2} + \dots$$

さて $\varphi_{\mu\nu}(\alpha)$ ($\mu, \nu \in \mathbb{N}$) は $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1$ のとき 1 になるものだから 帯球函数であり, したがって $\{\varphi_{\mu\nu}\}_{\mu, \nu \in \mathbb{N}}$ は ヒルベルト空間の直交基になっている. したがって $\{\Psi_{\mu\nu}\}_{\mu, \nu \in \mathbb{N}}$ についても同様である. そのヒルベルト空間の内積を $(,)$ としたとき, それは次のような性質をもつ.

- ① $(\Psi_{\mu_1 \nu_1}, \Psi_{\mu_2 \nu_2}) = 0$ if $\mu_1 \neq \mu_2$ or $\nu_1 \neq \nu_2$
- ② $(\alpha_1 \Psi_{\mu_1 \nu_1}, \Psi_{\mu_2 \nu_2}) = (\Psi_{\mu_1 \nu_1}, \alpha_2 \Psi_{\mu_2 \nu_2})$
- ③ $\alpha_1^p \alpha_2^g$ は $\{\Psi_{\mu_1 \nu_1}\}$ の $\mathbb{R}$ 上有限 1 次結合であらわせる. しかも (μ_1, ν_1) は次のようなものだけでよい. すなわち $\mu_1 + \nu_1 \leq p+g, p+2g \equiv \mu_1 + 2\nu_1 \pmod{3}$

Prop. $\{\Psi_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ の間には 次の関係式が成立つ.

$$\Psi_{mn} = \alpha_1 \Psi_{m-1,n} - \frac{(2m-2)^2}{(2m-3)(2m-1)} \Psi_{m-2,n+1} - \frac{(2m+2n-1)^2}{(m+n)(m+n-1)} \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} \Psi_{m-1,n-1}$$

m と n をおきかえて α_1 と α_2 をおきかえても同様な式が成立つ.

証) $\Psi_{mn} - \alpha_1 \Psi_{m-1,n} = \sum A_{pq} \Psi_{pq} \quad (\exists A_{pq} \in \mathbb{R})$

ただし和は $m+2n \equiv p+2q \pmod{3}$, $p+q < m+n$ にわたる. (p,q) がこのようなとき

$$\begin{aligned} A_{pq} &= (\Psi_{mn} - \alpha_1 \Psi_{m-1,n}, \Psi_{pq}) \\ &= -(\alpha_1 \Psi_{m-1,n}, \Psi_{pq}) \\ &= -(\Psi_{m-1,n}, \alpha_2 \Psi_{pq}) \quad (\text{②より}) \end{aligned}$$

このことから ③より

$$A_{pq} = 0 \quad \text{if } (p,q) \neq (m-2, n+1), (m-1, n-1)$$

ゆえに

$$\Psi_{mn} - \alpha_1 \Psi_{m-1,n} = A_{m-2,n+1} \Psi_{m-2,n+1} + A_{m-1,n-1} \Psi_{m-1,n-1}$$

$A_{m-2,n+1}$, $A_{m-1,n-1}$ は実際計算すればよい. //

$$\Phi_{mn}(\alpha) := \frac{(m+n)!(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2m+2n+1)!!m!n!} \Psi_{mn}(\alpha)$$

とみると

$$(\Phi_{mn}, \Phi_{mn}) = \frac{m+n+1}{(2m+1)(2n+1)}$$

がわかり, 上の式は次のようになる.

//

$$(5) \begin{cases} (m+n+\frac{3}{2})(m+1)(n+\frac{1}{2})\Phi_{m+1,n} - (m+n+1)(m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})\alpha_1\Phi_{mn} \\ + (m+n+1)m(n+1)\Phi_{m+1,n+1} + (m+n+\frac{1}{2})(m+\frac{1}{2})n\Phi_{m,n-1} = 0 \\ (m+n+\frac{3}{2})(m+\frac{1}{2})(n+1)\Phi_{m,n+1} - (m+n+1)(m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})\alpha_2\Phi_{mn} \\ + (m+n+1)(m+1)n\Phi_{m+1,n-1} + (m+n+\frac{1}{2})m(n+\frac{1}{2})\Phi_{m-1,n} = 0 \end{cases}$$

(5) より 次の漸化式が得られる.

$$(4') \quad (m+\frac{1}{2})(m+\frac{3}{2})\Phi_{m+1,0} - (m+\frac{1}{2})^2\alpha_1\Phi_{m,0} + m^2\alpha_2\Phi_{m-1,0} - (m-1)m\Phi_{m-2,0} = 0$$

この式を $\frac{(\frac{3}{2}, m)}{m!}\Phi_{m,0}$ についての漸化式にかきかえると (4) が得られる. したがって (4') は帯球函数 $\Phi_{m,0}$ のみたす漸化式である. これから逆に (5) が帯球函数のみたす漸化式になっていることは容易にわかる.

(5) は Legendre の多項式のみたす漸化式

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0$$

の類似である. (5) は m, n を任意のパラメータにした時も成立つと予想される.

さて μ と ν は独立なパラメータとして帯球函数 $\Phi_{\mu\nu}$ を考えてきた. ここで $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と μ, ν との間の関係を再記すると

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3}(2\mu+\nu)-1, \quad \lambda_2 = \frac{2}{3}(\mu-\nu), \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}(\mu+2\nu)+1$$

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; \alpha_1, \alpha_2) := \varphi_{\mu\nu}(\alpha_1, \alpha_2)$$

と便宜上かくことにする. $\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ であらわすと (5)

は見やすくなる. 前のように

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + \lambda \Delta_2 + \Delta_3 \quad (\Delta_1 = 0 \text{ に注意!!})$$

とおくと 帯球函数 $\varphi_{\mu\nu}$ の間の "昇降" 漸化式が成立つ

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{1}{3}\right) [\alpha_1 \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)] = -\left(\frac{\lambda_3 - \lambda_1 + 1}{2}\right) \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2 - 1}{2}\right) \psi\left(\lambda_1 - \frac{2}{3}, \lambda_2 + \frac{1}{3}, \lambda_3 + \frac{1}{3}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda_2}{2} + \frac{1}{3}\right) [\alpha_1 \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)] = -\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2}\right) \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_3 - 1}{2}\right) \psi\left(\lambda_1 + \frac{1}{3}, \lambda_2 - \frac{2}{3}, \lambda_3 + \frac{1}{3}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda_3}{2} + \frac{1}{3}\right) [\alpha_1 \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)] = -\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_3 + 1}{2}\right) \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_1 - 1}{2}\right) \psi\left(\lambda_1 + \frac{1}{3}, \lambda_2 + \frac{1}{3}, \lambda_3 - \frac{2}{3}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda_1}{2} - \frac{1}{3}\right) [\alpha_2 \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)] = \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_1 - 1}{2}\right) \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2}\right) \psi\left(\lambda_1 + \frac{2}{3}, \lambda_2 - \frac{1}{3}, \lambda_3 - \frac{1}{3}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda_2}{2} - \frac{1}{3}\right) [\alpha_2 \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)] = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2 - 1}{2}\right) \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_3 + 1}{2}\right) \psi\left(\lambda_1 - \frac{1}{3}, \lambda_2 + \frac{2}{3}, \lambda_3 - \frac{1}{3}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda_3}{2} - \frac{1}{3}\right) [\alpha_2 \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)] = \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_3 - 1}{2}\right) \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_1 + 1}{2}\right) \psi\left(\lambda_1 - \frac{1}{3}, \lambda_2 - \frac{1}{3}, \lambda_3 + \frac{2}{3}\right) \end{array} \right.$$

"昇降" 漸化式 (17) は 微分方程式 (5) と漸化式 (6) を使って 導くことができる.

§4 $SL(n, \mathbb{R})$ の帯球函数についての注意.

§2 で求めた帯球函数は $SL(3, \mathbb{R})/P$ (P : 極大放物部分群) 上の Poisson 核を K で平均したものである.

$SL(n, \mathbb{R})$ のときも同様な場合には Lauricella の超幾何函数で表わすことができる.

一般に帯球函数の積分公式は次のようである.

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(a) &= \int_K e^{-(\lambda+\rho)H(a^{-1}k)} dk \\ &= \int_{\bar{N}} e^{-(\lambda+\rho)H(a^{-1}\bar{n})} e^{(\lambda-\rho)H(\bar{n})} d\bar{n}\end{aligned}$$

$SL(n, \mathbb{R})$ の極大放物部分群として次をとる.

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix} \right\}_{n-1}^{1,1}$$

$P = M_P A_P N_P$: Langlands 分解

$$M_P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g' \end{bmatrix} : g' \in SL(n-1, \mathbb{R}) \right\}$$

$$A_P = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b & \cdots & c \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{bmatrix} : ab^{n-1} = 1 \right\}$$

$$N_P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & {}^t x \\ 0 & 1_{n-1} \end{bmatrix} : {}^t x = (x_2, \dots, x_n) \right\}$$

$$g = a^{-1} \bar{n} \in SL(n, \mathbb{R}) \quad a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a' \end{bmatrix}, \quad \bar{n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1_{n-1} \end{bmatrix} \quad a' = \begin{pmatrix} a_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$g \in \mathbb{D}$ だから、これを Langlands 分解する.

$$g = m_P a_P n_P \quad a_P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & & \beta \end{bmatrix} \quad \alpha \beta^{n-1} = 1$$

すると $\alpha^2 = a_1^{-2} + {}^t u a_1^{-2} u = a_1^{-2} + a_2^{-2} u_2^2 + \cdots + a_n^{-2} u_n^2$
 上の積分表示と同様に $SL(n; \mathbb{R})/P$ 上の Poisson 核から
 帯球函数がえられる. 具体的には

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(a) &= \int_{\bar{N}_P} (a_1^{-2} + a_2^{-2} u_2^2 + \cdots + a_n^{-2} u_n^2)^{-\frac{1}{2}(\lambda + \frac{n}{2})} (1 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)^{\frac{1}{2}(\lambda - \frac{n}{2})} d\bar{n}_P \\ &= a_1^{-2m} F_D(-m, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{n}{2}; 1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}, \dots, 1 - \frac{a_1^2}{a_n^2}) \end{aligned}$$

ここで F_D は

$$F_D(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma; x_1, \dots, x_n) = \sum \frac{(\alpha, \nu_1 + \cdots + \nu_n)(\beta_1, \nu_1) \cdots (\beta_n, \nu_n)}{(\gamma, \nu_1 + \cdots + \nu_n) \nu_1! \cdots \nu_n!} x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$$

で定義される.

これから 次のこともすぐにわかる.

$$[(1 - a_1^2 \zeta) \cdots (1 - a_n^2 \zeta)]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\frac{n}{2}, \nu)}{\nu!} \varphi_\nu(a) \zeta^\nu$$

これは 帯球函数の母函数展開である. ただし $a_1 \cdots a_n = 1$

以上は $SL(n; \mathbb{R})$ の極大放物部分群から得られる帯球函数について調べたのだが、一般の半単純 Lie 群 の場合に

も同様なことが言えそうである。例えば $Sp(n; \mathbb{R})$ の場合を考えてみる。その極大輪環部分群を $A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1^{-1} \end{pmatrix}; \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \right\}$ とする。そのとき極大放物部分群から得られる帯球函数は

$$\varphi_\lambda(a) = a_1^{-2m} F_D \left(-m, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, n; 1-a_1^4, 1-a_1^2 a_2^2, \dots, 1-a_1^2 a_n^2, 1-\frac{a_1^2}{a_2^2}, \dots, 1-\frac{a_1^2}{a_n^2} \right)$$

ただし $m = -\frac{1}{2}(\lambda + n)$

これは $SL(2n; \mathbb{R})$ の帯球函数に変数の間に関係をいれた形になっている。

文献

- [1] K. Aomoto : Sur les transformations d'hémisphère et les équations intégrales qui s'y rattachent. J. of the faculty of Sci. Univ. of Tokyo
- [2] P. Appell, et J. Kampé de Fériet : Fonctions hypergéométrique et hypersphériques.
- [3] F.A. Berezin et F.K. Karpelevič : Zonal spherical functions and the Laplace operator in the Riemannian symmetric spaces. Doklady Akad. Nauk. 118.
- [4] G. Warner : Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups II
- [5] 犬井鉄郎 : 球函数, 円錐函数, 超幾何函数.
- [6] 森口, 宇田川, 一松 : 数学公式 III