

## 可解 LIE 群上のアインシュタイン計量について

森 邦彦

(Kunihiko Mori)

(大阪大学大学院理学研究科D3)

### 1. INTRODUCTION

Riemann多様体  $(M, g)$  が Einstein 多様体であるとは, 計量  $g$  の Ricci tensor  $ric_g$  がある定数  $c$  に対して  $ric_g = cg$  をみたすことをいう. 非コンパクトな等質 Einstein 多様体のよく知られた例として rank one の非コンパクト型対称空間がある. これらは可解 Lie 群が単純推移的に作用している空間である. Alekseevskii は次の予想を提出している([1]). “ $M = G/K$  が非コンパクト等質 Einstein 多様体ならば,  $K$  は  $G$  の極大コンパクト部分群である.” この予想が正しければ, 非コンパクトな場合の等質 Einstein 多様体の分類問題は可解 Lie 群上の左不変な Einstein 計量の分類に帰着することになる.

1985年に J. Boggino は rank one の非コンパクト型対称空間をふくむ新しい Einstein 多様体のクラスを見出した([2]). rank one の非コンパクト型対称空間は, その isometry 群の岩沢分解を経由して左不変計量を持つ可解 Lie 群とみなすことができるが, このときその可解 Lie 群の Lie 環はある種の H-type Lie 環 ([7], [8]) の 1-dimensional extension となっている. Boggino の見出した Einstein 多様体はその巾零部分が一般の H-type Lie 環に対応する可解 Lie 群であり, 現在 Damek-Ricci space と呼ばれている([3]). Damek-Ricci Einstein space は対称空間とは限らない非正の断面曲率をもつ Einstein 多様体の例を与えている.

我々は Damek-Ricci space を拡張して, Boggino-Damek-Ricci-type space を以下のように定義する.

$(n, \langle, \rangle_n)$  を正定値内積をもつ 2-step nilpotent Lie 環,  $\alpha$  を 1次元実ベクトル空間,  $A$  を  $\alpha$  の zero でないベクトルのひとつとする.  $n$  の中心を  $\mathfrak{z}$ ,  $\mathfrak{z}$  の  $n$  における  $\langle, \rangle_n$ -直交補空間を  $\mathfrak{v}$  とおき,  $\alpha$  の  $n$  上の表現  $f$  を

$$f(A)X = (k/2)X, \quad f(A)Z = kZ \quad \text{for } X \in \mathfrak{v}, Z \in \mathfrak{z}$$

で定める. ここに  $k$  はある正の定数である.  $f$  により  $\alpha$  は  $n$  上 derivation として作用するので, 可解 Lie 環  $\mathfrak{s} = n \ltimes_f \alpha$  (半直積) が定められる.  $\alpha$  上の内積を  $\langle A, A \rangle_\alpha = 1$  で定め,  $\mathfrak{s}$  上の内積  $\langle, \rangle$  を  $\langle, \rangle_n$  と  $\langle, \rangle_\alpha$  との直和で定める.

定義 1. 上の構成で得られる正定値内積をもつ可解 Lie 環  $(\mathfrak{s}, \langle, \rangle)$  が定める単連結可解 Lie 群  $S$  とその上の左不変計量  $g$  の組  $(S, g)$  を Boggino-Damek-Ricci-type space という.

Damek-Ricci Einstein space が負の断面曲率をもつならば、対称空間になることが知られている ([2], [9]). ここでは次の定理を示す.

**Theorem.** ([10]) Boggino-Damek-Ricci-type space で Einstein かつ nonsymmetric かつ負の断面曲率をもつものが存在する.

## 2. CURVATURE OF BDR-TYPE SPACE

以下、簡単のため Boggino-Damek-Ricci-type space を BDR-type space とよぶ. BDR-type space  $(S, g)$  に対し、その Levi-Civita 接続  $\nabla$ , 断面曲率  $K$ , Ricci transformation  $Ric$  等の計算を対応する計量可解 Lie 環  $(\mathfrak{s}, \langle, \rangle)$  で行う.  $(\mathfrak{n}, \langle, \rangle_{\mathfrak{n}})$  を  $\mathfrak{s}$  の derived subalgebra とその上に誘導された内積の組とする.

$\mathfrak{n}$  の中心  $\mathfrak{z}$  から  $End(\mathfrak{v})$  への  $\mathbb{R}$ -環準同型  $J$  を

$$J(Z)X = (adX)^*Z \text{ for } X \in \mathfrak{v}, Z \in \mathfrak{z}$$

で定める. ここに  $(,)^*$  は  $(\mathfrak{n}, \langle, \rangle_{\mathfrak{n}})$  における随伴作用を表わす. 準同型  $J$  は 2-step nilpotent Lie 環  $\mathfrak{n}$  を特徴づけている. 実際  $J$  を知れば  $\mathfrak{n}$  の (ある基底に関する) 構造定数を求めることができるし、逆も成り立つ. この  $J$  を用いて  $(S, g)$  の断面曲率を具体的に計算することができる.

**Lemma 1** (sectional curvature of BDR-type space).  $X, Y \in \mathfrak{s}$  に対し、 $X = V_1 + Z_1 + aA, Y = V_2 + Z_2$  ( $V_1, V_2 \in \mathfrak{v}, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}, a \in \mathbb{R}$ ) とおくと、次が成り立つ.

$$\begin{aligned} K(X \wedge Y) &= \langle R(X, Y)Y, X \rangle \\ &= \frac{1}{4} |J(Z_1)V_2 + J(Z_2)V_1|^2 - \langle J(Z_1)V_1, J(Z_2)V_2 \rangle \\ &\quad + \frac{k^2}{4} (\langle V_1, V_2 \rangle + 2\langle Z_1, Z_2 \rangle)^2 - \frac{k^2}{4} (|V_1|^2 + 2|Z_1|^2)(|V_2|^2 + 2|Z_2|^2) \\ &\quad - \frac{3}{4} |[V_1, V_2] + akZ_2|^2 - \frac{a^2k^2}{4} (|V_2|^2 + |Z_2|^2). \end{aligned}$$

*Proof.*  $(\mathfrak{s}, \langle, \rangle)$  の Levi-Civita 接続  $\nabla$  は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \nabla_A &= 0 \\ \nabla_X A &= -ad_A(X) \quad \text{for } X \in \mathfrak{n} \\ \nabla_X Y &= \nabla^n_X Y + \langle ad_A(X), Y \rangle A \quad \text{for } X, Y \in \mathfrak{n}, \end{aligned} \tag{1}$$

ここで  $\nabla^n$  は  $(\mathfrak{n}, \langle, \rangle_{\mathfrak{n}})$  の Levi-Civita 接続を表す. 準同型  $J$  を使って、 $\nabla$  は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \nabla_{V_1+Z_1}(V_2+Z_2+aA) &= -\frac{1}{2}J(Z_2)V_1 - \frac{1}{2}J(Z_1)V_2 + \frac{1}{2}[V_1, V_2] \\ &\quad + \frac{k}{2}\{\langle V_1, V_2 \rangle + 2\langle Z_1, Z_2 \rangle\}A - \frac{ka}{2}(V_1 + 2Z_1) \end{aligned}$$

for  $V_1, V_2 \in \mathfrak{v}, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}, a \in \mathbb{R}$ . この表式より直接計算により所期の式を得る.  $\square$

次に BDR-type space の Ricci transformation を求める. 上の lemma より縮約して求めることができるが, ここでは  $\mathfrak{n}$  の Killing form が消えることを使って Gauss formula より求める.

**Lemma 2.**  $\{Z_1, \dots, Z_m\}$  を  $\mathfrak{z}$  の正規直交基底,  $\{V_1, \dots, V_n\}$  を  $\mathfrak{v}$  の正規直交基底とする. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned} (a) Ric(A) &= -k^2\left(\frac{n}{4} + m\right)A, \\ (b) Ric(V) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m J(Z_j)^2 V - \frac{k^2}{2}\left(\frac{n}{2} + m\right)V \quad \text{for } V \in \mathfrak{v}, \\ (c) Ric(Z) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n [V_i, J(Z)V_i] - k^2\left(\frac{n}{2} + m\right)Z \quad \text{for } Z \in \mathfrak{z}. \end{aligned}$$

特に  $Ric$  は  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{v}$ ,  $\mathfrak{z}$  を不変にする.

*Proof.*  $\mathfrak{s}$  の元  $W$  に対して  $R(W, A)A = -ad_A^2 W$  であるから (a) が従う. (1) の第 3 式より

$$Ric(X) = Ric^n(X) - tr(ad_A) \cdot ad_A X \quad \text{for } X \in \mathfrak{n}, \quad (2)$$

ここで  $Ric^n$  は Ricci transformation of  $(\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{n}})$  を表す. 計量 nilpotent Lie 環  $(\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{n}})$  に対して, その  $Ric^n$  は  $\mathfrak{n}$  の Killing form が消えることより次で与えられる:

$$Ric = \frac{1}{4} \sum_{i \in I} ad_{E_i} \circ ad_{E_i}^* - \frac{1}{2} \sum_{i \in I} ad_{E_i}^* \circ ad_{E_i}.$$

これを使って  $Ric^n$  は次で与えられる.

$$\begin{aligned} Ric^n(V) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m J(Z_j)^2 V \\ Ric^n(Z) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n [V_i, J(Z)V_i]. \quad \square \end{aligned}$$

与えられた BDR-type space  $(S, g)$  が Einstein 定数  $c$  である Einstein 多様体である時, lemma 2 (a) より  $c$  は  $-k^2(\frac{n}{4} + m)$  である.  $Ric^n$  は対称的かつ  $\mathfrak{v}$  と  $\mathfrak{z}$  を不変にするから  $\mathfrak{v}$  の正規直交基底  $\{V_1, \dots, V_n\}$  と  $\mathfrak{z}$  の正規直交基底  $\{Z_1, \dots, Z_m\}$  を選んで  $Ric^n$  を対角化できる.

$$Ric^n(V_i) = a_i V_i, \quad Ric^n(Z_j) = b_j Z_j.$$

(2) より  $(S, g)$  が Einstein ならば次が成り立つ.

$$a_i = -\frac{m}{2}k^2, \quad b_j = \frac{n}{4}k^2 \quad \text{for } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m. \quad (3)$$

逆に (3) が成り立つとき,  $(S, g)$  が Einstein であることが容易にわかる.

**Proposition 1** (Einstein condition of BDR-type space). BDR-type space  $(S, g)$  が Einstein であるための必要十分条件は

$$Ric^n|_{\mathfrak{v}} = -\frac{m}{2}k^2 1_{\mathfrak{v}}, \quad Ric^n|_{\mathfrak{z}} = \frac{n}{4}k^2 1_{\mathfrak{z}}$$

が成り立つことである。ただし  $Ric^n$  は  $(n, \langle, \rangle_n)$  の Ricci transformation,  $m = \dim \mathfrak{z}$ ,  $n = \dim \mathfrak{v}$ .

BDR-type space を定める正の定数  $k$  を十分に大きくするとき BDR-type space は非正の断面曲率をもつ ([6]). 次の命題は与えられた BDR-type space が非正の断面曲率をもつ十分条件を与える.

**Proposition 2.** 正の定数  $C$  が存在して

$$|J(Z)V| \leq C|Z||V| \quad \text{for } Z \in \mathfrak{z}, V \in \mathfrak{v}$$

となるとき,  $C \leq k$  ならば  $k$  に対応する BDR-type spaces は非正の断面曲率をもつ.

*Proof.*  $S_k$  を  $k$  に対応する BDR-type space とする. lemma 1 より

$$K(X + aA \wedge Y) = K(X \wedge Y) + \frac{3}{4}||[X, Y]|^2 - \frac{3}{4}|[X, Y] + akY_3|^2 - \frac{a^2k^2}{4}|Y|^2,$$

ここに  $Y_3$  は  $Y$  の  $\mathfrak{z}$ -成分を表す.

$S_k$  が非正の断面曲率をもつことを示すためには, 次を示せば十分である.

$$K(X \wedge Y) + \frac{3}{4}||[X, Y]|^2 \leq 0. \quad \text{for } X, Y \in \mathfrak{n}. \quad (4)$$

(4)の左辺を次のように (A) と (B) に分ける:

$$\begin{aligned} (A) &= \frac{1}{4}|J(Z_1)V_2|^2 + \frac{1}{4}|J(Z_2)V_1|^2 - \frac{1}{2}\langle J(Z_1)V_1, J(Z_2)V_2 \rangle \\ &\quad + \frac{k^2}{2}\{2\langle V_1, V_2 \rangle \langle Z_1, Z_2 \rangle - (|V_1|^2|Z_2|^2 + |V_2|^2|Z_1|^2)\}, \\ (B) &= \frac{1}{2}\{\langle J(Z_2)V_1, J(Z_1)V_2 \rangle - \langle J(Z_1)V_1, J(Z_2)V_2 \rangle\} \\ &\quad + \frac{k^2}{4}\{\langle V_1, V_2 \rangle^2 - |V_1|^2|V_2|^2\} + k^2\{\langle Z_1, Z_2 \rangle^2 - |Z_1|^2|Z_2|^2\}, \end{aligned}$$

ここに  $X = V_1 + Z_1$ ,  $Y = V_2 + Z_2$ ,  $V_1, V_2 \in \mathfrak{v}$ ,  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$ .

もしも  $X$  と  $Y$  が直交しているならば,  $\langle V_1, V_2 \rangle \langle Z_1, Z_2 \rangle \leq 0$  であるから, 一般性を失うことなく  $\langle V_1, V_2 \rangle \langle Z_1, Z_2 \rangle \leq 0$  と仮定してよい.

このとき

$$\begin{aligned} (A) &\leq \frac{C^2}{4}|Z_1|^2|V_2|^2 + \frac{C^2}{4}|Z_2|^2|V_1|^2 + \frac{C^2}{2}|Z_1||Z_2||V_1||V_2| - \frac{k^2}{2}(|V_1|^2|Z_2|^2 + |V_2|^2|Z_1|^2) \\ &= \frac{-C^2}{4}(|V_1||Z_2| - |V_2||Z_1|)^2 - \frac{k^2 - C^2}{2}(|V_1|^2|Z_2|^2 + |V_2|^2|Z_1|^2). \end{aligned}$$

ここで

$$Z_2 = \alpha Z_1 + Z_3, \langle Z_1, Z_3 \rangle = 0$$

$$V_2 = \beta V_1 + V_3, \langle V_1, V_3 \rangle = 0,$$

とおく. ただし  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $Z_3 \in \mathfrak{z}$ ,  $V_3 \in \mathfrak{v}$ .

このとき

$$(B) = \frac{1}{2} \{ \langle J(Z_3)V_1, J(Z_1)V_3 \rangle - \langle J(Z_1)V_1, J(Z_3)V_3 \rangle \} - \frac{k^2}{4} |V_1|^2 |V_3|^2 - k^2 |Z_1|^2 |Z_2|^2 \\ \leq -C^2 \left( \frac{1}{2} |V_1| |V_3| - |Z_1| |Z_3| \right)^2 - \frac{k^2 - C^2}{4} (|V_1|^2 |V_3|^2 + 4 |Z_1|^2 |Z_3|^2). \quad \square$$

**Example.** (Damek-Ricci space) 計量 2-step nilpotent Lie 環が *H-type* であるとは正の定数  $\lambda$  が存在して

$$J(Z)^2 = -\lambda^2 |Z|^2 \mathbb{I}_{\mathfrak{v}} \quad \text{for } Z \in \mathfrak{z}$$

であるときをいう。BDR-type space  $(S, g)$  はその巾零部分の Lie 環が誘導された計量で H-type となるとき *Damek-Ricci space* と呼ばれる。Damek-Ricci space は  $\lambda = k$  を満たすとき *standard* であるという。

$(S, g)$  が DR space であるとき, 定義より直ちに次が成り立つ。

- a)  $|J(Z)V| = \lambda |Z| |V| \quad \text{for } Z \in \mathfrak{z}, V \in \mathfrak{v}$
- b)  $J(Z_1) \circ J(Z_2) + J(Z_2) \circ J(Z_1) = -2\lambda^2 \langle Z_1, Z_2 \rangle \mathbb{I}_{\mathfrak{v}} \quad \text{for } Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$
- c)  $\langle J(Z_1)V, J(Z_2)V \rangle = \lambda^2 \langle Z_1, Z_2 \rangle |V|^2 \quad \text{for } Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}, V \in \mathfrak{v}$
- d)  $\langle J(Z)V_1, J(Z)V_2 \rangle = \lambda^2 |Z|^2 \langle V_1, V_2 \rangle \quad \text{for } Z \in \mathfrak{z}, V_1, V_2 \in \mathfrak{v}$
- e)  $[V, J(Z)V] = \lambda^2 |V|^2 Z \quad \text{for } Z \in \mathfrak{z}, V \in \mathfrak{v}.$

lemma (2)より, DR space に対して次が成り立つ:

$$Ric^n|_{\mathfrak{v}} = -\frac{m}{2} \lambda^2 \mathbb{I}_{\mathfrak{v}}, \quad Ric^n|_{\mathfrak{z}} = \frac{n}{4} \lambda^2 \mathbb{I}_{\mathfrak{z}}.$$

従って DR space  $(S, g)$  が Einstein 多様体であることと standard であることは同値である。さらに proposition 2 より DR Einstein spaces は非正の断面曲率をもつことがわかる。

### 3. BDR-TYPE EINSTEIN SPACES

本節で BDR-type Einstein space で DR Einstein space でないものを具体的に構成する。DR space においてその巾零部分である H-type Lie 環は非特異な 2-step nilpotent Lie 環の典型例である。ここで計量をもつ 2-step nilpotent Lie 環が非特異であるとは, 任意の  $Z \in \mathfrak{z}$  に対して  $J(Z)$  が  $\mathfrak{v}$  の正則な変換であるときをいう。我々は必ずしも非特異でない 2-step nilpotent Lie 環の族を構成することから始めて, それらを巾零部分にもつ BDR-type space を考察する。

$\mathfrak{g}$  を  $\mathbb{C}$  上の単純 Lie 環,  $\mathfrak{h}$  をその一つの Cartan 部分環とする。  $\mathfrak{h}$  に関する  $\mathfrak{g}$  のルート系を  $\Delta$ , その基本系を  $\Pi$  とする。  $\mathfrak{g}$  のひとつの Weyl 基底  $\{E_\alpha | \alpha \in \Delta\}$  をとる。すなわち, 各  $\alpha \in \Delta$  に

対して

$$(1) \quad B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = -1 \quad (\text{ただし } B \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の Killing form}).$$

$$(2) \quad [E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} & \text{if } \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha-\beta} \in \mathbb{R}$$

となる  $\{E_\alpha | \alpha \in \Delta\}$  をひとつとる.  $\Pi_o$  を  $\Pi$  のある部分集合とし,

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}, \quad \Pi_o = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$$

とおく.  $(k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r - \{0\}$  に対して,

$$\Delta(k_1, \dots, k_r) = \left\{ \sum_{j=1}^r m_j \alpha_j \in \Delta^+ \mid m_{i_1} = k_1, \dots, m_{i_r} = k_r \right\}$$

とおく.  $\Delta(k_1, \dots, k_r)$  に associate する  $\mathfrak{g}_R$  の  $\mathbb{R}$ -部分空間  $\mathfrak{n}(k_1, \dots, k_r)$  を Weyl 基底  $\{E_\alpha | \alpha \in \Delta\}$  を用いて次の様に定める.

$$\mathfrak{n}(k_1, \dots, k_r) = \sum_{\alpha \in \Delta(k_1, \dots, k_r)} \mathbb{R} E_\alpha.$$

このような  $\mathfrak{n}(k_1, \dots, k_r)$  をすべて集めた  $\mathfrak{g}_R$  の  $\mathbb{R}$ -部分空間  $\mathfrak{n}(\Pi_o)$  を考えると, Weyl 基底による構造定数系が  $\mathbb{R}$ -valued であることから,  $\mathfrak{n}(\Pi_o)$  は  $\mathbb{R}$  上の nilpotent Lie 環になる.  $\mathfrak{n}(\Pi_o)$  上の内積  $\langle, \rangle_{\mathfrak{n}(\Pi_o)}$  を,  $\mathfrak{n}(\Pi_o)$  を定める Weyl 基底の各元が正規直交である様に定める. この構成は Lie 環  $\mathfrak{n}(\Pi_o)$  の grading に compatible な基底とその上の内積をとっていることから, その Ricci transformation は対角化されている. 特にこの計量 Lie 環  $(\mathfrak{n}, \langle, \rangle_{\mathfrak{n}(\Pi_o)})$  が 2-step である場合, その大半が Euclid factor をもたず, かつ非特異でない Lie 環となる. 上の構成で得られる 2-step nilpotent Lie 環  $(\mathfrak{n}(\Pi_o), \langle, \rangle_{\mathfrak{n}(\Pi_o)})$  に対して, BDR-type space を構成する. 3つ組みのデータ  $(k, \Pi, \Pi_o)$  に対応する BDR-type space を  $S_k(\Pi, \Pi_o)$  で表す.

$\alpha, \beta, \gamma \in \Delta^{\mathfrak{n}(\Pi_o)}$  かつ  $\alpha = \beta + \gamma$  ならば

$$J(E_\alpha)E_\beta = N_{\beta\gamma}E_\gamma$$

であることから次の lemma を得る.

**Lemma 3.**  $(\mathfrak{n}(\Pi_o), \langle, \rangle_{\mathfrak{n}(\Pi_o)})$  を上の構成で得られる 2-step nilpotent Lie 環とする.  $\alpha \in \Delta^{\mathfrak{n}(\Pi_o)}$  に対して

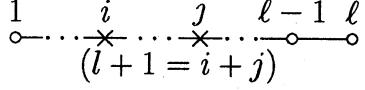
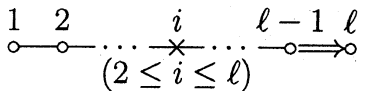
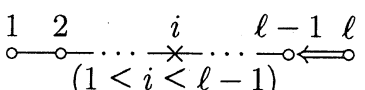
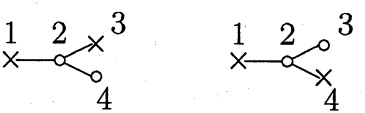
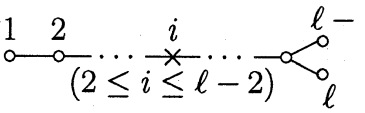
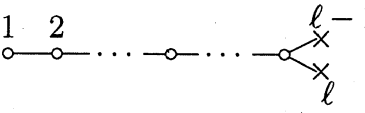
$$\Phi(\alpha) = \{ \beta \in \Delta^{\mathfrak{n}(\Pi_o)} \mid \alpha + \beta \in \Delta^{\mathfrak{n}(\Pi_o)} \}$$

$$\Psi(\alpha) = \{ (\beta, \gamma) \in \Delta^{\mathfrak{n}(\Pi_o)} \times \Delta^{\mathfrak{n}(\Pi_o)} \mid \beta + \gamma = \alpha \}$$

とおく. このとき Ricci transformation  $\text{Ric}^{\mathfrak{n}(\Pi_o)}$  の  $E_\alpha$  に関する固有値  $\xi_\alpha$  は次で与えられる.

$$\xi_\alpha = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi(\alpha)} (N_{\alpha\beta})^2 & \text{if } E_\alpha \in \mathfrak{v} \\ \frac{1}{4} \sum_{(\beta, \gamma) \in \Psi(\alpha)} (N_{\alpha\beta})^2 & \text{if } E_\alpha \in \mathfrak{z}. \end{cases}$$

この lemma と proposition 1 とから, 与えられた BDR-type space  $S_k(\Pi, \Pi_o)$  が Einstein であるか否か判定できる. 古典型単純 Lie 環の場合に, 上の構成で得られる BDR-type Einstein space の表を以下に載せる.

| $\mathfrak{g}$          | $(\Pi, \Pi_o)$                                                                      | $k$                        | $\dim \mathfrak{z}$    | $\dim \mathfrak{v}$ | $S_k(\Pi, \Pi_o)$                                          |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|------------------------|---------------------|------------------------------------------------------------|
| $A_l$<br>( $2 \leq l$ ) |    | $\frac{1}{\sqrt{2i(i+j)}}$ | $i^2$                  | $2i(j-i)$           | not DR ( $i \neq 1$ ),<br>$\mathbb{C}H^l$ ( $i = 1$ )      |
| $B_l$<br>( $2 \leq l$ ) |    | $\frac{1}{\sqrt{i(2l-1)}}$ | $\frac{i(i-1)}{2}$     | $i(2l-2i+1)$        | not DR ( $i \neq 2$ ),<br>$\mathbb{C}H^{2l-2}$ ( $i = 2$ ) |
| $C_l$<br>( $3 \leq l$ ) |    | $\frac{1}{\sqrt{2i(l+1)}}$ | $\frac{i(i+1)}{2}$     | $2i(l-i)$           | not DR ( $i \neq 1$ ),<br>$\mathbb{C}H^l$ ( $i = 1$ )      |
| $D_4$                   |  | $\frac{1}{3\sqrt{2}}$      | 3                      | 6                   | not DR                                                     |
| $D_l$<br>( $4 \leq l$ ) |  | $\frac{1}{\sqrt{2i(l-1)}}$ | $\frac{i(i-1)}{2}$     | $2i(l-i)$           | not DR ( $i \neq 2$ ),<br>$\mathbb{C}H^{2l-3}$ ( $i = 2$ ) |
| $D_l$<br>( $4 \leq l$ ) |  | $\frac{1}{\sqrt{2(l-1)}}$  | $\frac{(l-1)(l-2)}{2}$ | $2(l-1)$            | not DR                                                     |

表中の Dynkin 図形において  $\times$  は  $\Pi_o$  の元を表す.

この表にある BDR-type Einstein spaces の多くは非正の断面曲率をもたない. しかし以下に定理として述べるように負の断面曲率をもつもの, 非正の断面曲率をもつものが存在する. それらの断面曲率を評価するにあたって proposition 2 は使えず,  $J(Z)$  の特異性を更に評価する必要がある.

**Theorem 1.** (i)  $\Pi$  を  $B_l$  型単純 Lie 環の基本系,  $\Pi_o$  を  $\{\alpha_3\}$  とする. このとき  $4 \leq l$  ならば BDR-type Einstein space

$$S_k(\Pi, \Pi_o), \quad k = \frac{1}{\sqrt{3(2l-1)}}$$

は負の断面曲率をもつ.

(ii)  $\Pi$  を  $D_l$  型単純 Lie 環の基本系,  $\Pi_o$  を  $\{\alpha_3\}$  とする. このとき  $5 \leq l$  ならば *BDR-type Einstein space*

$$S_k(\Pi, \Pi_o), \quad k = \frac{1}{\sqrt{6(l-1)}}$$

は負の断面曲率をもつ.

特に *nonsymmetric* な *BDR-type Einstein spaces* で負の断面曲率をもつものが存在する.

**Theorem 2.** (i)  $\Pi$  を  $A_l$  型単純 Lie 環の基本系,  $\Pi_o$  を  $\{\alpha_2, \alpha_{l-1}\}$  とする. このとき  $4 \leq l$  ならば *BDR-type Einstein space*

$$S_k(\Pi, \Pi_o), \quad k = \frac{1}{2\sqrt{l+1}}$$

は非正の断面曲率をもつ.

(ii)  $\Pi$  を  $C_l$  型単純 Lie 環の基本系,  $\Pi_o$  を  $\{\alpha_2\}$  とする. このとき  $3 \leq l$  ならば *BDR-type Einstein space*

$$S_k(\Pi, \Pi_o), \quad k = \frac{1}{2\sqrt{l+1}}$$

は非正の断面曲率をもつ.

証明は  $B_l$  型に対して行う. その他の場合については若干の修正をすることにより証明できる.

*Proof of theorem 1 (i).*  $S_k(\Pi, \Pi_o)$  が負の断面曲率をもつことを示すためには, 一次独立な  $n$  の二元  $X, Y$  に対して

$$K(X \wedge Y) + \frac{3}{4} |[X, Y]|^2 < 0 \quad (5)$$

を示せば十分である.

proposition 2 の証明中にあるように, 再び (5) の左辺を (A) と (B) に分ける. 証明のために我々は次の lemma を必要とする.

**Lemma 4.**  $\Pi$  を  $B_l$  型 (ただし  $4 \leq l$ ) 単純 Lie 環の基本系,  $\Pi_o$  を  $\{\alpha_3\}$  とする. このとき

$$\frac{1}{2\sqrt{(2l-1)}} \leq k \implies (A) \leq 0 \quad \text{and} \quad (B) \leq 0.$$

lemma は後で示す. これが示されれば  $4 \leq l$  であるとき  $S_k(\Pi, \Pi_o)$  ( $k = \frac{1}{\sqrt{3(2l-1)}}$ ) は非正の断面曲率をもつ. いま  $n$  の元  $X, Y$  で

$$K(X \wedge Y) + \frac{3}{4} |[X, Y]|^2 = 0.$$

となるものが存在したと仮定する. このとき  $(A) = (B) = 0$  となるから

$$2\langle V_1, V_2 \rangle \langle Z_1, Z_2 \rangle - (|V_1|^2 |Z_2|^2 + |V_2|^2 |Z_1|^2) = 0$$

$$\langle V_1, V_2 \rangle^2 - |V_1|^2 |V_2|^2 = 0$$

$$\langle Z_1, Z_2 \rangle^2 - |Z_1|^2 |Z_2|^2 = 0$$

を得る. 従って  $X$  と  $Y$  は一次独立でない. 以上より (5) を得た.

symmetricity に関しては,  $\nabla R$  が消えないことが容易に確認できる. □

*Proof of lemma 4.*

$\Delta^{n(\Pi_0)}$  の元に対して次のように添数をつける:

$$\begin{aligned}\alpha_{i1} &= \sum_{t=i}^l \alpha_t \quad (1 \leq i \leq 3) \\ \alpha_{ij} &= \sum_{t=i}^{j+1} \alpha_t \quad (1 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq l-2) \\ \alpha_{ij} &= \sum_{t=i}^l \alpha_t + \sum_{s=j-l+5}^l \alpha_s \quad (1 \leq i \leq 3, l-1 \leq j \leq 2l-5) \\ \beta_1 &= \alpha_2 + \sum_{t=3}^l 2\alpha_t \\ \beta_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \sum_{t=3}^l 2\alpha_t \\ \beta_3 &= \alpha_1 + \sum_{t=2}^l 2\alpha_t\end{aligned}$$

Weyl 基底を  $N_{\alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2}} \leq 0$  if  $i_1 < i_2$ ,  $N_{\alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2}} \geq 0$  if  $i_1 > i_2$ , for  $1 \leq i_1, i_2 \leq 3$ ,  $2 \leq j_1 \leq l-2$ ,  $l-1 \leq j_2 \leq 2l-5$  となるようにとる. その構造定数は

$$(N_{\alpha\beta})^2 = \begin{cases} \frac{1}{2(2l-1)} & \text{if } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta^{n(\Pi_0)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である. このとき  $1 \leq \delta, \delta' \leq 2, 1 \leq j \leq 2l-5$  に対して

$$J(Z_\delta)V_{\delta'} = \sum_{j=1}^{2n-5} \{(z_2^\delta v_{3j}^{\delta'} + z_3^\delta v_{2j}^{\delta'})E_{\alpha_{1j}} + (z_1^\delta v_{3j}^{\delta'} - z_3^\delta v_{1j}^{\delta'})E_{\alpha_{2j}} + (-z_1^\delta v_{2j}^{\delta'} - z_2^\delta v_{1j}^{\delta'})E_{\alpha_{3j}}\}$$

が成り立つ. ただし

$$V_\delta = \sum_{i,j} v_{ij}^\delta E_{\alpha_{ij}}, \quad Z_\delta = \sum_{h=1}^3 z_h^\delta E_{\beta_h} \quad \text{for } \delta = 1, 2.$$

とおいた. 次に

$$P_{\delta\delta'}^j := z_1^\delta v_{1j}^{\delta'} - z_2^\delta v_{2j}^{\delta'} + z_3^\delta v_{3j}^{\delta'} \quad \text{for } 1 \leq \delta, \delta' \leq 2, 1 \leq j \leq 2l-5$$

とおく.

このとき次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \langle J(Z_{\delta_1})V_{\delta_2}, J(Z_{\delta'_1})V_{\delta'_2} \rangle &= \frac{1}{8(2l-1)} \langle Z_{\delta_1}, Z_{\delta'_1} \rangle \langle V_{\delta_2}, V_{\delta'_2} \rangle \\ &= \frac{-1}{8(2l-1)} \sum_{j=1}^{2l-5} P_{\delta_1 \delta'_2}^j P_{\delta'_1 \delta_2}^j.\end{aligned} \tag{6}$$

$2\langle V_1, V_2 \rangle \langle Z_1, Z_2 \rangle - (|V_1|^2 |Z_2|^2 + |V_2|^2 |Z_1|^2) \leq 0$  であるから,  $(A) \leq 0$  を示すためには  $k = \frac{1}{2\sqrt{2l-1}}$  であるとき  $(A) \leq 0$  を示せばよい. (6)を使って次を得る:

$$\begin{aligned} (A) &= \left( \frac{1}{4} |J(Z_1)V_2|^2 - \frac{1}{8(2l-1)} |V_2|^2 |Z_1|^2 \right) + \left( \frac{1}{4} |J(Z_2)V_1|^2 - \frac{1}{8(2l-1)} |V_1|^2 |Z_2|^2 \right) \\ &\quad - 2 \left( \frac{1}{4} \langle J(Z_1)V_1, J(Z_2)V_2 \rangle - \frac{1}{8(2l-1)} \langle V_1, V_2 \rangle \langle Z_1, Z_2 \rangle \right) \\ &= \frac{-1}{8(2l-1)} \sum_{j=1}^{2l-5} (P_{12}^j - P_{21}^j)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

$(B) \leq 0$  を示すために  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$ ,  $V_1, V_2 \in \mathfrak{v}$  に対して

$$|\langle J(Z_2)V_1, J(Z_1)V_2 \rangle - \langle J(Z_1)V_1, J(Z_2)V_2 \rangle| \leq \frac{1}{2(2l-1)} |Z_1| |Z_2| |V_1| |V_2| \quad (7)$$

を示す. (7) が成り立つならば, proposition 2 と同様の評価を行って  $(B) \leq 0$  が証明される.

$$V_1 = \sum_{j=1}^{2l-5} V_1^{(j)}, V_2 = \sum_{j=1}^{2l-5} V_2^{(j)}$$

とおく. ただし  $V_1^{(j)}, V_2^{(j)} \in \text{Span}\{E_{\alpha_{1j}}, E_{\alpha_{2j}}, E_{\alpha_{3j}}\}$ .

このとき

$$\begin{aligned} &|\langle J(Z_2)V_1^{(1)}, J(Z_1)V_2^{(1)} \rangle - \langle J(Z_1)V_1^{(1)}, J(Z_2)V_2^{(1)} \rangle| \\ &= \frac{1}{2(2l-1)} |(z_1^1 z_2^2 - z_2^1 z_1^2)(v_{21}^1 v_{11}^2 - v_{11}^1 v_{21}^2) + (z_1^1 z_3^2 - z_3^1 z_1^2)(v_{11}^1 v_{31}^2 - v_{31}^1 v_{11}^2) \\ &\quad + (z_2^1 z_3^2 - z_3^1 z_2^2)(v_{31}^1 v_{21}^2 - v_{21}^1 v_{31}^2)| \\ &\leq \frac{1}{2(2l-1)} \sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq 3} (z_i^1 z_j^2 - z_j^1 z_i^2)^2} \sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq 3} (v_{i1}^1 v_{j1}^2 - v_{j1}^1 v_{i1}^2)^2} \\ &= \frac{1}{2(2l-1)} \sqrt{|Z_1|^2 |Z_2|^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2} \sqrt{|V_1^{(1)}|^2 |V_2^{(1)}|^2 - \langle V_1^{(1)}, V_2^{(1)} \rangle^2} \\ &\leq \frac{1}{2(2l-1)} |Z_1| |Z_2| |V_1^{(1)}| |V_2^{(1)}|. \end{aligned}$$

同様に  $2 \leq j \leq l-2, l-1 \leq j' \leq 2l-5$  に対して

$$|\langle J(Z_2)V_1^{(j)}, J(Z_1)V_2^{(j)} \rangle - \langle J(Z_1)V_1^{(j)}, J(Z_2)V_2^{(j)} \rangle| \leq \frac{1}{2(2l-1)} |Z_1| |Z_2| |V_1^{(j+l-3)}| |V_2^{(j+l-3)}|.$$

$$|\langle J(Z_2)V_1^{(j')}, J(Z_1)V_2^{(j')} \rangle - \langle J(Z_1)V_1^{(j')}, J(Z_2)V_2^{(j')} \rangle| \leq \frac{1}{2(2l-1)} |Z_1| |Z_2| |V_1^{(j'-l+3)}| |V_2^{(j'-l+3)}|.$$

従って

$$\begin{aligned}
 & |\langle J(Z_2)V_1, J(Z_1)V_2 \rangle - \langle J(Z_1)V_1, J(Z_2)V_2 \rangle| \\
 &= \sum_{j=1}^{2l-5} |\langle J(Z_2)V_1^{(j)}, J(Z_1)V_2^{(j)} \rangle - \langle J(Z_1)V_1^{(j)}, J(Z_2)V_2^{(j)} \rangle| \\
 &\leq \frac{1}{2(2l-1)} |Z_1| |Z_2| \left( \sum_{j=1}^{2l-5} |V_1^{(j)}| |V_2^{(j)}| \right) \\
 &\leq \frac{1}{2(2l-1)} |Z_1| |Z_2| |V_1| |V_2|. \quad \square
 \end{aligned}$$

#### REFERENCES

- [1] D. V. Alekseevskii, *Classification of quaternionic spaces with a transitive solvable group of motions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 9(2) (1975), 315 – 362.
- [2] J. Boggino, *Generalized Heisenberg groups and solvmanifolds naturally associated*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 43 (1985), 529 – 547.
- [3] J. Berndt, F. Tricerri, L. Vanhecke, “*Generalized Heisenberg Groups and Damek-Ricci Harmonic Spaces*”, Springer-Verlag 1995.
- [4] E. Damek and F. Ricci *A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 139 – 142.
- [5] P. Eberlein, *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 27 (1994), 611 – 660.
- [6] E. Heintze, *On homogeneous manifolds of negative curvature*, Math. Ann. 211 (1974), 23 – 34.
- [7] A. Kaplan, *Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules*, Geom. Dedicata 11 (1981), 127 – 136.
- [8] A. Kaplan, *On the geometry of groups of Heisenberg type*, Bull. London math. Soc. 15 (1983), 35 – 42.
- [9] M. Lanzendorf *Einstein metrics with nonpositive sectional curvature on extensions of Lie algebras of Heisenberg type*, Geom. Dedicata 66 (1997), 187 – 202.
- [10] K. Mori, *Einstein metrics on BDR-type solvable Lie groups*, (preprint).
- [11] T. Wolter, *Einstein metrics on solvable groups*, Math. Z. 206 (1991), 457 – 471.