

D. Gabai による, knot complement 上の foliation の構成

阪本 理 小 林 毅

§ 1.

1984 年の暮, 結び目理論の懸案であった Property R 予想及び Poincaré 予想が D. Gabai により肯定的に解決された。この際, 本質的な役割を果たしたのは  $R$  の knot complement 上の foliation の存在定理である:

定理 (Gabai)  $K$  を  $S^3$  内の非自明な結び目,  $S$  を  $K$  の minimal genus Seifert 膜とする。この時,  $K$  の complement  $S^3 - N(K)$  上の taut, finite depth foliation  $\mathcal{F}$  下記のものが存在する:

- $S$  は  $\mathcal{F}$  の leaf.
- $\mathcal{F}$  に  $\partial N(K)$  に transverse に交わる。また  $\mathcal{F}|_{\partial N(K)}$  は, foliation by circles.

本稿では, 上の定理の証明の概略を述べる事にする。尚, Gabai 自身の論文 [G2] も存在するので詳しくは, いろいろを参照されたい。

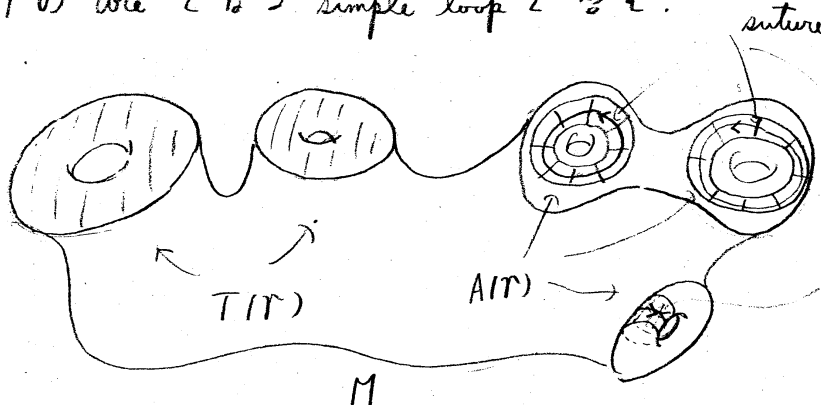
## §1. 準備.

この節では, [G1] の結果のうち後で必要となるものを紹介しておく。用語等については Hempel [H], Gabai [G1] を参照されたい。

以下,  $M$  を compact, oriented 3-manifold とする。

定義. 組  $(M, \mathcal{R})$  が sutured manifold とは,

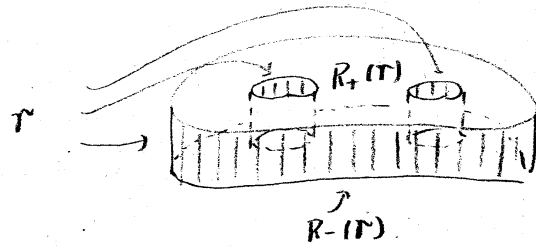
- (1)  $\mathcal{R}$ : a set of pairwise disjoint annuli  $A(\mathcal{R})$ , and tori  $T(\mathcal{R})$ .
- (2)  $A(\mathcal{R})$  の各成分は, suture と呼ばれる, 向きをついた,  $\gamma$  の core とする simple loop を含む。



(3)  $R(\mathcal{R}) = \partial M - \mathring{\mathcal{R}}$  の各成分には, 向きが与えられている。特に  $\gamma$  のうちの  $\gamma$  normal vector が外向き (内向き resp.) のものの全体の和を  $R_+(\mathcal{R})$  ( $R_-(\mathcal{R})$  resp.) と書く。

例. (product sutured mfd.).  $S$  を compact surface  $\neq \emptyset$  となるものとする。この時,  $M = S \times [0, 1]$ ,  $\mathcal{R} = \partial S \times [0, 1]$ ,

$R_+(T) = SX\{1\}$ ,  $R_-(T) = SX\{0\}$  とすれば sutured mfd.  $(M, T)$  を得る。



定義.  $\mathcal{F}$ : a codimension 1 foliation of  $M$ .  $L$ : a leaf of  $\mathcal{F}$  とする。

この時,  $L$  及び  $\mathcal{F}$  の depth を  $\mathbb{R}$  のように定める。

$L$ : depth 0  $\Leftrightarrow L$  compact

depth  $j (1 \leq k)$  leaf が定まる, とする。この時

$L$ : depth  $k+1 \Leftrightarrow \bar{L} - L$ : a union of depth  $j (1 \leq k)$  leaves,  $\bar{L} - L$  は, depth  $k$  leaf を含む。

また,  $\mathcal{F}$ : depth  $k \Leftrightarrow k = \max \{ \text{depth } L \mid L: \text{a leaf of } \mathcal{F} \}$ 。

注意. leaf 及び foliation の depth は, 一般に定義出来るとは, 限らない。

定義.  $(M, T)$ : a sutured mfd. とする。この時:

$(M, T)$ : taut とは,  $\bullet M$ : irreducible, 及び  $\bullet R(T)$ : norm minimizing in  $H_2(M, T)$  なる事。

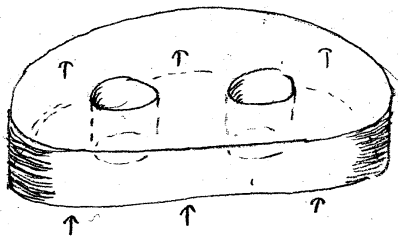
( $H_2(M, T)$  の norm について)  $T$  は, Gabai [G1], or Thurston [T] 参照)

定義.  $\mathcal{F}$ : a transversely oriented codim. 1 fol. <sup>(of)</sup> a sutured mfd.  $(M, T)$  とする。この時,  $\mathcal{F}$  が taut とは, 次を満たす事とする。

1)  $\mathcal{F}$  は,  $\mathcal{R}$  に対し  $\mathcal{T}$  横断的,

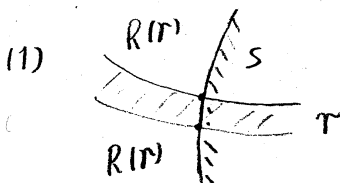
2)  $\mathcal{F}$  は,  $\mathcal{R}(\mathcal{F})$  に tangent.  $\mathcal{F}$  の normal direction  $\mathcal{R}_+(\mathcal{F})$   
 $(\mathcal{R}_-(\mathcal{F}) \text{ resp.})$   $\mathcal{T}$  外向き (内向き resp.).

例. Product sutured mfd. 上の product foliation は, taut

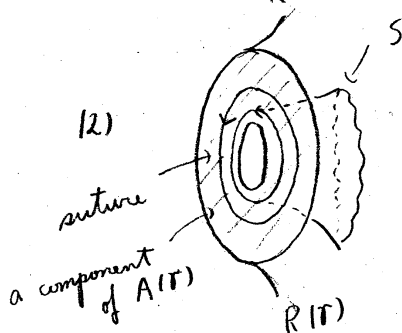


以下 sutured mfd. decomposition 及び sutured mfd. hierarchy を定義

する. まず,  $(M, \mathcal{R})$  を a sutured mfd.  $S$  を a properly embedded  
oriented surface in  $M$   $\mathcal{R}$   $S \cap \mathcal{R}$  の各 component は,  $\mathcal{R}$  の (1) 以下の下にあるよ  
 うなものとする.



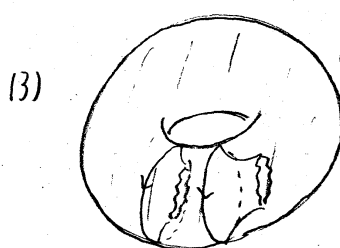
: an essential arc in  $A(\mathcal{R})$ ,



suture と向きま下込め  $\mathcal{T}$  parallel

な simple loop. (但し  $\partial S$  の各成分には

$S$  の向きが induce される向きが入ることを要する)



$T$ : a component of  $\mathcal{T}(\mathcal{R})$

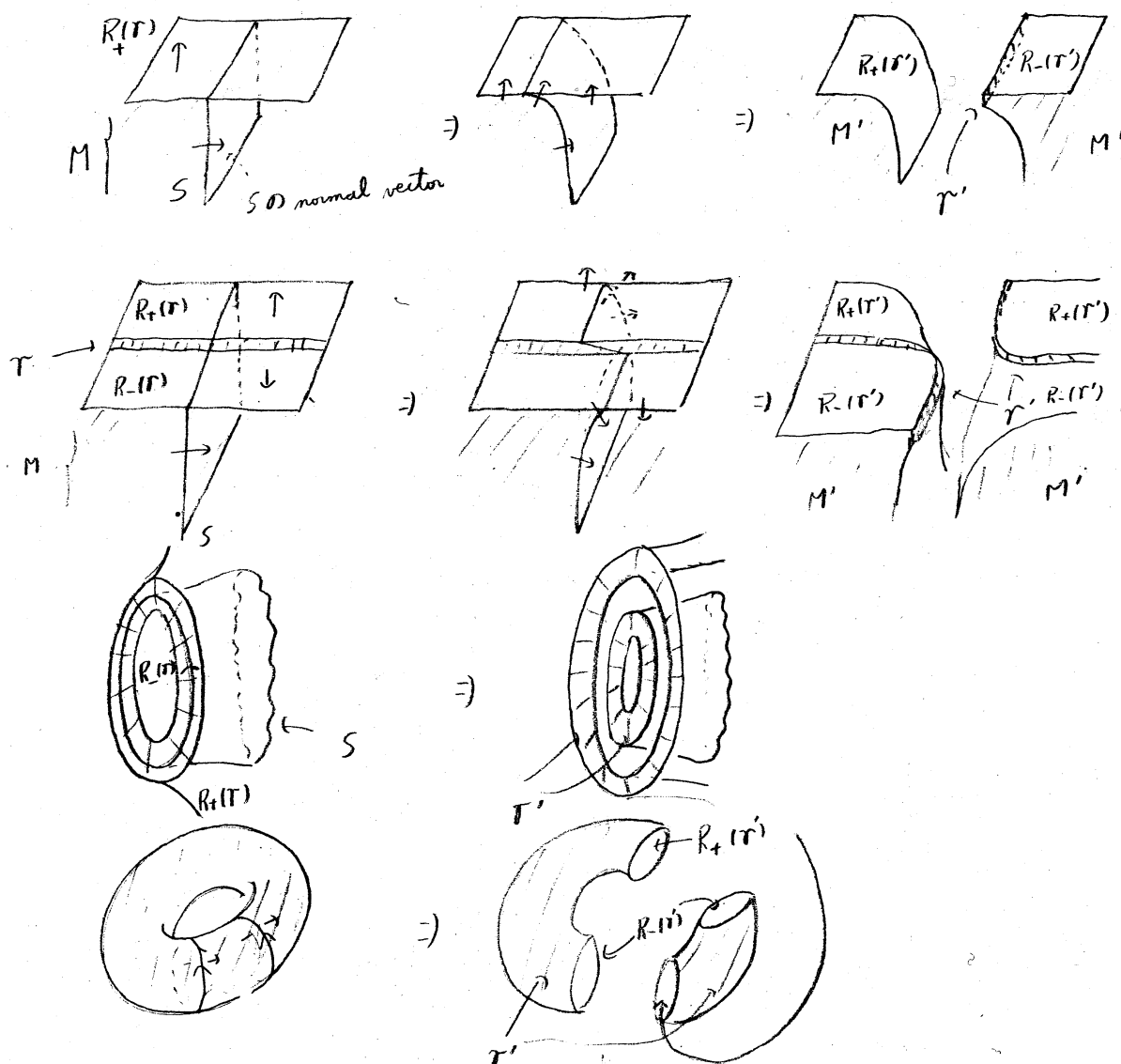
$\mathcal{T} \cap S$  は 向きま下込め  $\mathcal{T}$  parallel な

essential loops 又は an essential loop

二の時. sutured mfd. decomposition  $(M, T) \xrightarrow{S} (M', T')$  と  
 次で定める.

$$\bullet M' = M - \mathring{N}(S)$$

$\bullet T'$  は, 次のように定める.



定義. sutured mfd.  $(M, T)$  が decomposable とは, sutured  
 mfd. decomposition の sequence:

$$(M, \mathcal{R}) \xrightarrow{S_1} (M_1, \mathcal{R}_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \mathcal{R}_m)$$

↑  $(M_m, \mathcal{R}_m)$  が a product sutured mfd. となるようなものが存在する事とする。またこの sequence のことを a sutured mfd. hierarchy と呼ぶ。

sutured mfd. hierarchy の存在に関しては、次の結果がある。

定理 ([G1])  $(M, \mathcal{R})$  を connected taut sutured mfd. とする。

また  $M$  が rational homology sphere の時は、essential torus を含むとする。

この時  $(M, \mathcal{R})$  の sutured mfd. hierarchy  $(M, \mathcal{R}) \xrightarrow{S_1}$

$(M_1, \mathcal{R}_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \mathcal{R}_m)$  ↑ "  $V$ : a component of  $R(\mathcal{R}_i)$  とすると

$S_{i+1} \cap V$  は、向きを下込め  $k$  parallel な  $k (\geq 0)$  本の non-separating simple closed curves, or arcs." となるものが存在する。

証明の

以下 §1. 下述の定理の概略を述べる事にする。尚、各

定義, Lemma の後に付いた番号は、全 G. Gabai の論文に

合わせたの所で所々に欠番がある事を予めお断りしておく。

§ 3.

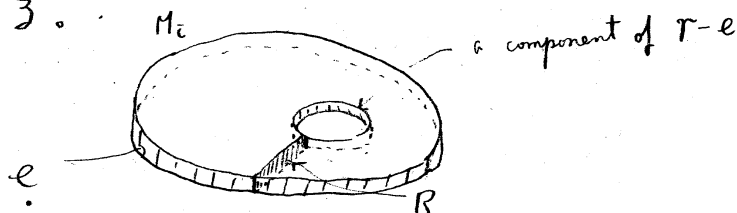
以下  $M$  を knot  $K$  の exterior  $S^3 - N(K)$  とする。

定義 3.2.  $(M, \partial M) \xrightarrow{S_1} (M_1, \mathcal{R}_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \mathcal{R}_m)$  : a sutured mfd.

hierarchy とする。この時 boundary suture  $E_i \subset \partial M_i$  を  $\mathcal{R}$  のように定める。

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0 = \partial M \\ E_i : \text{the union of those components of } E_i - \mathring{N}(S_i) \text{ which are annuli and tori} \end{array} \right.$$

1)  $e$  : a component of boundary suture とする。この時,  $e$  が boundary parallel とは,  $\mathcal{R}$  のような rectangle  $R$  が存在する事とする。



Notation 3.3.  $(M, \mathcal{R})$  : a sutured mfd.

$E$  : a distinguished set of annular component of  $\mathcal{R}$  とする。この時 sutured mfd.  $(\hat{M}, \hat{\mathcal{R}})$  を  $\mathcal{R}$  のように定める。

$\hat{M}$  : mfd. obtained by attaching 2-handle to  $M$  along each comp. of  $E$

$\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - E$

$\mathcal{R}$  の Lemma の証明は, [G1] の中下定義された sutured mfd. complexity を用いた議論を要するの以下二下は, 省略する。

Lemma 3.6.  $(M, \partial M)$  に対し  $\mathcal{R}$  sutured mfd. decomposition の sequence

$$(M, \partial M) = (M_0, \tau_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, \tau_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \tau_m)$$

下のようなものが存在する。

- 1)  $S_i$  : connected,  $[S_i] \neq 0 \in H_2(M_{i-1}, \partial M_{i-1})$ ,
- 2)  $V$  : a component of  $R(\tau_{i-1})$  とする と  $S_i \cap V$  は、向きま  $\nabla$  の  $\nabla$  parallel to non separating simple closed curves, or arcs.
- 3)  $E_{i-1} \cap S_i$  : a union of simple closed curves,
- 4)  $\hat{\partial M}_m$  : a union of 2-spheres.

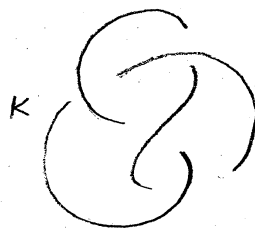
(  $\hookrightarrow$  distinguished suture とし  $E_m$  を とる. )

Remark: 結果的には、上の decomp. は (少し変形して) sutured mfd. hierarchy になる事が示される。

§4.

$K$  : a knot in  $S^3$  とする。

Convention 4.1.  $S^3$  内の 2 点  $x, y$  を fix する。



この時  $S^3 - \{x, y\}$  は、 $S^2 \times \mathbb{R}$  と同相。

また  $S^2$  内の 1 点  $z$  を fix すると  $(S^2 - \{z\}) \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

いまこの第2成分  $\mathbb{R}$  の射影  $h$  を考え、これを height function とする。また  $Q_\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) を (この height での) level

$\alpha$ -sphere (or plane) を表す。また level planes 上の  $S^2 - \{x, y\}$  or  $(S^2 - \{z\}) \times \mathbb{R}$  の foliation を  $\mathcal{H}$  と表す。

定義 4.2.  $f : S^1 \rightarrow S^3$  : a presentation of  $K$  (i.e.  $f$  は embedding,

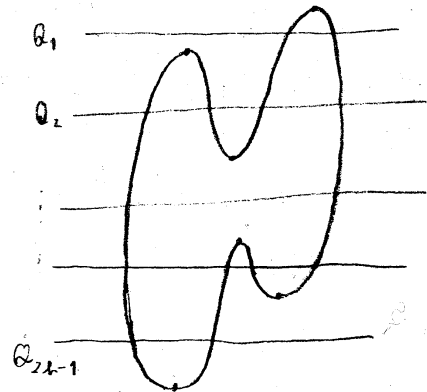
$\text{Image}(f) = K$ ) 下  $h \circ f$  が Morse function であるものとする。

いま  $h \circ f$  の critical point は、2k 個 ありとし、このうち、

全 7 異なる level にあるとする。  $Q_1, \dots, Q_{2k+1}$  は各 critical point の間にある level planes とする。

この時、  $K$  の width,  $w(K)$  を  
以下定める。

$$w(K) = \min \left\{ \frac{1}{2} \sum_i |Q_i \cap f(S^1)| \right\}$$



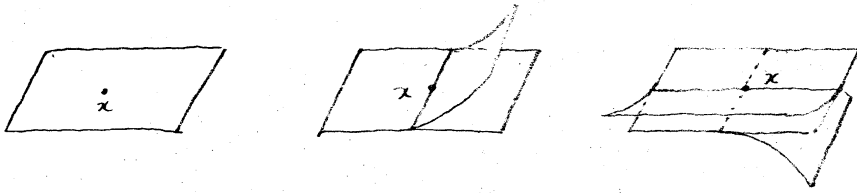
また、  $f$  が  $w(K)$  を実現している  
時、  $f$  は、 thin presentation であると言う。

定義 4.4.  $M'$  を  $n$ -mfd. とする  $M'$  上の  $p$ -dim. lamination  $L$  と  
は、  $M'$  内の closed subset  $N$  の分割  $N = \bigcup_{\alpha} L_{\alpha}$  ( $L_{\alpha}$ : connected) 下記の  
条件をみたすもの。

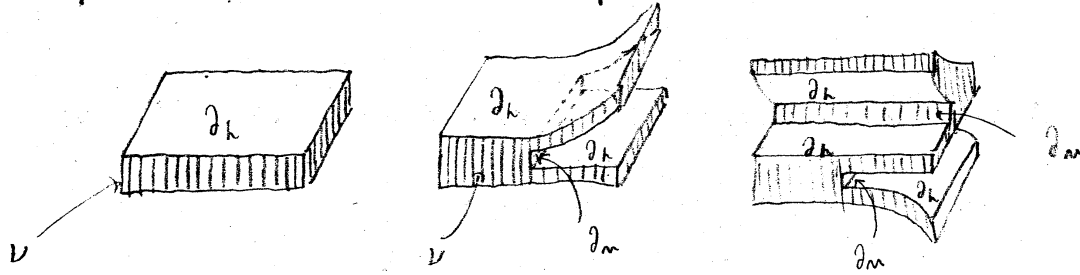
$\forall x \in M', \exists (U, \varphi)$  : local coordinate of  $x$  s.t. 各  $L_{\alpha}$  に対して  $U \cap L_{\alpha}$   
の各 component は、  $\{y \in U : \varphi_1(y) = \text{const}, \dots, \varphi_{n-p}(y) = \text{const}\}$  の形。

また  $\bigcup_{\alpha} U \cap L_{\alpha}$  の各 component を basis とする topology が  $L$  があるが  
これを  $L_{\alpha}$  の leaf topology と呼ぶ。

定義 4.7. 3-mfd.  $M$  内の branched surface (with generic branched  
locus)  $B$  とは、 各点  $x \in B$  が次のような local model をもつ  
 $M$  の subspace



また  $B$  は、次のように表わす事も出来る。  $M$  内の 3-dim. submf.  $N(B)$  下流のように各 leaf が  $I=[0,1]$  下にあるような foliation



$\nu$  をもつものを考える。この時、 $\nu$  の各 leaf を 1 点につぶす操作を  $\sim$  下表わすと  $M/\sim \cong M$  , この  $M/\sim$  内下の  $N(B)$  の image が  $B$  下ある。又、 $\partial N(B)$  は  $\nu$  と transverse な部分と tangent な部分に分れるので、それぞれを  $\partial_h N(B)$ ,  $\partial_\nu N(B)$  と表わす事にする。この  $N(B)$  を  $B$  の fibered nbhd. と呼ぶ。

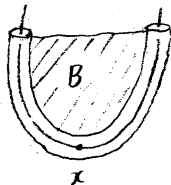
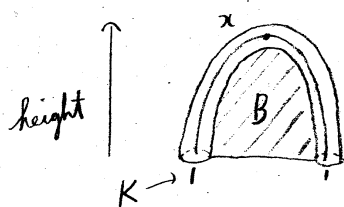
また、 $M$  内の lamination  $L$  が  $B$  によ、 $\tau$  carry されるとは、 $B$  の fibered nbhd.  $N(B)$  下、" $L \subset N(B)$ " かつ " $L$  は  $\nu$  に transverse" なるものが存在する事とする。  $L$  が  $B$  によ、 $\tau$  fully carried とは " $L$  が  $B$  によ、 $\tau$  carry される" かつ " $\nu$  の各 leaf は  $L$  と交わる" 事とする。

定義 4.8.  $M=S^3-\dot{N}(K)$  内の branched surface  $B$  が normal form にあるとは、次の条件 1)~6) の条件を満たす事とする。

1)  $K$  は、thin presentation.

2)  $B$  は  $N(K)$  の近くで次の状況:

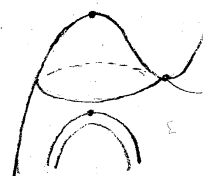
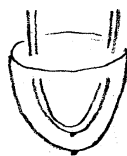
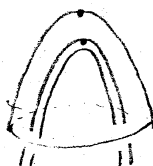
•  $x \in K$  が local max. or min. の時



•  $\mathbb{H}$  以外の時

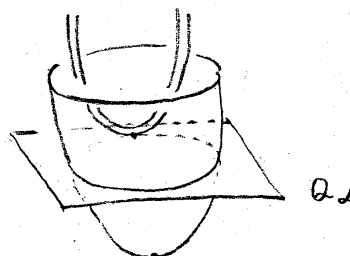
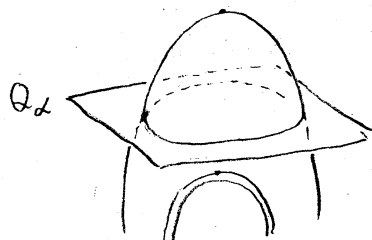


3)  $B$  は, isolated to 'saddle' 又は 'knot  $K$  の local max, or min. を包む center' を除いて  $\mathbb{H}$  に transverse



これは normal form である

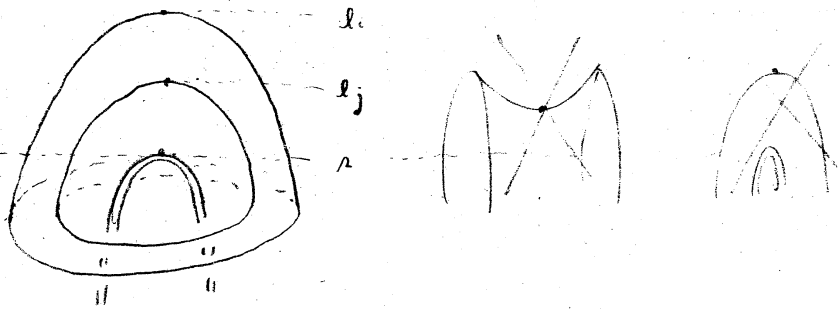
4) horizontal plane  $Q_\alpha$  で " $Q_\alpha \cap B$  の  $\alpha$  component  $C$  で  $Q-B$  の disk component を bound する" 様なものが存在したとするとこれは 3) の center の 状況の一部。即ち  $Q_\alpha$  を上げ (or 下げ) 7 叩くと center にぶつかり,  $Q_\alpha$  を下げ (or 上げ) 7 叩くと knot の local max. (or min.) にぶつかる。



5)  $z_1, \dots, z_r$  : points of tangency of  $B$  with  $\mathbb{H}$  とする。

また  $z_i$  の height を  $h_i$  とする。この時  $h_1, \dots, h_r$  は,  $K$  の local max, or min. とは異なる, 互いに相異なる level で生じる。

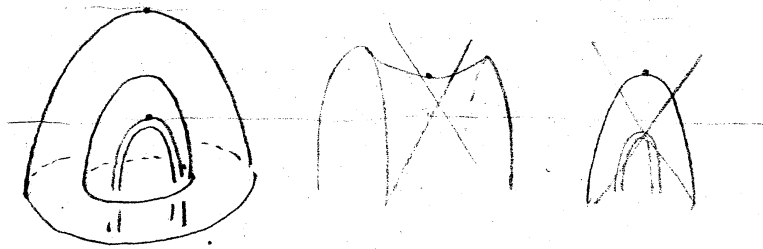
また  $z_i$  を height  $\lambda$  の  $K$  の local max. (or min.) を含む center とする. この時 " $\lambda < l_j < l_i$  (or  $l_i < l_j < \lambda$ )  $\Rightarrow z_j$  は  $l_i$  と同じ  $K$  の local max. (or min.) を含む center."



6) height fun. | branched locus of  $B$  は, Morse function  $T$ ,  $\gamma$  の critical point は,  $K$  の critical points と異なる discrete level  $T$  生じる.

定義 4.9:  $M = S^3 - N(K)$  内の lamination  $L$  が normal form にあるとは, 次の条件 1) ~ 5) をみたす事とする

- 1)  $K$  は, thin presentation,
- 2)  $L$  の  $N(K)$  の近く  $T$  4.8 2) と同じ状況
- 3)  $L$  を a leaf of  $L$  とする.  $L$  は (leaf topology  $T$ ) isolated to 'saddle' 又は, ' $K$  の local max. or min. を含む center' と除 1)  $T$  2) に transverse
- 4) horizontal plane  $Q \times T$  " $Q \times \cap L$  の a comp.  $C$   $T$   $Q-L$  の disk component を bound する" 様なものがあるとしたとすると.  
これは 3) の状況の一部.
- 5) (4.8 5) に対応する条件)



次の Proposition は, 定義 4.8, 4.9 より直ちに従う.

Proposition 4.10. (1) ま, 'lamination  $L$  ( $M$ ) は, normal form にある branched surface  $B$  により carry される' とする. この時  $L$  は, normal form にある lamination に isotopic.

定義 4.13.  $B$  を oriented 3-mfd.  $P$  内の transversely oriented branched surface とする. この時  $S(B) = (M, \tau)$ ; sutured mfd. defined by  $B$  を次のように定める.

$$\bullet M = P - N(B)$$

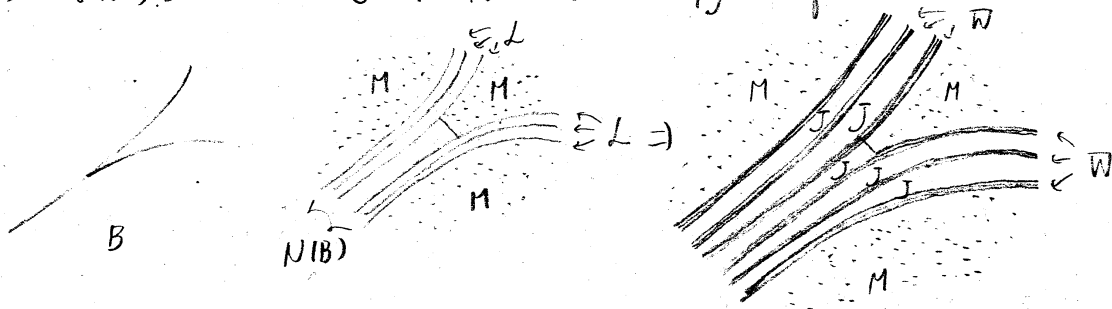
$$\bullet \tau = \partial_{\text{or}} N(B)$$

$\bullet R(\tau) = \partial_+ N(B)$ ,  $R_+(\tau)$ ,  $R_-(\tau)$  は,  $B$  の orientation から自然に定まる.

$N(B)$  は,  $I$  による fibration  $\nu$  をもつ事と  $B$  に carry される lamination の定義及び定義 4.13 より次の Proposition は, 容易に証明出来る.

Proposition 4.14.  $B$ : a branched surface in  $P$ ,  $L$ : a lamination fully carried by  $B$ .  $W$ : a lamination obtained by thickening  $L$  とする。

この時:  $S(B)$  は  $W$  の complement に natural に埋め込める (時に  $R(T) < 2W$ )。また  $J = P - (W \cup M)$  は  $\nu/J$  を fibration とする



4.15. sutured mfd. decomp. seq. か3の branched surface の構成

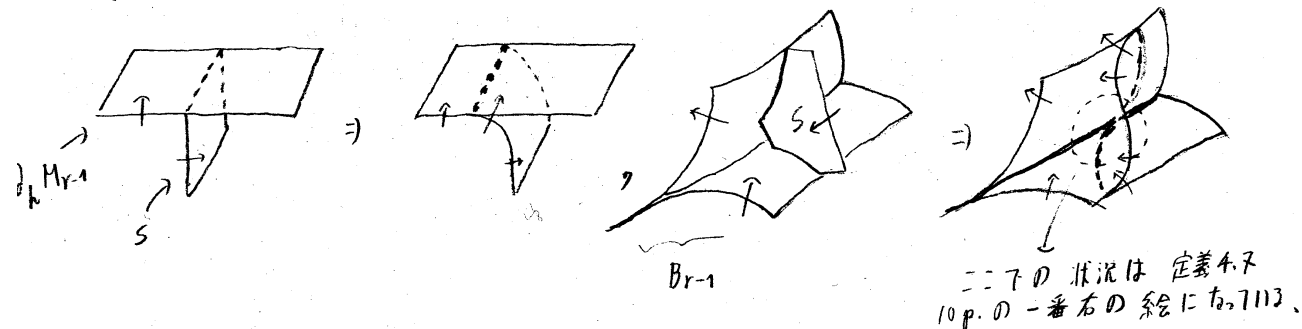
$(N, \partial N) = (M_0, T_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, T_m)$ : a seq. of sutured mfd.

decomp. とする。この時,  $N$  に proper に埋め込まれた branched surface (with generic branched locus)  $B_i \subset S(B_i) = (M_i, T_i)$  とする ようなものを次のように帰納的に構成する

•  $B_1 = S_1$

•  $B_1, \dots, B_{r-1}$  s.t.  $S(B_i) = (M_i, T_i)$  が定まるとする。

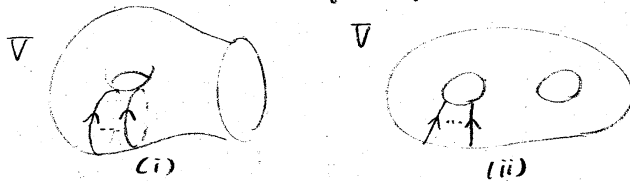
$S(B_{r-1}) = (M_{r-1}, T_{r-1})$  より  $S_r$  は  $N - \overset{\circ}{N}(B_{r-1})$  に proper に埋め込まれた surface. 従って  $B_r$  と次のように決めればよい。



## 4.16 Constructing finite depth lamination from sutured mfd. decomp.

$(N, \partial N) = (M_0, T_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_n} (M_n, T_n)$  : a seq. of sutured mfd. decomp.

Suppose:  $V$ : a comp. of  $R(T_i)$  とすると  $V \cap S_i$  は, 向きま下込め  $\parallel$  parallel to non-separating simple closed curves, or arcs.

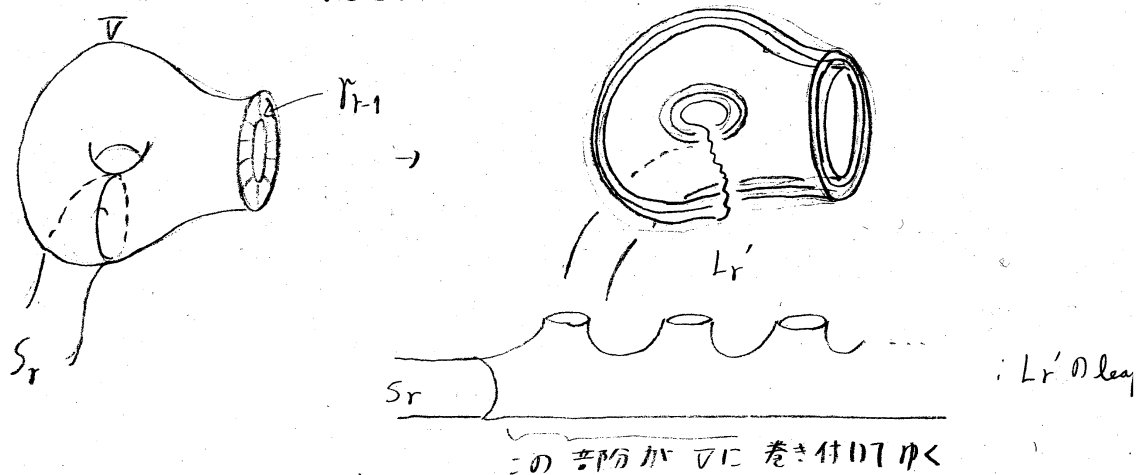


この時,  $L_i$ : finite depth lamination fully carried by  $B_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) を次のように帰納的に構成する。

•  $L_1 = S_1$

•  $L_1, \dots, L_{r-1}$  が構成されたとする。この時  $L_r$  を次のように構成する。まず 4.15 で得られる branched surface  $B_{r-1}$  から定まる  $N$  の分解  $M_{r-1} \cup W_{r-1} \cup J_{r-1}$  を考える。この時  $L_{r-1} \subset J_{r-1}$ 。 (i)  $S_r \subset M_{r-1}$  と考え  $S_r$  の boundary を  $R(M_{r-1})$  の component (と  $S_r$  と交わるもの) に 向きを考えると 巻き付け  $\parallel$  ゆく事により  $M_{r-1}$  の lamination  $L_r'$  を  $T_{r-1}$  と横断的  $\parallel$  下あようにものを得る。

例えば上の絵の (ii) の場合。





Proof. Step 1. ( $B_1 = T_1 (= S_1)$ ) を normal form にも,  $\gamma$  ゆく)

$(N_0, \delta_0) = (M, \partial M)$ ,  $T_1 = S_1$  とする。まず general position の議論により  $S_1 (= S)$  を次のような位置にも,  $\gamma$  ゆける。

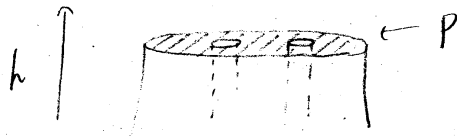
- $S$  は,  $K$  の近く  $\gamma$  normal form (i.e.  $S_1$  は, 4.8.12) をみたす)
- $S$  は, 次の3つの状況を除く  $\gamma$  横断的

saddle

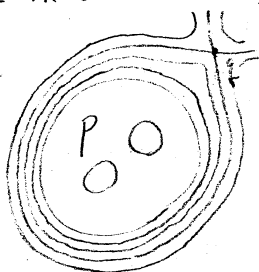
center in normal form (see 4.8.4)

plateau  $P$  (i.e.  $P$  は  $S$  に embed された surface  $\gamma$

$P \perp \gamma$   $h$  は, const., また  $h$  は,  $P \gamma$  local max., or min.)

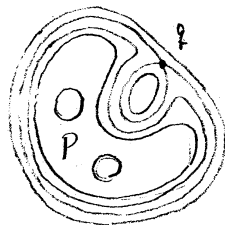


さて, plateau  $P$  ( $\subset S$ ) の近く  $\gamma$  の  $S \cap \gamma$  の状況を見る。  $\partial P$  の少し外  $\gamma$  は, foliation  $S \cap \gamma$  は, product  $\partial P \times I$  (leaf は  $\partial P \times \text{pt.}$ ) の形になっ  $\gamma$  いるが、この条件により leaf を外側にたどっ  $\gamma$  ければ必ず saddle にぶつかる事がわかる。これに注意して  $P$  を次の3つの type に分ける。



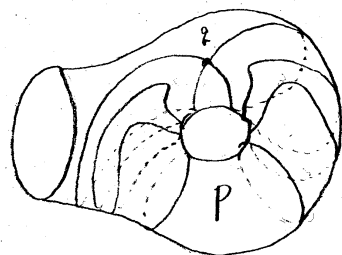
type I

$\partial P$  上の1点が pinch する



type II

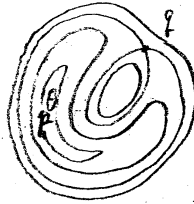
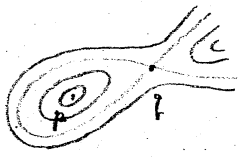
$\partial P$  の2 comp. 上の2点が squeeze する



type III

$\partial P$  の互いに異なる comp. 上の2点が squeeze する。

同様に各 center も次のように type I, II に分ける.



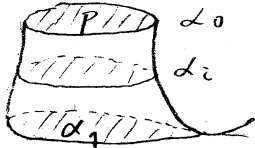
type I

type II

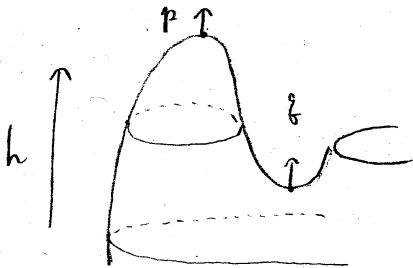
この時,  $f: PXI \rightarrow S^3$  下  $f(PXI03) = P$ ,  $f|_{PXI(0,1)}$  : embedding,

$f(PXI11) =$  となるものが存在する.

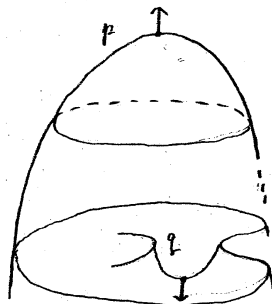
また  $\alpha_i = f(PXI_i)$  とする (従,  $\gamma \alpha_0 = P$ ).



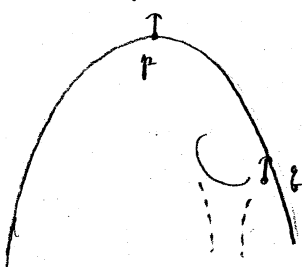
また type I, II を  $P$  (or  $P$ ) と  $f$  下の normal direction へ一致するか  
どうか下ろすに a 型, b 型に分ける. 即ち:



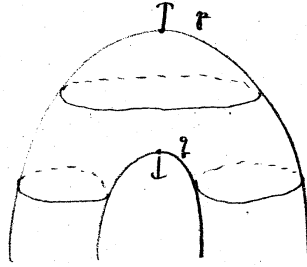
type Ia



type Ib



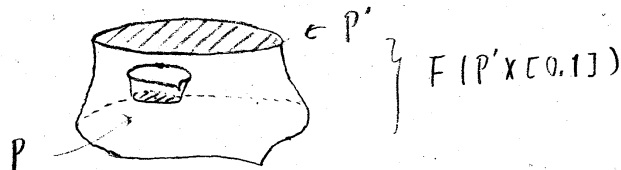
type IIa



type IIb

以上の状況のもと  $S$  の complexity (15) を 3 (plateaus の  
個数) + 2 (centers の個数) で定める. また  $P'$  を local max.

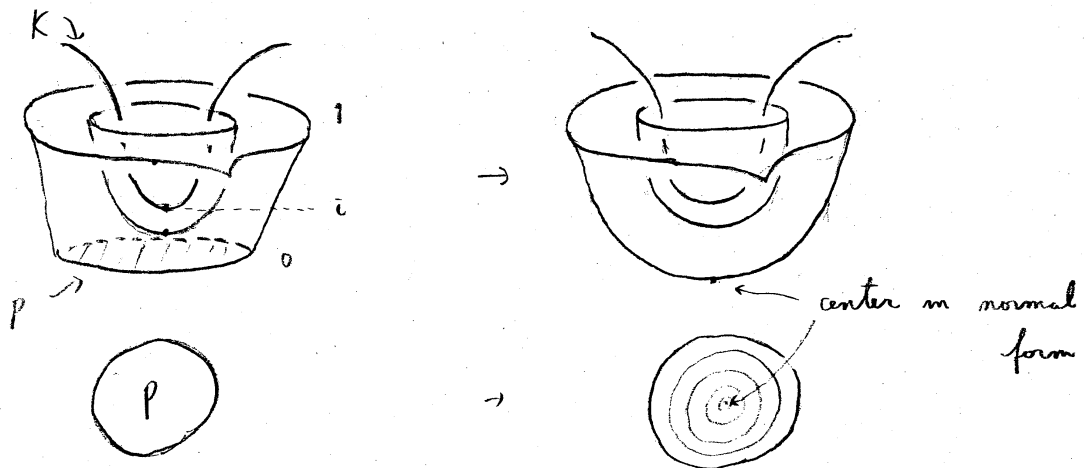
下ある plateaus のうち最も高さの低いもの,  $P \in F(P' \times (0, 1))$  に含まれる plateaus のうち最も高さの高いものとする。(注: もし  $P'$  が存在しなければ  $P$  を local min. 下ある plateau 下最も高さの高いものとする。  $P'$  も  $P$  も存在しない時は, 下の Case. 7  $\wedge$  行く)



Case 1.  $K \cap F(P' \times [0, 1]) \neq \emptyset$

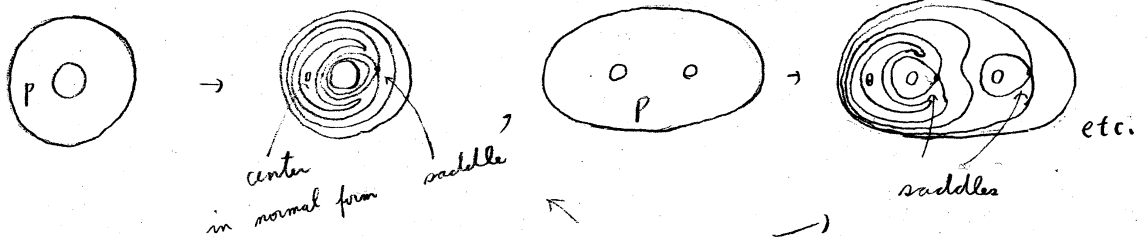
$\bar{c} = \min \{j \mid F(P' \times [0, j]) \cap K \neq \emptyset\}$  とする。即ち  $F(P' \times [0, \bar{c})) \cap$

$K = \emptyset$ ,  $F(P' \times \{\bar{c}\})$  は a local min. point of  $K$ .  $P$  が disk の時,  $S$



を上図のように  $P$  の nbhd. 下変形して complexity を下げられる。

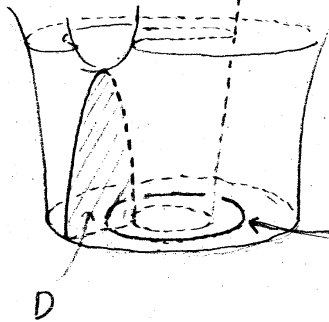
$P$  が disk でない時も次のように  $S$  を変形して complexity を下げられる。



これらの saddle は,  $\bar{c}$  より高い所にある。  
( $\bar{c}$ ) 下ある新しい center は, normal form 下ある)

以下,  $K \cap F(PX[0.1]) = \emptyset$  とする.

Case 2  $P$  is of type III



この時, 左の様に  $D \cap S = \partial D$  となる disk

$D$  がとれる。いま  $S$  上の loop

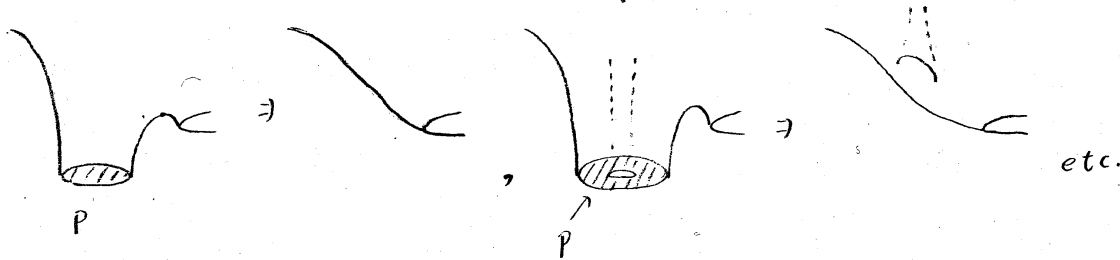
$\partial D$  と transverse に 1 点で交わるものが

存在するから  $\partial D$  は,  $S$  上の essential loop.

これは,  $S$  が min. genus に矛盾.

Case 3  $P$  is of type Ia

この場合,  $R$  のようにして complexity を下げられる。



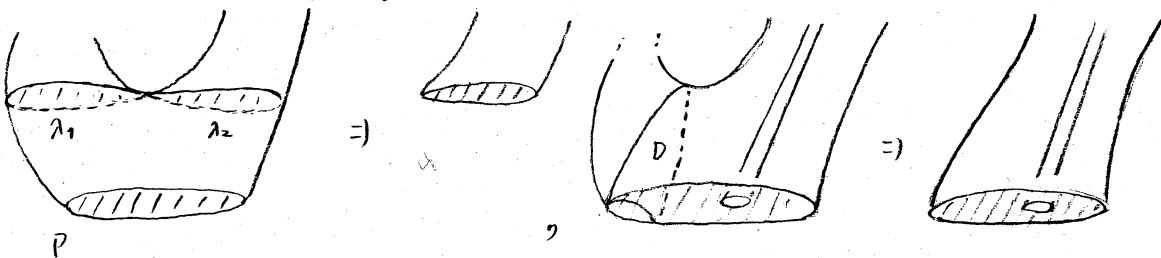
Case 4.  $P$  is of type Ib

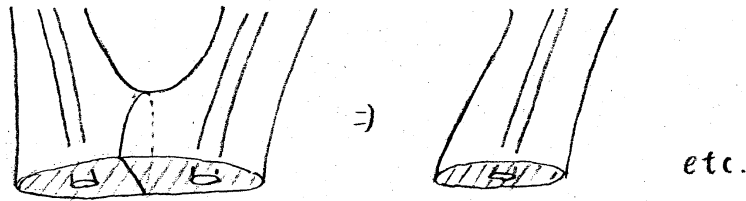


local min. とすると,  $P$  の取り方は "これは center ではない" となる。他方 この saddle の存在と  $K \cap F(PX[0.1]) = \emptyset$  より上の center は, normal form ではない事がわかる: 矛盾.

Case 5.  $P$  is of type IIb

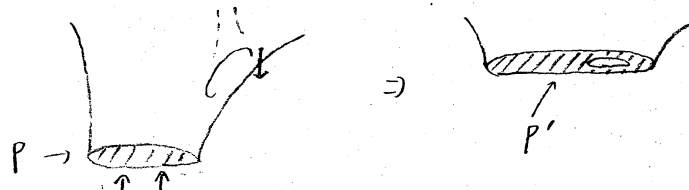
$R$  のようにして complexity が下げられる。





Case 6.  $P$  is of type IIb

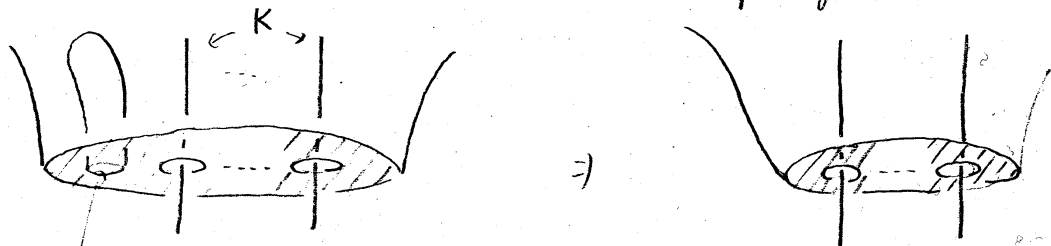
この時,  $P$  を次のように押し上げて  $\Gamma$  新しい plateau を作る。



注: この時  $|X(P')| = |X(P)| - 1$ , また新しく得られた surface は,  $S$  と同じ complexity をもつ。

この新しい surface に Case 1~5 の議論が適用出来れば complexity が下がる。もし適用出来ないならばと同様 surface 上の  $a$  plateau を押し上げて新しい plateau を作る。この方法下りつても complexity が下がるなかったとする。この時,  $a$  surface 上の  $a$  plateau  $P_r$  下  $|X(P_r)| > w(K)$  なるものが存在する。  
 $\xrightarrow{\text{see 4.2}}$

この時  $\partial P_r$  の component 下 surface 上の disk を bound するものか  
 とれるからこれを用いて次のように complexity を下げられる。



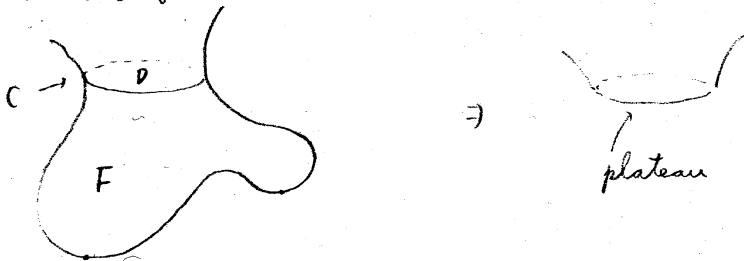
この中  $K$  は 通る (① def. of  $w(K)$ )

以上の考察により  $S$  を min. complexity にとれば  $S$  上に

plateau は存在しない事がわかる。従って、この  $S$  が normal form にある事を見る為には、あと 4.8.4) の条件をみたす事を確かめればよい。

Case 7  $\exists Q$ : level plane,  $\exists C$  a component of  $Q \cap S$  s.t.  $C$  bounds a disk  $D$  in  $Q-S$ ,  $C$  bounds a disk  $F$  in  $S$  s.t.  $F$  is not normal form.

この時 次のように  $S_1$  を取り変える事により complexity を下げられる。



(注: Gabai は、論文の中で Case 7 を上のように取り扱っているが、実際には、Case 7 は起り得ないと思われる。)

## Step. 2

Lemma 4.21.  $B$ : a branched surface in normal form w.r.t.  $K$  s.t.

$S(B)$ : taut,

$S(B) = (M, \tau) \xrightarrow{S} (M', \tau')$ : a sutured mfd. decomp. s.t.

- $V$ : a comp. of  $R(M) \Rightarrow S \cap V$ : 向きまた向  $\partial V$  parallel to simple closed curves or arcs.
- $(M', \tau')$ : taut

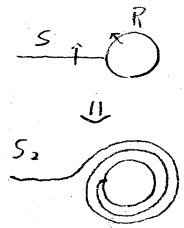
$R$ : the components of  $R(M)$  which intersects  $S_1$

$S_r$ : the properly embedded surface in  $M$  obtained by oriented cut and paste surgery with  $S$  and  $r$  parallel copies of  $R$ .

$(M, r) \xrightarrow{S_r} (M', r') : \text{sutured mfd. decomp.} \Rightarrow \text{MT 得る M}$

branched surface を  $B_r$  とする。(以上が Lemma の仮定)

$\Rightarrow \exists r$  s.t.  $B_r$  は rel  $\partial$  isotopy  $T$  branched surface in normal form に isotopic.

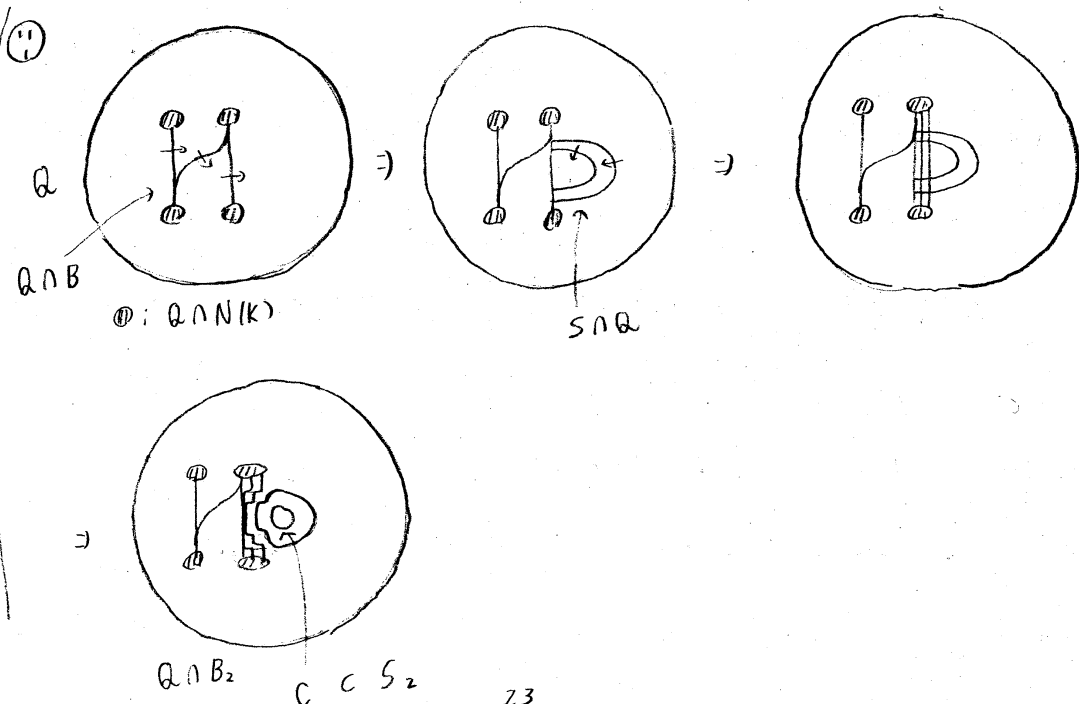


Proof.  $S_1$  を次のように isotopy 移動かす。

- $S$  は,  $B$  の saddle, center の nbhd. と disjoint.
- $h|_{S_1}$  は, Morse fun. centers in normal form
- $S$  は, isolated saddle, plateaus / 以外  $T$  横断的.
- $B$  の branched locus は, Def. 4.8 b) をみえす。

$\Rightarrow T$   
"m を十分大きくとれば, 次のように出来る:"

$n > m$  とすれば  $Q \cap B_n$  が smooth circle  $C$   $T$   $Q - (B_n \cup N(K))$  の disk component  $\hookrightarrow$  a level plane  
を bound するようになるものを含む  $\Rightarrow C \subset S_n$ , or  $C$  は  $B_n$  内の  
disk  $T$  center in normal form を含むようになるものを bound する"



$m'$ : the number of plateaus and centers of  $S_m$  とし  $r = m + m'$  とする。

この時,  $\Omega = \{\text{centers and plateaus in } B_r \text{ which are contained in } S_m\}$  とし

$\Omega$  の complexity を  $C(\Omega) = 3|\text{plateaus の個数}| + 2|\text{centers の個数}|$  で定めれば,

後は Step 1 と同様に議論が進行して Lemma が証明出来る。

### Step 3. (Proof of Lemma 4.19)

まず  $S_1$  に Step 1 を apply して normal form  $S_1^1$  に持ち帰る。

次に  $S_2$  に Step 2 を apply し新 (1) sutured mfd. の seq. :

$$(M_0, T_0) \xrightarrow{S_1^1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2^2} (M_2, T_2) \xrightarrow{S_3^3} (M_3, T_3) \xrightarrow{S_4^4} \cdots \xrightarrow{S_m^m} (M_m, T_m)$$

を得る。(  $S_1^1$  と  $S_2^2$  から定まる branched surface は normal form に持ち帰れる )

次に  $S_3^3$  に Step 2 を apply する --- 以下二行をくり返してゆけば,

Lemma 4.19 の, sutured mfd. decomp. の seq. を得る。

Lemma 4.22.  $L \subset S^3 - \overset{\circ}{N}(K)$  : a finite depth lamination with incompressible leaves,  $W$  : a lamination obtained by thickening  $L$ ,  $(M, T)$  : a taut sutured mfd. embedded in  $S^3 - (N(K) \cup W) \Rightarrow (M, T), W$  を isotopy で動かして  $R$  のような level plane  $Q$  を見つける。

0)  $Q \cap K \neq \emptyset$

1)  $Q$  は  $\overset{\circ}{W}$  内の有限個の saddles, centers を除いて  $Q$  と横断的。

2)  $W \cap Q$  の component のうち  $Q - (W \cup N(K))$  で disk を bound するようなものは高々 1 個。

3)  $Q$  は,  $M$  に横断的。  $Q \cap T$  の各 arc component は,  $T$  の

essential arc.

4)  $Q \cap (\partial M - \dot{E})$  の各 arc component は,  $\partial M - \dot{E}$  上 essential.

Proof.  $M$  を isotopy で動かして次のようにする.

$\partial M$  は, 有限個の saddles, centers を除いて level 2-spheres と横断的.

$\partial T$  は, 有限個の critical points を除いて level 2-spheres と横断的.

全ての tangency は, 相異なる level にある.

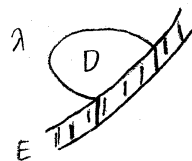
$h$  を  $K$  の local min. 上最も高い所にあるものの高さ,  $\alpha$  を  $K$  の local max. 上  $h$  より高い所にあるもののうち最も低いものの高さとする.



$h < \alpha < \alpha$  とし  $Q = Q_\alpha$  とする. この時  $Q \cap E$  の各 component は, boundary suture

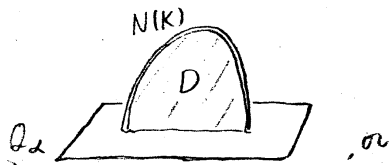
$E$  上の essential arc.

$\lambda$ : an arc component of  $(\partial M \cap Q) - E$  とする

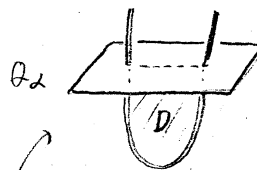


つまり,  $\lambda$  は  $\partial M - E$  上 inessential とし  $D$  を  $\lambda$  の compressing disk とする.

この  $Q_\alpha, \lambda, D$  を  $S^3$  の中で見ると次の状況:



このように  $Q_\alpha$  を low plane



このように  $Q_\alpha$  を high plane と呼ぶ.

$H(S_{\text{resp.}}) = \{\alpha \in [h, \alpha] \mid Q_\alpha \text{ is a high (low resp.) plane}\}$  とおく.

Claim  $[h, \alpha] \neq \bar{H} \cup \bar{S}$

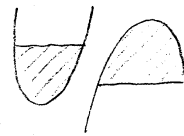
$[h, \alpha] = \bar{H} \cup \bar{S}$  とせよ.

Proof of Claim. / まず次の事実に注意する

" $I$ : an open interval of  $[h, \alpha]$  s.t.  $\partial M \cap Q_\alpha (\forall \alpha \in I) \Rightarrow 'I \subset H$  or  $I \cap H = \emptyset'$ "

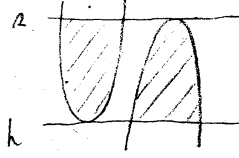
' $I \subset S \cap I \cap S = \emptyset$ ' また ' $h \in \bar{H}, \alpha \in \bar{S}$ '

1)  $\text{Claim}$  が成立しないとする。 即ち,



この時 " $\exists \alpha \in [h, \alpha]$  s.t.  $\partial \alpha$  は  $\partial M$  に tangent"

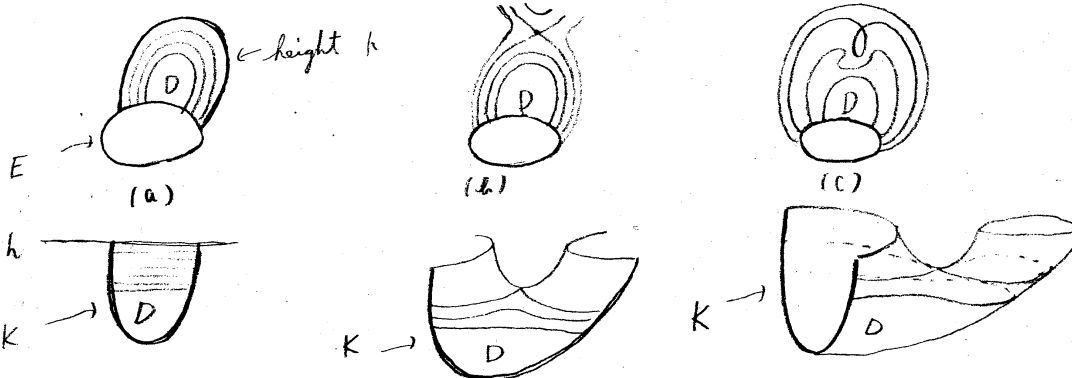
(1)  $\forall \alpha, \partial \alpha \not\subset \partial M$  とする上の注意より  $\bar{H} = \bar{S} = [h, \alpha]$ .

即ち   $\Rightarrow$   :  $K$  が thin presentation に矛盾.

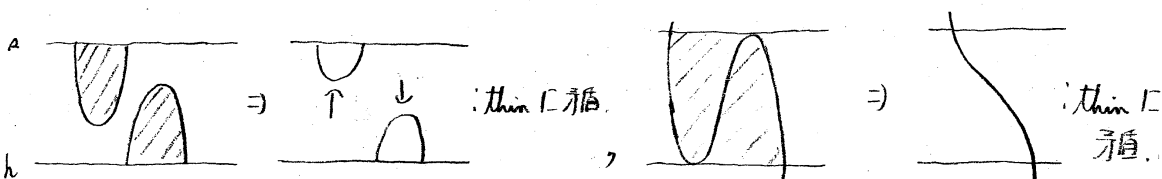
この時,  $\alpha \in (\alpha - \varepsilon, \alpha) \Rightarrow \alpha \in H, \alpha \in (\alpha, \alpha + \varepsilon) \Rightarrow \alpha \in S$

1)  $\text{Claim}$  によ,  $\tau \partial M$  上に induce される foliation を考え  $\tau D$  に沿,

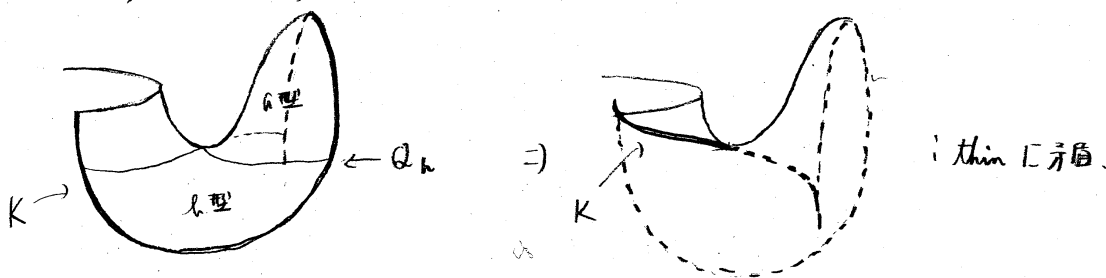
$\tau D$  を外側に延ば,  $\tau$  押く事により次の3つの cases を得る.



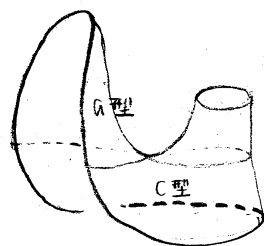
$\partial \alpha$  の上に A 型, 下に A 型の disk がある時. 次の2つの状況を得る.



A 型, B 型の時.



A 型, C 型の時.



即ち、この時  $K$  は、unknot: 矛盾。

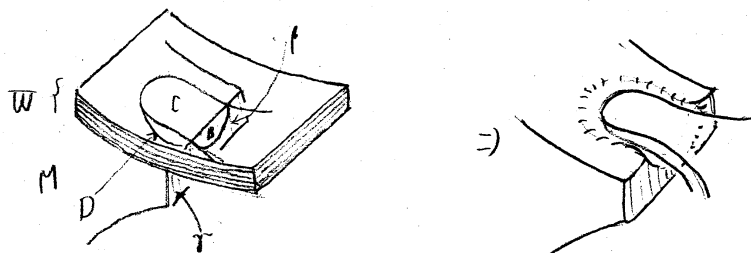
$Q_\alpha$  の取り方より  $A$  型,  $C$  型の組み合わせはなり事がわかる。

以上, Claim の証明終り。

Claim. より  $\exists \alpha$  ( $h < \alpha < n$ ) s.t.  $Q_\alpha \neq \text{high, low plane}$  また  $Q \not\subset L, Q \not\subset M$  としてよい。以下この  $Q_\alpha$  が Lemma の条件をみたす事をみる。

まず  $L$  が normal form より (1) は O.K.  $h, n$  の取り方より (2) も O.K.  $\alpha$  の取り方より (4) も O.K. 従って, あと (3) をみたすように  $M$  を変形する。

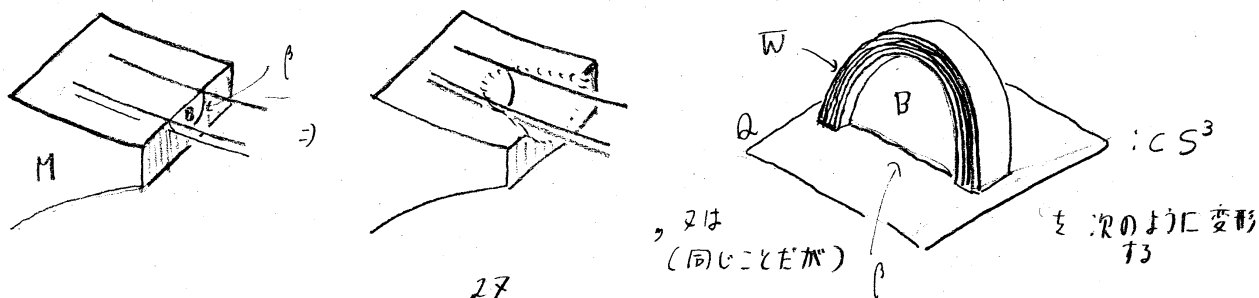
•  $\beta$ : a comp. of  $Q \cap R$ ,  $\exists D \subset Q$ : a disk s.t.  $\partial D \subset \partial W$ ,  $\partial D \cap W \cap R = \emptyset$  とする。  
この時, 次のように  $M$  を isotopy 下動かして  $\beta$  をはずしてしまふ。

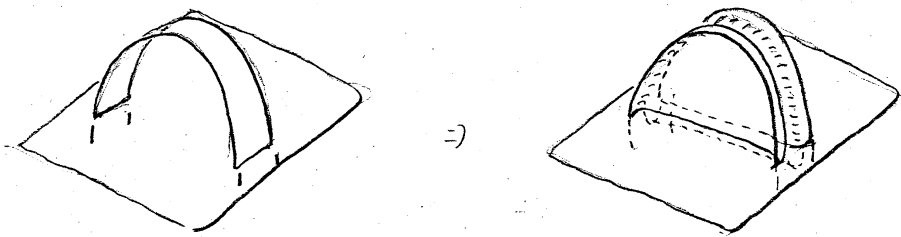


従って  $Q \cap R$  の各 comp. は,  $Q - \overset{\circ}{W}$  上 essential としてよい。

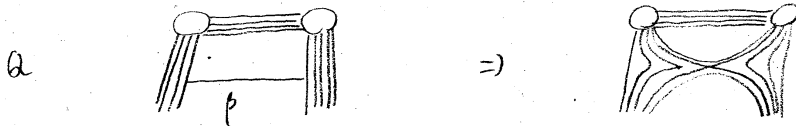
•  $\beta$ : a comp. of  $Q \cap R$ , inessential in  $R$ , essential in  $Q - \overset{\circ}{W}$  とする。

この時, 次のように  $W, M$  を動かして  $\beta$  をはずしてしまふ。





この時,  $Q \cap W$  の pattern は  $\mathbb{R}$  のように変化する。



以上より  $Q \cap T$  の comp.  $\neq$  inessential なものは全て消せる。

Lemma 4.24.  $(S^3 - \dot{N}(K), \partial N(K)) \xrightarrow{S_1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, T_m)$  : a seq. of sutured mfd. decomp. s.t.

$\bullet (M_i, T_i)$  : taut  $\bullet S_i \cap \partial N(K)$  : a union of simple closed curves

$\bullet V$  : a comp. of  $R(T_{i-1})$  とすると  $S_i \cap V$  は, 向きを正逆の parallel to non-sep.

$\Rightarrow \exists Q$  : level 2-sphere s.t.  $\bullet Q \cap K \neq \emptyset$ ,  $\bullet Q \cap M$ ,

$\bullet Q \cap T$  ( $Q \cap (\partial M - \dot{E})$  resp.) の各 comp. は,  $T$  ( $\partial M - \dot{E}$  resp.)  $\neq$  essential

$\bullet Q \cap M = \{I_1, \dots, I_r\} \cup D$ ,  $D = \emptyset$ , or a disk,  $\sum_{i=1}^r \frac{|I_i \cap \partial T|}{4} - \chi(I_i) \leq |Q \cap K| - 1$ ,

Proof. 4.16 より,  $S^3 - \dot{N}(K)$  上の finite depth lamination  $L$  が定まる。

$(M_i, T_i)$  : taut より  $L$  の各 leaf は, incompressible, 4.19, 4.10 より  $L$  は,

normal form にあるとしてよい。  $Q$  を 4.22 で得られた level 2-sphere

とする。この時,  $Q - \dot{N}(K)$  上の lamination  $Q \cap L$  を  $\mathbb{R}$  のように singular

foliation に拡張する。



二二 各 singularity 上の index を次のように定める。



二の時,  $\chi(Q - \dot{N}(K)) = \sum (\text{index of singularities})$  (Poincaré-Hopf index formula)

$$\text{従って } \sum_{i=1}^r \chi(Q_i) - \frac{1}{4} |\partial Q \cap \partial T| = \sum_{i=1}^r \text{index}(Q_i \text{ 内の sing.})$$

$$\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^i \text{index}(Q_j \text{ 内の sing.}) = 1 - |Q \cap K|$$

### §5

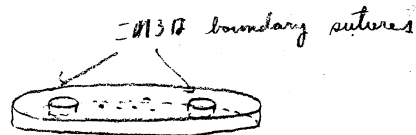
Lemma 5.1.  $K$ : a knot,  $(S^3 - \dot{N}(K), \partial N(K)) \xrightarrow{S_1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, T_m)$  is a seq.

of sutured mfd. decomp. s.t.  $(M, T) - (M_m, T_m)$ : taut

•  $\partial \hat{M}$ : a union of 2-spheres, •  $S_i$ : not a compressible torus, •  $S_i \cap \partial N(K)$ : union of circles,

•  $V$ : a comp. of  $R(T_{i-1})$  とすると,  $S_i \cap V$  は, 向きまたは  $\partial T$  parallel な simple closed curves or arcs  $\Rightarrow$  次の (1) の形が成立.

1)  $(M, T)$ : a product sutured mfd. 特に  $Y$  の形は



2)  $\exists P \subset S^3 - \dot{N}(K)$ : a planar surface,  $\exists Q \subset S^3$ : a sphere s.t.

•  $|K \cap Q| = \mu > 0$ , •  $P \cap \partial N(K)$ : a union of  $\nu (> 0)$  coherently oriented longitudes,

•  $\lambda = \partial P - \partial N(K)$ : a simple closed curve s.t.  $|K \cap Q| \leq \mu - 2$

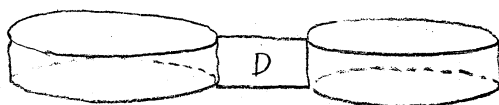
• no component of  $P - Q$  is a disk  $F$  with  $\bar{F} \cap Q$  connected

Q は Lemma 4.24 のようにとる

Proof (of very special case.)  $E = \{A_1, \dots, A_{2\mu}\}$ : boundary sutures

$E$  の元の間に次の relation  $\sim$  が生成される equivalence relation を  $\sim$

とする:  $A_i \sim A_j \Leftrightarrow \exists D$  a rectangle of  $Q \cap M$  (D.t.)  $D \cap A_i \neq \emptyset, D \cap A_j \neq \emptyset$

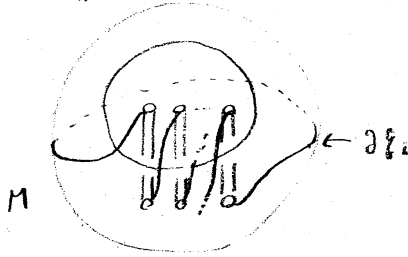


$X_1, \dots, X_t$  を上の equivalence class, 1) また  $t=1$  の時に Lemma を証明する  
 事にする. 結論 1) が成立しないとする

" $|I_i \cap \Gamma| = 2 \Rightarrow I_i \cap (\Gamma - E) = \emptyset$ , or  $I_i \neq D^2$ " (注:  $I_i \cap E \neq \emptyset$ ) となる.  
 $\rightarrow$  See 4.24.

$R_{\pm}$ : component of  $R(\Gamma)$  を左のように定  
 める.  
 1) また  $K$  は 0-framed surgery した mfd. が  
 lens space 成分を含まない事より  $\partial I_i$   
 が  $E$  と  $\Gamma - E$  を交互に渡るような disk  $I_i$  は存在しない. 即ち.

≠  $I_i$  disk o.t.



$D_{\pm}$ : the disk  $R_{\pm}$  reduced in size to eliminate trivial intersections with  $Q$  (?)

とすると, 従って,  $|I_i \cap \partial D_+| + |I_i \cap \partial D_-| \leq 2 (|\partial I_i \cap \partial \Gamma|/4 - \chi(I_i))$

従って, Lemma 4.24 より  $\sum |I_i \cap \partial D_+| + \sum |I_i \cap \partial D_-| \leq 2 \sum (|\partial I_i \cap \partial \Gamma|/4 - \chi(I_i))$   
 $\leq 2|Q \cap K| - 2 = 2(\mu - 1)$  故に  $D_+ \cap M$  または  $D_- \cap M$  が求める  $P$ .

一般の場合については, Gabai [G2] 参照.

§6.

条件を全て満たす

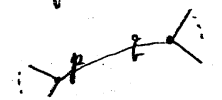
Lemma 6.1.  $S^2$  上には, 次のような (labell付) グラフは存在しない.

1).  $G$  は  $\nu+1$  vertices をもつ. そのうち  $\nu$  個は,

$\mu$  ( $\neq 0$ , even) 個の edges が集まる, 残りの vertex  $w$  は  $m$  ( $0 \leq m \leq \mu-2$ ) 個の edges が集まる

2) valency  $\mu$  vertex から出る edges は, 時計方向に  $1, 2, \dots, \mu$  と 1

う labeling がなされ 113。

3)  一つの edge の両端に label がつけられている時,  
その一方は偶数で他方は奇数。

4)  $D$ : the closure of a comp. of  $S^2 - G$  which is a disk,  $D \cap M = \emptyset$  この時

$\partial D \cap G$ , 7 edge の label を読んでゆくときそれは

$(j, j-1, j, j-1, \dots, j, j-1) \bmod \mu$  という形ではない。

証明略。

### §7. Proof of Theorem

Step 1. 3.6 より  $(S^2 - N(K), \partial N(K))$  から始まる oriented mfd. decomp. の seq. を得る。

Step 2. 4.20, Step 1 より  $S^3 - N(K)$  内の finite depth lamination  $L$  を得る。 $L$  が  $S^3 - N(K)$  の foliation  $\mathcal{F}$  に拡張しないとする。この時 5.1 の結論 2) が成立して  $P, Q$  が存在する。ところが 6.1 よりそのような  $P, Q$  は存在しない事がわかる。従って  $L$  は常に foliation  $\mathcal{F}$  に拡張する。

### References.

[G 1] D. Gabai "Foliations and the topology of 3-mfolds", J. Diff. Geom. 18 (1983), 445 ~ 503

[G 2] ——— "Foliations and the topology of 3-mfolds II", preprint.

[H] J. Hempel, 3-mfolds, Ann. Math. Studies 86.

[T] W. Thurston, "Norm on the homology of 3-mfolds" preprint