

Abel's theorem and webs - Griffiths の最近の仕事
 - 名大 工 加 藤 芳 文

種数 π の compact Riemann 面 C から、projective space $\mathbb{P}^n$ の generic に $1:1$ の正則写像

$$f: C \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

で、image $f(C)$ の次数が d になった時、この pair のことを d 次の algebraic curve と呼ぶことにする。ただし $f(C)$ が n y plane に含まれたり、より次元の高い projective space からの projection にはなっていないと仮定する。また簡単のために $f(C)$ も C と書く。

このような C が与えられた時、 d n a / projective space $\mathbb{P}^{n*}$ の元 γ に対し

$$\gamma \cdot C = p_1(\gamma) + \dots + p_d(\gamma)$$

と書くと、古典的なアーベルの定理は次のよ

うに言い表わすことができる。

Theorem.

C 上の holomorphic 1-form ω に対し

$$1) \sum_{i=1}^d \int_{P_0}^{P_i(B)} \omega \equiv K \text{ (定数) on } P^n^*$$

が成立する。ただし $P_0 \in C$ は fix。

あるいは上の式の両辺を微分して

$$2) \omega(P_1(B)) + \omega(P_2(B)) + \dots + \omega(P_d(B)) \equiv 0.$$

Example.

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{P}^2 \mid y^2 - p(x) = 0\}$$

$$\text{ただし } p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \text{ for } i \neq j$$

このとき、 C は elliptic curve となり、1-form として $\omega = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$

を取れば elliptic integral

$$u(P) = \int_{P_0}^P \omega = \int_{P_0}^P \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}.$$

を得る。特に P_0 として C の変曲点をとれば、

$u = \int_{p_0}^{\pi(u)} \omega = \int_{p_0}^{(x(u), y(u))} \omega$ と逆に解くことにより C の u n i v e r s a l C o v e r i n g の座標関数 u を得る。この時 $x(u)$ は W e i e r s t r a s s の p - 関数になり ω の取り方と 2) より次のよう ~~な~~ よく知られた関係式が出てくる。

$$1) \begin{vmatrix} 1, x(u_1), y(u_1) \\ 1, x(u_2), y(u_2) \\ 1, x(u_3), y(u_3) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 0 \pmod{\text{Lattice}}$$

$$2) x'(u) = y(u)$$

$$3) (x'(u))^2 = p(x(u))$$

A b e l の T h e o r e m は今から 150 年程前に発表されたものだが現代のしてんから見れば次のように簡単に証明される。

$C^{[d]} = C \sim^d$ を C の d 個の対称積とする。

$1 - f$ o r m $\sum_{i=1}^d \pi_i^* \omega$ は置換に対して不変であるから $C^{[d]}$ 上の f o r m と考えられる。

一方写像

~~$$f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$~~

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & : & \mathbb{P}^{n*} \longrightarrow \mathcal{C}^{[d]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Z} & \longrightarrow & p_1(\mathcal{Z}) + \cdots + p_d(\mathcal{Z}) \end{array}$$

に対し、 $\mathcal{P}^*(\sum_{i=1}^d \pi_i^* \omega) = \omega(p_1(\mathcal{Z})) + \cdots + \omega(p_d(\mathcal{Z}))$
を考えると、 $\mathbb{P}^{n*}$ 上の d 0 1 - 1 - f o r m に
成ることを言えるが、 $\mathbb{P}^{n*}$ 上には恒等的に 0 に
なるもの以外には存在しないから 2) が ~~成~~ 成る。

d 次の curve $\mathcal{C}$ があると $\mathbb{P}^{n*}$ 内の open
set 上に $\{ \mathcal{Z} \mid p_i(\mathcal{Z}) = \text{一定} \} = \{ \text{点 } p_i(\mathcal{Z}) \}$
を通る hyperplane 全体 $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ を
leaf とする foliation が入る。
 ω を点 $p_i(\mathcal{Z})$ の回りで $f_i(x) dx_i$ と書いて置けば
2) は $\sum_{i=1}^d f_i(p_i(\mathcal{Z})) dx_i(p_i(\mathcal{Z})) \equiv 0$ という形にか
け、abel equation と呼ばれる。

Abel の Theorem の逆として次の
Lie の Theorem がある。ただしこの
ように一般の形で述べたのは Griffiths
の [1] が最初である。

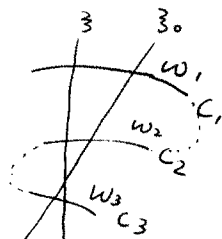
Lie の Theorem.

$\mathbb{P}^n$ 内に analytic curve の g
erm $C_1, C_2, \dots, C_d$ があり、各 C_i 上に d

0 次形式 1 -form ω_i が与えられていたとする。その時ある $z \in \mathbb{P}^n$ の近傍の点 z に對し

$$1) \quad C_i \cdot z = P_i(z)$$

$$\sum_{i=1}^d \omega_i(P_i(z)) \equiv 0$$



を満たしていれば、次数 d の algebraic curve C とその上の global 1-form ω で次の条件を満たすものが存在する。

$$2) \quad C \supset C_i \quad \text{for any } i$$

$$\omega|_{C_i} = \omega_i$$

この定理を用いて foliation に付随した abelian equation と Castelnuovo の bound とが関係していることを以下説明する。

先ず

Castelnuovo's bound

$\pi(d, n) = \mathbb{P}^n$ 内にある d 次の algebraic curve の種数の最大値

$$\leq \left[m \left(d - \frac{1}{2} (m+1)(n-1) - 1 \right) \right]$$

$$\text{ただし } m = \left[\frac{d-1}{n-1} \right]$$

が成り立つ。等号の成立する curve のことを extremal curve といひ、確かに存在する。特に $\pi(n, n) = 0$ となり、rational normal curve といふ。

上の bound を実際に出して見よう。

$$\begin{array}{ccc} L = f^*H & & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ f: C \longrightarrow & & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Lemma $d \geq n$ が常に成り立つ。

1) exact 3)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(L-p) \longrightarrow \mathcal{O}(L) \longrightarrow \mathbb{C}_p \longrightarrow 0$$

より $n+1 \leq h^0(L) \leq h^0(L-p) + 1$ となり後は induction を使え。

Lemma.

rest: $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(H^k)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}(L^k))$ に対し、その image を V_k^* とする。その時

$$\dim V_k - \dim V_{k-1} = \begin{cases} \geq k(n-1) + 1 & \text{if } k \leq \left\lfloor \frac{d-1}{n-1} \right\rfloor \\ = d & \text{if } k > \left\lfloor \frac{d-1}{n-1} \right\rfloor \end{cases}$$

∴ $z \in \mathbb{P}^{n*}$ を generic に取り

$z \cdot C = p_1 + \dots + p_d$ で各 p_i は generic
a l p o s i t i o n にあるとする。

そして次のように $k+1$ 個の組に分ける。

$$\underbrace{p_1, \dots, p_{n-1}}_{D_1}; \underbrace{p_n, \dots, p_{2(n-1)}}_{D_2}; \dots; \underbrace{p_{k(n-2)+1}, \dots, p_{k(n-1)}}_{D_k}; \dots, p_d$$

2 残り

$z_i \in \mathbb{P}^{n*}$ として D_i を通るが p_d は通らない元を選
ぶ。そして $h = z_1 \times \dots \times z_k$ と置けばこれは p_1
..., $p_{k(n-1)}$ を通るが p_d は通らない次数 k の多項式
である。 h'' として任意の次数 $h-1$ の h'' より p
e r s u r f a c e ととり $h' = z \times h''$ と置け
ば、各 p_i をすべて通りしかも次数は h になる。
よって V_k には $h + h'$ の形をした少なくとも
 $k(n-1) + 1 + \dim V_{k-1}$ 個の独立な h より p e r
s u r f a c e があることになる。後半も同
様にして証明できる。

この Lemma を使うと

$$\dim V_{m+m'} \geq \frac{1}{2} m(m+1)(n-1) + m+1 + m'd$$

となり、一方 Riemann-Roch の Theorem より

$$\begin{aligned} h^0(L^{m+m'}) &= \deg L^{m+m'} - \pi + i(L^{m+m'}) + 1 \\ &= d(m+m') - \pi + 1 \\ &\geq \dim V_{m+m'} \geq \frac{1}{2} m(m+1)(n-1) + m+1 + m'd \end{aligned}$$

となる。ここで k が十分大ならば $i(L^k) = 0$ となることを用いた。上の式を整頓すれば

$$\pi \leq \pi(d, n) \quad \text{が得られる。}$$

$\mathbb{C}^n$ 内の open set U に対し (integrability condition $d\omega \wedge \omega = 0$ を満たす 1-form ω を与えることを $\mathbb{C}^n$ の foliation の構造を入れるという。 ω の integrability manifold のことを leaf という。従ってこのことは U に $d u(x) = \rho(x) \omega(x)$ ($\rho(x) \neq 0$) を満たす関数 $u(x)$ を与えることと同値である。 $\omega(x)$ のかわりに $\rho(x) \omega(x)$ ($\rho(x) \neq 0$), $u(x)$ のかわりに $v(x) = v(u(x))$ ($v'(u) \neq 0$) をとって

$l \in a f$ は変わらないから $w(x)$ は $IP(T_x^*)$ の元を決めていると考えてよい。

Definition

$U \pm$ に d 個の $\text{codim } 1$ の foliation を与えることを d -web といい。ただし web hypersurface は general position にあるとする。

$$dU_{i_1} \wedge \dots \wedge dU_{i_k} \neq 0 \quad (k \leq n)$$

Definition.

d -web が linearizable abel とは U の座標変換で各 hypersurface が一斉に hyperplane^に できることをとする。特に parallel になれる時 octahedra l といい。

Definition.

d -web $\{U_i(x)\}_{i=1}^d$ に対し

$$\sum_{i=1}^d f_i(U_i(x)) dU_i(x) \equiv 0$$

と書いたものを abel equation といふ。一次独立な abel eq の最大

値とそのwebのrankという。

Remark.

Curveから決まった d -webはlinearizableでありrankは π 以下である。

さて次がGriffithsの得た主定理である。

Theorem

1) 任意の d -webに対し、

$$\# \text{ rank} \leq \pi(d, n) \quad \text{が成り立つ}$$

2) 1)で等号が成り立つのはextrema / Curveから作った d -webに限る。

1)の証明は先のCastelnuovo's boundの時と同様にして得られる。

$r (= \text{rank})$ 個のabel equation
とmatrixを使って書く

$$(du_1(x), \dots, du_d(x)) \begin{pmatrix} f_1'(u_1(x)), \dots, f_1^r(u_1(x)) \\ \vdots \\ f_d'(u_d(x)), \dots, f_d^r(u_d(x)) \end{pmatrix} \equiv 0$$

となる。 $Z_i(x) = [f_i^1(u_1(x)), \dots, f_i^r(u_1(x))] \in \mathbb{P}^{r-1}$,
 $u_{i\alpha} = \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$ とする。 $\sum_{i=1}^d Z_i(x) u_{i\alpha} \equiv 0$, $1 \leq \alpha \leq n$
 と書ける。

$$\text{rank} \begin{pmatrix} u_{i\alpha} \end{pmatrix} = n \text{ である}, \quad T = \text{より次の } m$$

ap が定義される。Poincaré map
 p p i n g と呼ばれる。

$$F: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \text{Gr}(d-n-1, r-1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longrightarrow & \{Z_1(x), \dots, Z_d(x)\} = \left\{ Z_i(x) \text{ が } \mathbb{P}^{r-1} \text{ 内にはいる} \right\} \cong \mathbb{P}^{d-1} \\ & & \text{linear space} \end{array}$$

$Z_i(x)$ は x を動かすと $\mathbb{P}^{r-1}$ には $n+1$ 個の
 c c u r v e の g e r m C_i を作る。次の
 o s c u l a t i n g s p a c e を考えよう。

$$\mathbb{P}^{N(k)} = \{ Z_1(x), \dots, Z_d(x); Z_1'(x), \dots, Z_d'(x); \dots; Z_1^{(k)}(x), \dots, Z_d^{(k)}(x) \}$$

$N(k)$ は k によつて決まる l i n e a r s p

$a \in e$ の次元であり明らかに $P_{\alpha}^{N(\alpha)} \subset P_{\alpha}^{N(\alpha)} \subset \dots \subset P^{r-1}$ が成り立つ。

L e m m a

$N(\alpha) = N(\alpha+1)$ が成り立つとは $N(\alpha) = r-1$ である。

∴ $\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \neq 0$ としたとき、 $f_i^{\lambda, (k)}(u) = \frac{d^k f_i^\lambda(u)}{d u^k}$ とおけば

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_i^k(\alpha)}{\partial x_\alpha} &= \left[\frac{\partial f_i^{1, (k)}(u_i(\alpha))}{\partial x_\alpha}, \dots, \frac{\partial f_i^{r, (k)}(u_i(\alpha))}{\partial x_\alpha} \right] \\ &= [f_i^{1, (k+1)}(u_i(\alpha)), \dots, f_i^{r, (k+1)}(u_i(\alpha))] \\ &= Z_i^{(k+1)}(\alpha). \end{aligned}$$

よって $N(\alpha) = N(\alpha+1)$ ならば $Z_i^{(k+1)}$ は $P_{\alpha}^{N(\alpha)}$ に入り任意の $Z(\alpha) \in P_{\alpha}^{N(\alpha)}$ に対し $\frac{\partial Z(\alpha)}{\partial x_\alpha} \in P_{\alpha}^{N(\alpha)}$ (α :任意) となるから、 $P_{\alpha}^{N(\alpha)}$ は α によらない。しかも C_i を含むから $P_{\alpha}^{N(\alpha)} = P^{r-1}$ でなければならぬ。

1 から d までの数字を次のように分割する。

$$\underbrace{1, \dots, n-1; n, \dots, 2(n-1); \dots; (m-1)(n-1)+1, \dots, m(n-1)}_{I_0} \underbrace{m(n-1)+1, \dots, d-1, d}_{I_{m-1}} \underbrace{}_{I_{m-2}}$$

abel の e q u a t i o n $\sum Z_i(\alpha) u_{i\alpha}(\alpha) = 0$ に対し、 $(u_1, \dots, u_{m-1}, u_d)$ を local coordinate と考えよ

$z_n \frac{\partial u_n}{\partial u_d} + \dots + z_{d-1} \frac{\partial u_{d-1}}{\partial u_d} + z_d = 0$ となる。よって z_d は $z_n, \dots, z_{d-1}$ の一次結合で書ける。

$$\text{故に } P^{N(0)} = \{z_i(x) ; i \in I_0\}$$

次に $(u_n, \dots, u_{2(n-1)}, u_d)$ を用いて上の式に $\frac{\partial}{\partial u_d}$ をほどこすと、

$$p_{2n-1} z'_{2n-1} + \dots + p_{d-1} z'_{d-1} + z'_d \equiv 0 \pmod{P^{N(0)}(x)}$$

となる。よって $P^{N(1)}(x) = \{z'_i(x) ; i \in I_1\} + P^{N(0)}(x)$ 。

この操作を繰り返せば $k \leq m-1$ に対して、

$$P^{N(k)}(x) = \{z_i^{(k)}(x) ; i \in I_k\} + P^{N(k-1)}(x)$$

となる。特に $N(k) \leq N(k-1) + (d-1 - (k+1)(n-1))$ 。

$$P^{N(m-1)}(x) = \{z_i^{(m-1)}(x) ; i \in I_{m-1}\} + P^{N(m-2)}(x) \text{ である}$$

$$z_d^{(m-1)}(x) \equiv \sum_{j \in I_{m-1}} \sigma_j z_j^{(m-1)}(x) \pmod{P^{N(m-2)}(x)} \text{ において}$$

おき、 $(u_i ; i \in I_{m-1} ; u_d)$ を local co-ordinate の一部としてとり $\frac{\partial}{\partial u_d}$ を operate すると、 $z_d^{(m)}(x) \equiv 0 \pmod{P^{N(m-1)}(x)}$ となる。よって $N(m) = N(m-1)$ となる。Lemma より

$$r-1 = N(m-1) \leq m(d-1) - \sum_{k=1}^m k(n-1) - 1$$

従って $r \leq \left[m(d-1) - \frac{1}{2} m(m+1)(n-1) \right] = \pi(d, n)$ となる。

さらに Griffiths は [3] の中で等号が成り立つ d -web は一般に linearizable であることを示した。このことを認めれば Theorem の 2) は次のようにして出る。 V の foliation のつく $leaf$ が linear space だからそれらは P^n 内に d の analytic curve の germ $C_1, C_2, \dots, C_d$ を作り d 個の equation が C_i の Theorem の 1) に相当している。よって C_i は global な P^n 内の curve の一部分であり ω_i はその上の 1-form の C_i への制限になっている。その curve が extremal であることは最初から等号が成り立つようにとったから当然である。

References

- [1] P. A. Griffiths, Variations on a theorem of Abel, *Inventiones math.*, 35, 321-390 (1976)
- [2] P. A. Griffiths, On Abel's differential equations
 $\mathbb{A}$ *Algebraic Geometry, the Tokyo Hopkins
 centennial lectures, Jun-ichi Igusa 編*

- [3] S. S. Chern, P. A. Griffiths, *Abel's theorem and
abels*, Jber. d. Dt. Math.-Verein, 80(1978) 13-110,