

特異積分による函数の 近似について

東北大理 洲之内 源一郎

I. 一変数の場合

§ 1. 一般の定理

E を $L^p(-\infty, \infty)$ ($1 \leq p < \infty$) 又は C_0 空間とし, $f \in E$ に対して合成型の特異積分

$$K(x, p; f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) d k(pu)$$

を作り f の近似を考へる. $k(x)$ は

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |d k(x)| < \infty, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 d k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d k(x) = 1$$

をみたすとする. この時

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|K(\cdot, p, f) - f(\cdot)\|_E = 0$$

が成立する. さうに $k(x)$ の Fourier-Stieltjes 変換 $\hat{k}(v)$ に対して

$$(2) \quad (i) \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\hat{h}(v) - 1}{|v|^r} = c \neq 0, \quad (ii) \quad \frac{\hat{h}(v) - 1}{|v|^r} \in (S, S)$$

が成立するとする. (ii) の条件は有界変分の函数 $h(x)$ が存在して

$$\frac{\hat{h}(v) - 1}{|v|^r} = c \hat{h}(v)$$

とかけると同値である.

註. 条件 (2, i) が成立しても (2, ii) は必ずしも成立しない事が知られている. (P. Malliavin, 1961, 未発表).

② を無限回微分可能, compact support を持つ函数の集合とすると

(補題 1). $\varphi \in \mathcal{D}$, 核 k が (1), (2) をみたすならば

$$\left\| \frac{K(\cdot, p; \varphi) - \varphi(\cdot)}{p^{-r}} - c (-1)^{[\frac{r}{2}]} \varphi^{(r)}(\cdot) \right\|_E \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty)$$

が成立する. $\therefore \therefore$

$$\varphi^{(r)}(x) = \varphi^{(r)}(x) \quad (r = \text{偶数}), = (\tilde{\varphi})^{(r)}(x) \quad (r = \text{奇数}).$$

(証明)

$$\begin{aligned} & \frac{K(x, p; \varphi) - \varphi(x)}{p^{-r}} - c (-1)^{[\frac{r}{2}]} \varphi^{(r)}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\hat{h}(v/p) - 1}{(v/p)^r} - c \right\} |v|^r \hat{\varphi}(v) \bar{e}^{ivx} dv \end{aligned}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{2\pi}} (-1)^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\{r\}}(x-u) d h(pu) - \varphi^{\{r\}}(x) \right\}.$$

(命題 1) 核長が (1) (2) を満たすならば

$$\|K(\cdot, p; f) - f(\cdot)\|_E = O(p^{-r}) \quad (p \rightarrow \infty)$$

となるための必要十分条件は $f(x) = 0, (a.e.)$ である.

(証明) 必要性を示せばよい. $\varphi \in \mathcal{D}$ に対して補題 1 の結果が成立するとして, 函数合成の交換可能性から

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi^{\{r\}}(x) dx = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

超函数に関する微分の定理から $f(x) = 0, a.e.$

(命題 2) 核長が (1), (2) を満たすとき

$$\|K(\cdot, p; f) - f(\cdot)\|_E = O(p^{-r}) \quad (p \rightarrow \infty)$$

となるための必要十分条件は

$$\tilde{f}^{\{r-1\}} \in BV(E=L^1), \quad f^{\{r\}} \in L^1(E=L^p(1 < p < \infty)), \quad f^{\{r\}} \in L_0^\infty(E=C_0)$$

(証明) 必要性. 例えは $E = L^1$ の時は補題 1 と BV の空間の単位球が w^* -compact なることを用ゝれば, $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し

$$c(-1)^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi^{\{r\}}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dg(x), \quad g \in BV.$$

十分性. (2, ii) によつて $\{\hat{h}(\nu/p) - 1\} / (|\nu|/p)$ が BT に属する函数のフーリエ変換の持続因子であることによる.

(定義) (命題 1, 2) の結論が成立するような場合, この特殊積分による近似法は次数 p^{-r} で飽和に達するといひ, 命題 2 で与える函数族を, その飽和族といふ.

(定理 1) 核 k が条件 (1) (2) を満たす時, 特殊積分 $K(x, p; t)$ による飽和次数は p^{-r} で, 飽和族は

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(r)} &\in BT (E=L), \quad f^{(r)} \in L^p (E=L^p), \quad f^{(r)} \in L^\infty (E=C_0). \\ \text{すなわち} \quad \tilde{f}^{(r)}(x) &= f^{(r)}(x), \quad (r=\text{偶}), \quad = (\tilde{f})^{(r)} \quad (r=\text{奇}) \end{aligned}$$

(但し $E=C_0$ の時 $\tilde{f}$ は Wiener の拡張した共転函数とする).

§ 2. 応用例

上に述べた一般定理を応用する場合 $k(x)$ が条件 (2) (ii) を満たすことを示すのが問題である. この判定条件には Nagy, Beurling 等によるものがみえるが, ここでは近似論の場合に有用な簡単なものと与える.

(定理 2) $\hat{h}(t)$ がある有界変分函数のフーリエースケル変換積分ならば

$$\hat{k}(t) - 1 = \int_0^t \tau \hat{h}(\tau) \tau^{-1} d\tau$$

が成立すれば, k は (2, ii) を満たす.

(証明) 与えられた式で変数 $\tau = t u$ と変換すると

$$\hat{k}(t) - 1 = t^r \int_0^1 r \hat{h}(tu) u^{r-1} du$$

右辺のリーマン積分の近似和 R_n をつくと

$$R_n = \frac{1}{n^r} \sum_{k=0}^{n-1} r \hat{h}\left(t \cdot \frac{k}{n}\right) k^{r-1}$$

$\|\hat{h}\|'$ が $\hat{h}$ の全変動を示すことにすれば

$$\|R_n\|' = \frac{1}{n^r} \sum_{k=0}^{n-1} \|\hat{h}\|' r k^{r-1} \leq \|\hat{h}\|'$$

従って λ の一様極限もまた BV の函数のフーリエスケルゲ
変換が表され、 λ のノルムは有限である。

(例 1) Gauss-Weierstrass の特異積分

$$k(u) = 2^{\frac{1}{2}} e^{-|u|^2} \in L, \quad \hat{k}(v) = e^{-\frac{1}{4}v^2}$$

$$\frac{\hat{k}(t)-1}{t^2} \rightarrow -\frac{1}{4}, \quad \hat{k}(t)-1 = -\frac{1}{2} \int_0^t \tau e^{-\frac{1}{4}\tau^2} d\tau$$

故に $r=2$ で一般定理の仮定をみたす。

(例 2) Cauchy-Poisson の特異積分

$$k(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+u^2} \in L, \quad \hat{k}(v) = e^{-|v|}$$

$$\frac{\hat{k}(t)-1}{|t|} \rightarrow -1, \quad \hat{k}(t)-1 = -\int_0^t e^{-|\tau|} d\tau$$

故に $r=1$ で定理の仮定をみたす。

(例 3) Bochner-Riesz の特異積分

$$k(u) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) V_{\alpha+\frac{1}{2}}(|u|) \in L^1 \quad (\alpha > 0)$$

$$\hat{k}(v) = (1 - |v|^2)^\alpha \quad (|v| \leq 1), \quad = 0 \quad (|v| \geq 1)$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\hat{k}(v) - 1}{v^2} = -\alpha \neq 0, \quad \hat{k}(v) - 1 = -2\alpha \int_0^v \tau (1 - |\tau|^2)^{\alpha-1} d\tau$$

よって $\alpha > 1$ ならば $r = 2$ で定理の仮定を満たす。

II. 多変数の場合

$f \in E$ に対し

$$K(x, p; f) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{E_n} f(x-u) p^n k(pu) du$$

を考える。簡単のため核は密度 k を持つとする。 $k(u)$ が

$$(1) \quad k \in L(E_n), \quad \text{radial function であり } \|k\|_1 = (\sqrt{2\pi})^n$$

を満たすとする。 k が radial 故にそのフーリエ変換もまた radial であり、これは k が

$$(2) \quad (i) \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\hat{k}(v) - 1}{|v|^r} = c \neq 0, \quad (ii) \frac{\hat{k}(v) - 1}{|v|^r} \in (S, S)$$

とする。この時 $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し次の補題が成立する。

(補題1) $\varphi \in \mathcal{D}$, 核 k が (1) (2) を満たすならば

$$\left\| \frac{K(\cdot, p; \varphi) - \varphi(\cdot)}{p^{-r}} - c (-1)^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \varphi^{(r)}(\cdot) \right\|_E \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty)$$

$\varphi^{(r)}(x)$ は r の偶数か奇数かによつて

$$\varphi^{(r)}(x) = \Delta^m \varphi \quad (r=2m) = \Delta^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial x_j} \right) \quad (r=2m+1).$$

但し $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_n)$ は φ の vectorial conjugate.

(Riesz 変換) である.

証明は フーリエ変換

$$(\Delta^m \varphi)^\wedge = |v|^{2m} \hat{\varphi}, \quad \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial x_j} \right)^\wedge = \frac{-\sum (iv_j)^2}{|v|} \hat{\varphi}(v) = |v| \hat{\varphi}(v)$$

を用いたが一変数と同様. 命題 1, 2 も大体一変数と同様にし

て次の一般定理が成立する.

(定理 1) 核 k が条件 (1), (2) を満たす時特異積分 $K(x, f)$

による飽和次数は p^{-r} で飽和核は

$$\int_E f^{(r)}(x) dx \in C_0'(E=L^1), \quad f^{(r)} \in L^p(E=L^p, 1 < p < \infty)$$

$$f^{(r)} \in L_\infty(E=C_0).$$

但し $f^{(r)}(x) = \Delta^m f \quad (r=2m), = \Delta^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x_j} \right) \quad (r=2m+1)$

微分 Δ の共軛は一般には超函数の意味とする.

応用に因りて定理 2 は一変数と同様な形で成立する.

(例 1) Gauss-Weierstrass の特異積分

$$k(u) = 2^{-n/2} e^{-|u|^2/2}, \quad |u| = \left(\sum u_j^2 \right)^{1/2}.$$

$$\hat{k}(v) = e^{-\frac{1}{4}|v|^2} \quad \frac{\hat{w}(v)-1}{|v|^2} \rightarrow -\frac{1}{4}$$

$r=2$ で定理の仮定をみたす.

(例 2) Cauchy-Poisson の特異積分

$$k(u) = \frac{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\{1+|u|^2\}^{\frac{1}{2}(n+1)}}$$

$$\hat{k}(v) = e^{-|v|}, \quad \frac{e^{-|v|}-1}{|v|} \rightarrow -1.$$

$r=1$ で定理の仮定をみたす.

(例 3) Bochner-Riesz の特異積分

$$k(u) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) V_{\frac{n}{2}+\alpha}(|u|)$$

$$\hat{k}(u) = (1-|v|^2)^\alpha \quad (|v| \leq 1), = 0 \quad (|v| \geq 1)$$

$\alpha > \frac{1}{2}(n-1)+1$ の時 $r=2$ で定理の仮定をみたす.

文 献

- (1) H. Buchwalter, Comptes Rendus Paris, 250(1960), 3562-64
- (2) R.J. Nessel, Proc. Amsterdam, 70(1967), 52-73.

(*) 本言稿は十島進孝氏と共著である.