

## Korteweg-de Vries 方程式 を解く差分スキームの安定性

東大 工学部 郷田 勝彦

### § 1. はじめに

浅水波の非線型波動現象をはじめ他方面の物理現象にも現われる Korteweg-de Vries (K-dV) 方程式

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

の性質は, Zabusky & Kruskal [1] はじめ各方面から, 数値計算により, また Lax [2], Sjöberg [3] などによって解析的に, 明らかにされてきた。

ここでは, K-dV 方程式の特性を追求することよりむしろ, 非線型偏微分方程式である K-dV 方程式を差分法を用いて解くとき, いかなる安定条件があればよいかということも重点にして報告する。取り扱う差分スキームは, Zabusky などが [1] で用いたいわゆる leap-frog 型の差分スキーム

$$(1.2) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{6\Delta x} (u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n) (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ + \frac{\mu}{2(\Delta x)^3} (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n) = 0$$

である。ただし,  $u_j^n = u(n\Delta t, j\Delta x)$ ,  $n, j$  は整数である。  
 $\Delta t, \Delta x$  はそれぞれ時間, 空間に関する差分間隔を表わす。

しかしながら, 現在の差分の安定性理論の限界からみて, 非線型方程式の安定性をすっきりした形で扱うことは非常に困難である。したがって, これを避けるためにある種の線型化を行って安定性を調べる。

§ 2. の前半で, 定数係数偏微分方程式の安定性理論である von Neumann の理論を適用して調べる。後半では, 変数係数まで取り扱いが許される *energy method* を用いて安定性を調べる。§ 3. では, 別の *implicit scheme* を考えることによって無条件安定になるスキームを導く。§ 4. では, *dissipative scheme* を  $K-dV$  方程式に適用する際の注意を述べる。さらに各節のおわりに, それぞれのスキームで数値計算をおこなった初期値問題の結果を述べる。特に, § 2. では,  $K-dV$  方程式の回帰性について若干の結果を示す。

本論にはいるまえに, 次節以下必要な定義および公式などを示す。差分商  $D_t, D_x, D_x^2$  を次の各式で定義する。

$$(1.3a) \quad D_+ u_j = \frac{1}{\Delta x} (u_{j+1} - u_j)$$

$$(1.3b) \quad D_- u_j = \frac{1}{\Delta x} (u_j - u_{j-1})$$

$$(1.3c) \quad D_0 u_j = \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1} - u_{j-1})$$

また、差分解  $u_j$  の内積とノルムを次の式で定義する。

$$(1.4a) \quad (u, v) = \Delta x \sum_{j=1}^N u_j \cdot v_j$$

$$(1.4b) \quad \|u\|^2 = (u, u)$$

$N$  は考えている領域での格子点の数を表わす。 $u_j$  が周期性のある場合は、 $N$  は1周期での格子点の数を表わす。周期的境界条件  $u_j = u_{j+N}$ のもとでは、 $D_+$ ,  $D_-$ ,  $D_0$  については次のような性質がある。

$$(1.5a) \quad (D_+ u, v) = - (u, D_- v)$$

$$(1.5b) \quad (D_- u, v) = - (u, D_+ v)$$

$$(1.5c) \quad (D_0 u, v) = - (u, D_0 v)$$

また、本論文でよく用いられる関係式として次の各式が導かれる。

$$(1.6) \quad (u D_0 v, w) + (v, D_0 (uw)) = 0$$

$$(1.7) \quad (D_+ D_0 D_- u, v) + (u, D_+ D_0 D_- v) = 0$$

特に,  $u = v$  のとき, (1.7) 式は,

$$(1.8) \quad (D_+ D_0 D_- u, u) = 0$$

となる。

## § 2. Centered difference scheme

### 2-1 序

この節では, 時間方向, 空間方向ともに, 対称な差分スキームをとった (1.2) のスキームの安定条件を導く。 (1.2) をかきなおすと次のようになる。

$$(2.1) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{3} \{u_j^n D_0 u_j^n + D_0 (u_j^n)^2\} + \mu D_+ D_0 D_- u_j^n = 0$$

このスキームは, もとの方程式に対してかなり精度がよく, 打ち切り誤差は,  $O[(\Delta t)^3] + O[\Delta t (\Delta x)^2]$  となる。

よく知られているように, 周期境界条件のもとでは, KdV 方程式には可算無限個の保存量がある。数値計算をする際には, 扱う差分スキームにもとの方程式の性質がいくらかでも反映することが望ましい。 (2.1) のスキームでは,  $\sum_{j=1}^N u_j^n$  が保存していることが容易に検証できる。さらに, (2.1) に  $u_j^n$  をかけ,  $j$  について和をとると, 式 (1.6) (1.8) を用いて,

$$(u^{n+1}, u^n) = (u^{n+1}, u^n)$$

が得られる。もとの方程式の  $\int u^2 dx$  の保存の性質が、内積の保存という形で現われている。しかし、これは差分スキームの安定性の立場からみるとあまり役に立たない。そこで、(2.1) のスキームに対する安定条件を2通りの方法で導く。これらの方法の基本的な事項は、Richtmyer & Morton [4] による。これには、von Neumann の理論, energy method などに関する文献も詳しく述べている。

## 2-2 von Neumann の方法

K- $\alpha$ V 方程式 (1.1) の解  $u$  が局所的に余り変化せずほぼ一定であるとする。この仮定のもとで、スキーム (2.1) を線型化すると、

$$(2.2) \quad \frac{1}{2\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) + \tilde{u} D_0 u_j^n + \mu D_+ D_0 D_- u_j^n = 0$$

となる。 $\tilde{u}$  は、定数と仮定した係数である。ここで、

$$u_j^n = \sum_k C_k \{g(k)\}^n e^{ikj\Delta x}$$

とおいて、(2.2) 式に代入し、 $k$  について整理すると、 $g$  についての二次方程式

$$(2.3) \quad g^2 + 2i \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \tilde{u} - 2 \frac{\mu}{(\Delta x)^2} (1 - \cos k\Delta x) \right] \sin k\Delta x \cdot g - 1 = 0$$

が得られる。ここで,

$$(2.4) \quad A = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \tilde{u} - 2 \frac{\mu}{(\Delta x)^2} (1 - \cos k \Delta x) \right] \sin k \Delta x$$

とかくと, 二根は,  $g = -iA \pm \sqrt{1-A^2}$  となる.  $A^2 \leq 1$  のとき,  $|g|=1$  となるから,  $|A| \leq 1$  が安定条件になることが導かれる。したがって, (2.4) より,

$$\begin{aligned} |A| &\leq \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{u} \sin k \Delta x| + 2 \frac{\mu \Delta t}{(\Delta x)^3} |(1 - \cos k \Delta x) \sin k \Delta x| \\ &\leq \frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{u}| + \frac{3\sqrt{3}}{2} \mu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1. \end{aligned}$$

すなわち, 安定条件は,

$$(2.5) \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ |\tilde{u}| + \mu \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{1}{(\Delta x)^2} \right] \leq 1.$$

となる。 ( $\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6$ )

また,  $|A| > 1$  の場合は,  $g$  の根が純虚数になるから, 明らかに,  $|g| > 1$  となる根が現われ, スキームは安定にならない。

### 2-3 Energy Method

安定条件を導き, かつ安定性の証明を与えるために,  $A$  から  $E$  までの五段階に分けて述べる。

## A. 考え方

差分解の各ステップにおけるエネルギー  $\Delta x \sum_{j=1}^N |u_j^n|^2$  が  $n$  に関して一様有界である条件を見出すことが, *energy method* のいわれである。一般に, 差分スキームが  $B u_j^{n+1} = C u_j^n$  の形になるとき, 両辺を平方したり, あるいは, 両辺に  $u_j^n$  をかけて内積をとることによって,  $u_j^n$  の二次形式をつくる。このとき, その差分スキームに固有の量  $S_n$  をうまく定義する。この  $S_n$  について,

$$(2.6) \quad S_n - S_{n-1} \leq L \cdot \Delta t (\|u^n\|^2 + \|u^{n-1}\|^2)$$

$$(2.7) \quad \alpha \|u^n\|^2 \leq S_n \leq \beta \|u^n\|^2$$

の評価が得られれば,  $\|u^n\|$  が一様有界であることが示される (E)。ただし,  $L, \alpha, \beta$  は  $n$  によらず正定数である。

(2.7) は,  $S_n$  が  $\|u^n\|^2$  と同等なノルムであることを示す。この同等性を要請する条件として, 差分スキームの安定条件がでてくる。ここで扱う中心差分のように 3 step の場合, 同等性は,  $S_n$  と  $\|u^n\|^2 + \|u^{n+1}\|^2$  になる (D)。

## B. 線型化

$K-\alpha V$  方程式の非線型項の係数  $u(x, t)$  を  $x, t$  に関して Lipschitz 連続な変数係数におきかえた差分スキームに, *energy method* を適用する。すなわち, 線型にした方

程式は,

$$(2.8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \hat{u}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

とし,  $\hat{u}(x, t)$  の満たす条件を,

$$(2.9) \quad |\hat{u}(x, t) - \hat{u}(y, s)| \leq L(|x - y| + |t - s|)$$

とする。線型方程式 (2.8) に対する差分スキームは,

$$(2.10) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\Delta t} + \frac{1}{3} \{ \hat{u}_j^n D_0 u_j^n + D_0(\hat{u}_j^n u_j^n) \} + \mu D_+ D_0 D_- u_j^n = 0$$

となる。(2.9) の  $\hat{u}$  の連続性の仮定は K-dV 方程式の解  $u(x, t)$  について, 初期条件が十分なめらかなとき,  $x, t$  に関して微分可能で,  $\max |u_x|, \max |u_t|^*$  が有界であることが Sjöberg [3] によって示された事実に基づく。この (2.9) の仮定の方が, von Neumann の方法による仮定よりも現実的である。

C.  $S_n$  の構成と (2.6) の評価

差分スキーム (2.10) に,  $\Delta x (u_j^{n+1} + u_j^n)$  をかけて,  $j$  について和をとる。

$$(2.11) \quad \frac{1}{2\Delta t} \{ \|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2 \} + \frac{1}{3} (\hat{u}^n D_0 u^n + D_0(\hat{u}^n u^n), u^{n+1} + u^n) + \mu (D_+ D_0 D_- u^n, u^{n+1} + u^n) = 0$$

\*  $\max |u_t|$  は直接示されていないが, Sobolev の補題を用いて示される。

ここで,  $S_n$  を次のように定義する。

$$(2.12) \quad S_n \equiv \|u^{n+1}\|^2 + \|u^n\|^2 \\ + \frac{2\Delta t}{3} (\hat{u}^n D_0 u^n + D_0(\hat{u}^n u^n), u^{n+1}) \\ + 2\Delta t \mu (D_4 D_0 D_2 u^n, u^{n+1})$$

これより,  $S_n - S_{n-1}$  を計算し, (2.11), (1.6), (1.7) を用いて整理すると,

$$(2.13) \quad S_n - S_{n-1} = -\frac{2\Delta t}{3} \{ ((\hat{u}^n - \hat{u}^{n-1}), u^{n+1} D_0 u^n) \\ - ((\hat{u}^n - \hat{u}^{n-1}), u^n D_0 u^{n-1}) \}$$

となる。ここで,  $\hat{u}$  の連続性 (2.9) と Schwartz の不等式より,

$$(2.14) \quad S_n - S_{n-1} \leq \frac{4}{3} L \cdot \frac{(\Delta t)^2}{\Delta x} \cdot \|u^n\| \cdot \|u^{n-1}\|$$

を得る。ここで,  $\Delta t = o(\Delta x)$  とすると,  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  を定数でおきかえてよい。したがって,  $L$  をとりかえて,

$$(2.15) \quad S_n - S_{n-1} \leq L \cdot \Delta t (\|u^n\|^2 + \|u^{n-1}\|^2)$$

が導かれる。

D.  $S_n$  と  $\|u^n\|^2 + \|u^{n+1}\|^2$  の同等性

$S_n$  の定義式 (2.12) の第3項, 第4項を評価する。

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2\Delta t}{3} (\hat{u}^n D_0 u^n + D_0 (\hat{u}^n u^n), u^{n+1}) + 2\Delta t \mu (D_+ D_0 D_- u^n, u^{n+1}) \right| \\
& \leq \frac{2\Delta t}{3} \{ |(\hat{u}^n, u^{n+1} D_0 u^n)| + |(\hat{u}^n, u^n D_0 u^{n+1})| \} + 2\Delta t \mu |(D_+ D_0 D_- u^n, u^{n+1})| \\
& \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_j |\hat{u}_j^n| \|u^n\| \|u^{n+1}\| + 6\mu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} \|u^n\| \|u^{n+1}\| \\
& \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \max_j |\hat{u}_j^n| + 3 \frac{\mu}{(\Delta x)^2} \right] (\|u^n\|^2 + \|u^{n+1}\|^2)
\end{aligned}$$

ここで,  $P = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \max_j |\hat{u}_j^n| + 3 \frac{\mu}{(\Delta x)^2} \right]$  とおくと,

$P < 1$  のとき,  $S_n$  に対して次の評価が得られる。

$$(2.16) \quad (1-P)(\|u^n\|^2 + \|u^{n+1}\|^2) \leq S_n \leq (1+P)(\|u^n\|^2 + \|u^{n+1}\|^2)$$

これによって, 同等性が示された。すなわち, 安定条件は,

$$(2.17) \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \max_j |u_j^n| + 3 \frac{\mu}{(\Delta x)^2} \right] < 1$$

となる。

### E. 安定性の証明

ここで, C. D. の結果を用いて,  $\|u^n\|$  が一様有界であることを示す。(2.15), (2.16) より,

$$\begin{aligned}
(1-P)(\|u^n\|^2 + \|u^{n+1}\|^2) & \leq S_n \leq S_{n-1} + L\Delta t (\|u^n\|^2 + \|u^{n-1}\|^2) \\
& \leq S_{n-2} + L\Delta t (\|u^n\|^2 + \|u^{n-1}\|^2) + L\Delta t (\|u^{n-1}\|^2 + \|u^{n-2}\|^2) \\
& \vdots \\
& \leq S_0 + 2L\Delta t \sum_{k=0}^n \|u^k\|^2
\end{aligned}$$

したがって

$$(2.18) \quad \|u^{n+1}\|^2 \leq \frac{S_0}{1-P} + \frac{2L}{1-P} \Delta t \sum_{k=0}^n \|u^k\|^2$$

ここで, Gronwallの不等式を用いると,

$$(2.19) \quad \|u^{n+1}\|^2 \leq \frac{S_0}{1-P} \left[ 1 + \frac{2L}{1-P} \Delta t \right]^n$$

が得られる。 $S_0$  に対して, (2.16)を用いると,

$$S_0 \leq (1+P) (\|u^1\|^2 + \|u^0\|^2)$$

これと, (2.19)の右辺のべき乗を指数関数でおきかえて

$$(2.20) \quad \|u^{n+1}\|^2 \leq \frac{1+P}{1-P} (\|u^1\|^2 + \|u^0\|^2) e^{\frac{2L}{1-P} T}$$

ただし,  $T = n \Delta t$  である。これより,

$$(2.21) \quad \|u^{n+1}\|^2 \leq C_T (\|u^1\|^2 + \|u^0\|^2)$$

が得られ, 差分スキームが安定であることが示された。ただし,  $C_T$  は,  $T$  には依存するが,  $n$  にはよらない定数である。

## 2-4 数値実験

この節で導いた安定条件にしたがって, (2.1)のスキームを用いた数値計算をし,  $K$ - $\alpha$ レ方程式の回帰性を調べた。その結果が 図1.~図4. である。図1.は, 初期値  $u(x,0) = \sin \pi x$

としたとき、再び正弦波に回帰する様子を示している。図2は、同じ初期値による回帰時間 $T_R$ の $\mu$ 依存性をグラフに示したものである。これによると、 $\frac{1}{\mu} < 25$ の領域では、 $T_R$ は $\frac{1}{\mu}$ に比例し、 $\frac{1}{\mu} > 25$ の領域では、 $T_R$ が $\sqrt{\frac{1}{\mu}}$ に比例していることが示される。後者の領域での依存性は、Toda[5]によって導かれた理論式とその特性は一致している。図3は、 $\mu = 1/500$ の回帰の様子を示したもので、図4は、 $\frac{1}{\mu} < 25$ の領域での $T_R - \mu$ の関係をふつうの座標で表わしたものである。 $\frac{1}{\mu} < 25$ の領域をいま線型領域<sup>\*</sup>と呼ぶことにする。この領域での回帰性は、初期値の正弦波に回帰をし、線型領域をこえた領域では、正弦波の回帰はなく、孤立波の衝突のくり返しによる回帰をする。

次に、線型領域での初期値から $T_R$ たって再び正弦波に回帰したときの位相のずれ( $\Delta\theta$ )を調べる。線型領域では、 $\Delta\theta$ はほぼ一定であることが表1.よりわかる。この理由は次のように考えることができる。次のような線型の方程式の初期値問題

$$(2.22) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

---

\* ここで線型領域というのは、初期値が $\sin \pi x$ の場合にのみいえることで、初期値によって $\mu$ の範囲は変わる。

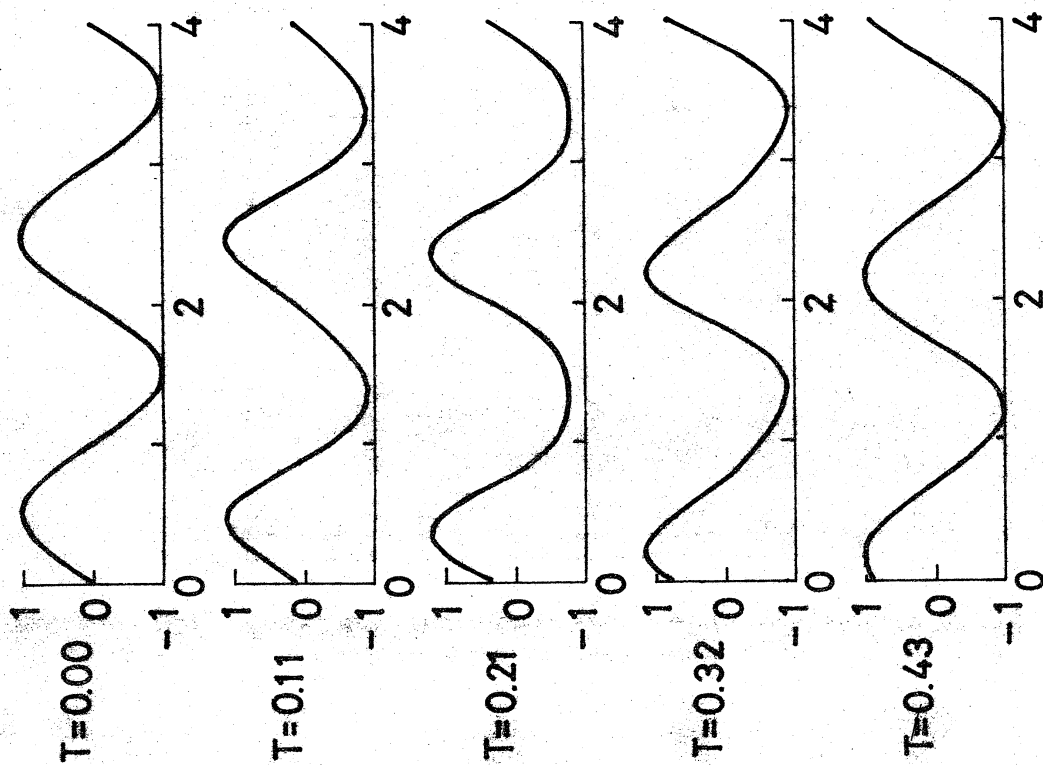
$$(2.23) \quad u(x, 0) = \sin \pi x$$

を考える。この解は容易に求まり  $u(x, t) = \sin \pi (x + \mu \pi^2 t)$  となる。この解の  $t = T_R$  での位相のずれは  $\mu \pi^2 T_R$  で与えられる。したがって、表 1. において各  $\mu$  における  $\mu \pi^2 T_R$  と  $\Delta \theta$  を比較すると、両者はほとんど等しいといえる。これより、線型領域での位相のずれは、線型方程式 (2.22) における正弦波の伝搬による効果が支配的であることがわかる。これによって、 $\Delta \theta$  が一定であることが理解される。すなわち、 $T_R = a/\mu$  ( $a$  定数) とすると、 $\mu \pi^2 T_R = \pi^2 a$  となり、 $\mu$  によらず一定になる。

| $1/\mu$ | $T_R$ | $\Delta \theta$ | $\mu \pi^2 T_R$ |
|---------|-------|-----------------|-----------------|
| 4       | 0.16  | 0.37            | 0.39            |
| 5       | 0.19  | 0.36            | 0.38            |
| 8       | 0.31  | 0.35            | 0.38            |
| 10      | 0.38  | 0.35            | 0.38            |
| 12      | 0.43  | 0.32            | 0.35            |
| 16      | 0.60  | 0.32            | 0.37            |
| 20      | 0.73  | 0.30            | 0.36            |
| 25      | 0.89  | 0.25            | 0.35            |

表 1. 回帰時間における位相のずれ

(b)  $\mu = \frac{1}{12}$   $\Delta x = 0.1$   $\Delta t = 0.004$



(a)  $\mu = \frac{1}{25}$   $\Delta x = 0.1$   $\Delta t = 0.004$

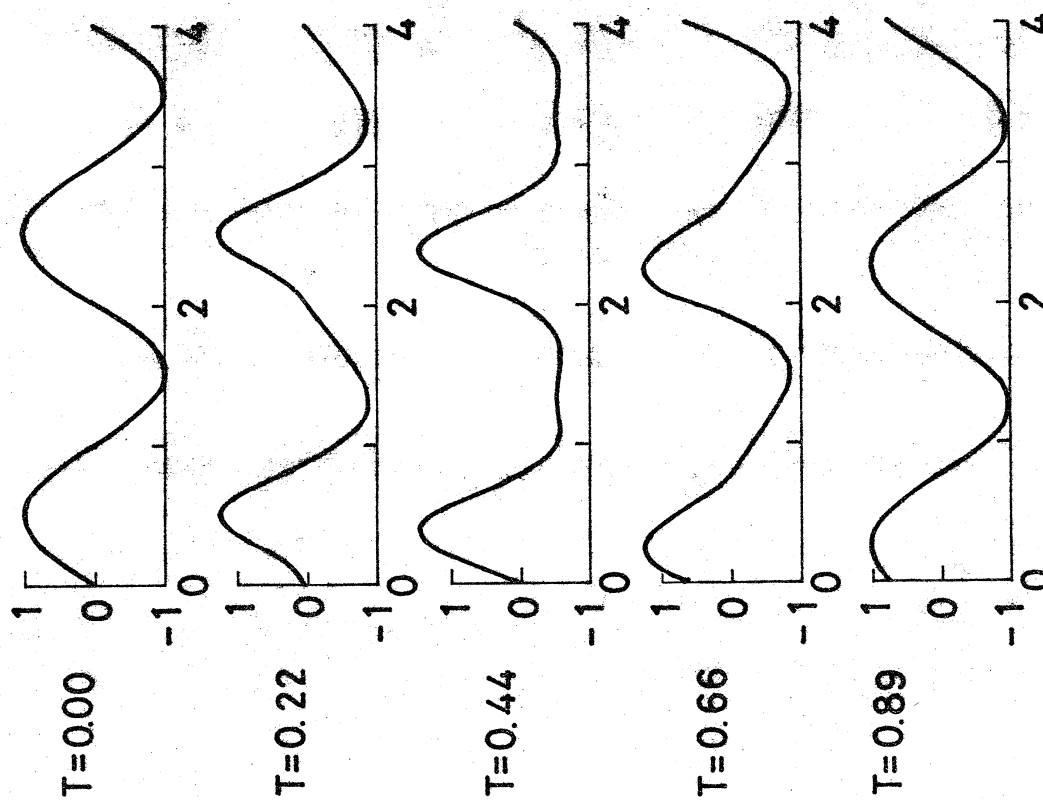


图 1. 初期值  $\sin \pi x$  の回歸

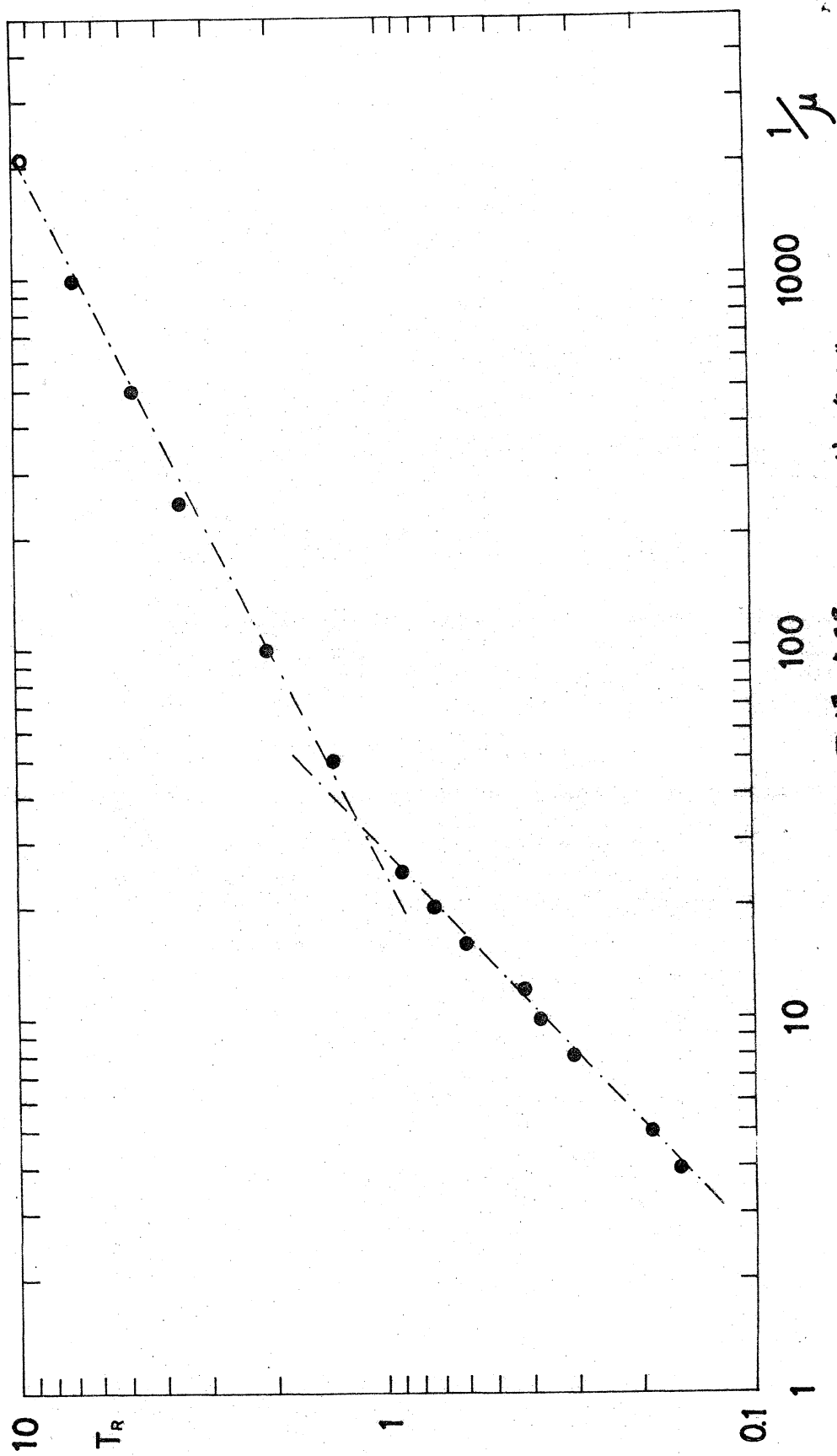


図 2. 初期値  $\sin \pi x$  による回復時間  $T_R$  の  $\mu$  依存性  
 ○ は Zatursky と Kuznetsov [1] による。

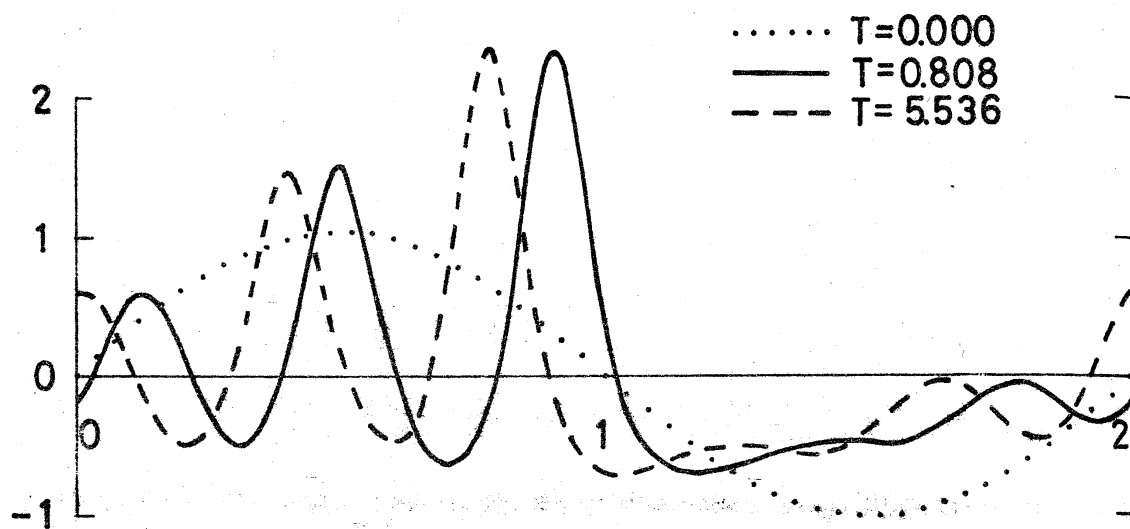


図 3.  $\mu = \frac{1}{500}$  での回復の様子.  $\Delta x = 0.02 / \Delta t = 0.008$

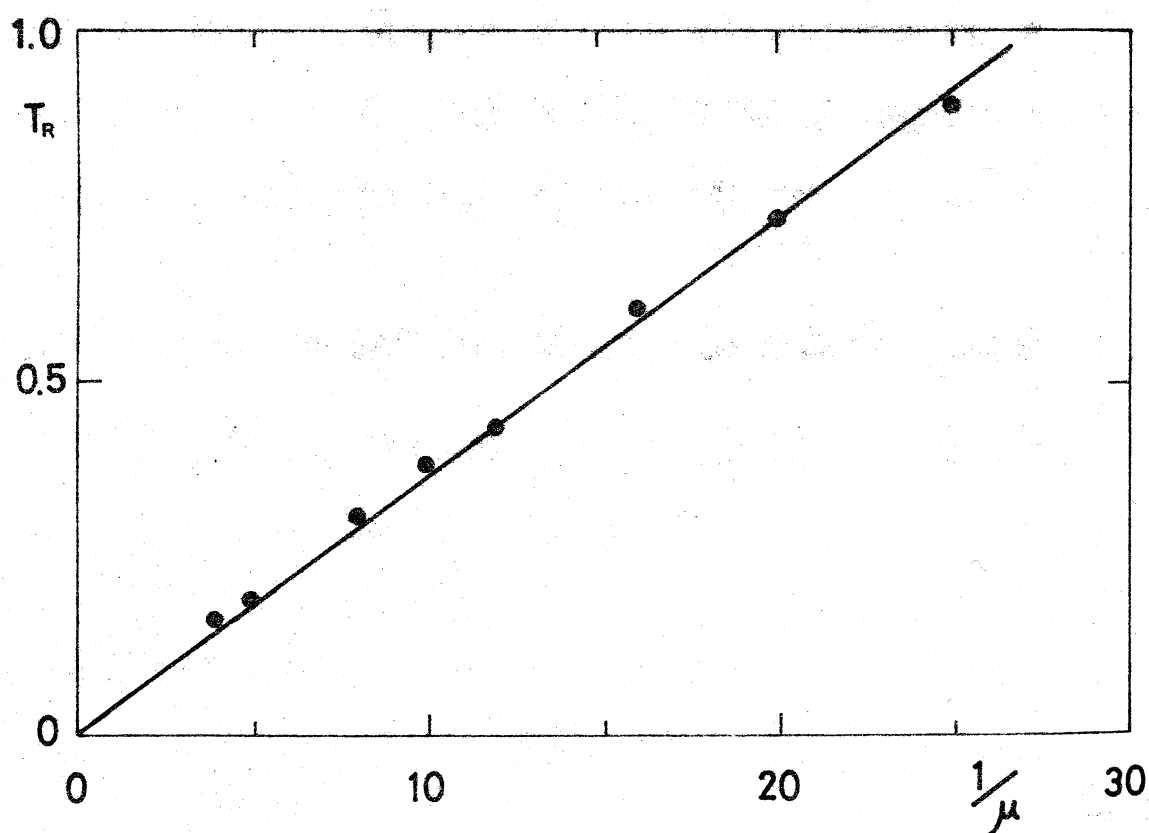


図 4. 線型領域 ( $\mu < \frac{1}{25}$ ) での  $T_R$ - $\mu$  依存性

### §3. Implicit Scheme

#### 3.1 安定性

$K-\alpha V$  方程式の非線型項をそのまま考慮した形で安定性が保証されるスキームをつくるとすれば、次のような全部を *implicit* にしたスキーム

$$(3.1) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{3} \left\{ u_j^n D_+ u_j^{n+1} + D_-(u_j^n u_j^{n+1}) \right\} + \mu D_+ D_- D_- u_j^{n+1} = 0$$

を考えることができる。このスキームについては、(3.1) に  $u_j^{n+1}$  をかけて  $j$  について和をとると、(1.6), (1.8) を用いることにより、容易に、

$$(3.2) \quad \|u^{n+1}\| \leq \|u^n\|$$

が示される。これは、(3.1) のスキームが無条件安定であることを表わしている。しかし、(3.1) のスキームでは、解くべき未知数  $u_j^{n+1}$  に関して非線型になるために、数値計算を実行するのは非常に厄介になる。この欠点をおぎなうものとして、非線型項を交互に *implicit* にしたスキーム

$$(3.3) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{3} \left\{ u_j^n D_+ u_j^{n+1} + D_-(u_j^n u_j^{n+1}) \right\} + \mu D_+ D_- D_- u_j^{n+1} = 0$$

を考える。このスキームについても、(3.1) と同様にして、(3.2) の関係が容易に示される。スキーム (3.3) の打ち切り誤差は、 $O[(\Delta t)^2] + O[\Delta t (\Delta x)^2]$  となる。このスキームによ

る計算は, (3.2) 式に示されるようにエネルギーノルムが  
だんだん減衰してゆくが,  $\Delta t$  の間隔を適当に小さくするこ  
とにより, 減衰は 0.1% 以下にできる。

### 3-2 数値実験

K-dV 方程式も, スキーム (3.3) で解いたときの数値計  
算の結果を述べる。図5は *implicit scheme* (3.3) と  
*centered scheme* (2.1) の比較を示す。初期値として,  
ガウス関数  $u(x, 0) = e^{-x^2}$  を与えたときの変化の様子を示  
す。図5.aは  $\mu = \frac{1}{25}$  の場合で, このときは孤立波が1個  
と連成波ができていることがわかる。図5.bは  $\mu = \frac{1}{100}$  の  
場合で, このときは孤立波が3個できている。T=7.5にお  
ける値が *centered scheme* (2.1) による結果との比較で  
ある。図6は, 周期境界条件での解の様子を,  $\mu = \frac{1}{100}$ , 初  
期値  $u(x, 0) = \sin \pi x$  について調べたものである。さら  
に時間をすすめてゆくと, 1 mesh 毎に少しずつジグザグが  
起ってくる。実際には行っていないが, 途中で平均化の操作  
を行ってやれば, この欠点はさけることができる。このグラ  
フより,  $\mu = \frac{1}{100}$  のときは, 孤立波が3個できていることが  
わかる。

(3.3) を具体的に解く方法は, N階連立方程式

$$A u^{n+1} = u^n$$

を解くことに帰着される。ただし,  $u^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n)^T$ ,  $A$  は  $N \times N$  行列である。このスキームのとり方により, 行列  $A$  は, 対角項を中心に5列に non-zero の項ができ, 周期性のある場合は, さらに右上と左下に non-zero の項ができる。これを解くには,  $A$  を2つの三角行列に分解することにより容易に解くことが可能である。

#### § 4. Dissipative Scheme についての注意

$K$ - $\alpha V$  方程式を解く差分スキームとして, ぶつうの explicit scheme

$$(4.1) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{3} \{u_j^n D_0 u_j^n + D_0 (u_j^n)^2\} + \mu D_+ D_0 D_- u_j^n = 0$$

を考えると, 安定条件は,  $\Delta t = O[(\Delta x)^6]$  のオーダーでない限り安定にならない。これは実用上非常に厳しい条件である。そこで, 次のような dissipative scheme

$$(4.2) \quad \frac{1}{\Delta t} \left\{ u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right\} + \frac{1}{3} \{u_j^n D_0 u_j^n + D_0 (u_j^n)^2\} + \mu D_+ D_0 D_- u_j^n = 0$$

を考えると, これは, § 2. で扱った条件とほぼ同じ条件があれば安定になることが示されている[6]。

しかし, このスキームによって,  $K$ - $\alpha V$  方程式を近似す

ることは、人工粘性項としての効果をもった、次のような  $K-\alpha V$  Burgers 方程式

$$(4.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を解くことになっている。このとき、粘性項として表われる項の係数は、安定条件を  $\Delta t = O[(\Delta x)^3]$  とすると、 $O(\frac{1}{\Delta x})$  となり、 $\mu$  に比べてかなり大きくなる。これは、Kawahara [7] が示した単調衝撃波領域となり、 $K-\alpha V$  方程式特有の孤立波がでてくることは期待できない。(4.2) のスキームを用いた数値計算の結果を図 7. 8. に示す。図 7. は、 $\mu = \frac{1}{50}$ 、初期値  $u(x, 0) = \sin \pi x$  の変化の様子である。これから、非常に減衰の効果が大きく、 $K-\alpha V$  方程式にみられるいわゆるフタタチの現象も分散の現象も現われないことがわかる。図 8. は、図 7. の結果の各時間におけるエネルギー  $\|u^n\|^2$  の変化を示したものである。

最後に、この研究をすすめるにあたり、数々の貴重な助言などをして下さった高見頼郎助教授はじめ河原田秀夫講師、桑原邦郎助手に感謝します。なお、本論文の数値計算は、東京大学大型計算センターの HITAC 5020E を使用した。

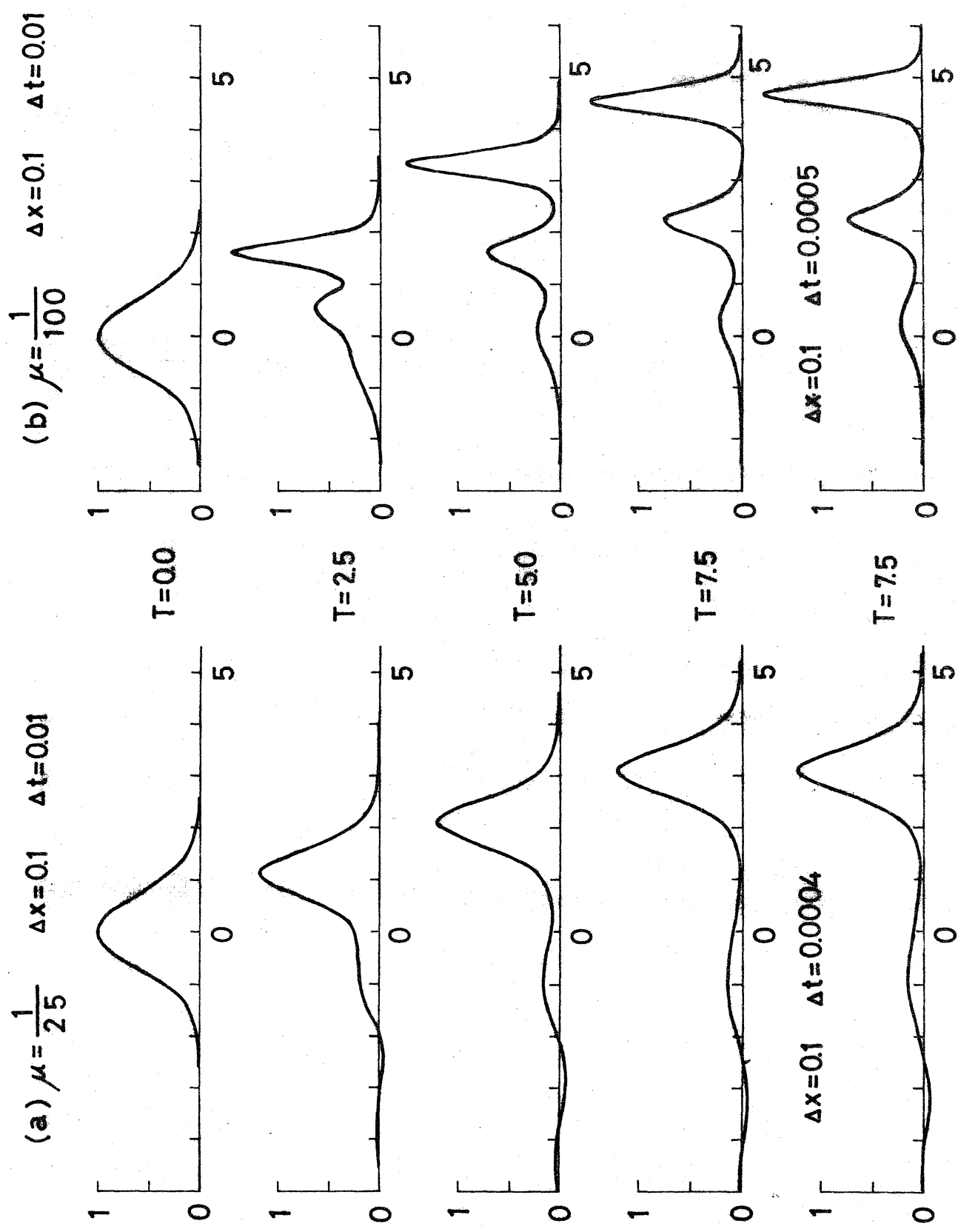


图 5. 初期值  $e^{-x^2}$  の Implicit scheme (3.3) の変化  $\nu$ ,  $T=7.5$  は centered scheme (2.1) と比較

$$\mu = \frac{1}{100} \quad \Delta x = 0.05 \quad \Delta t = 0.005$$

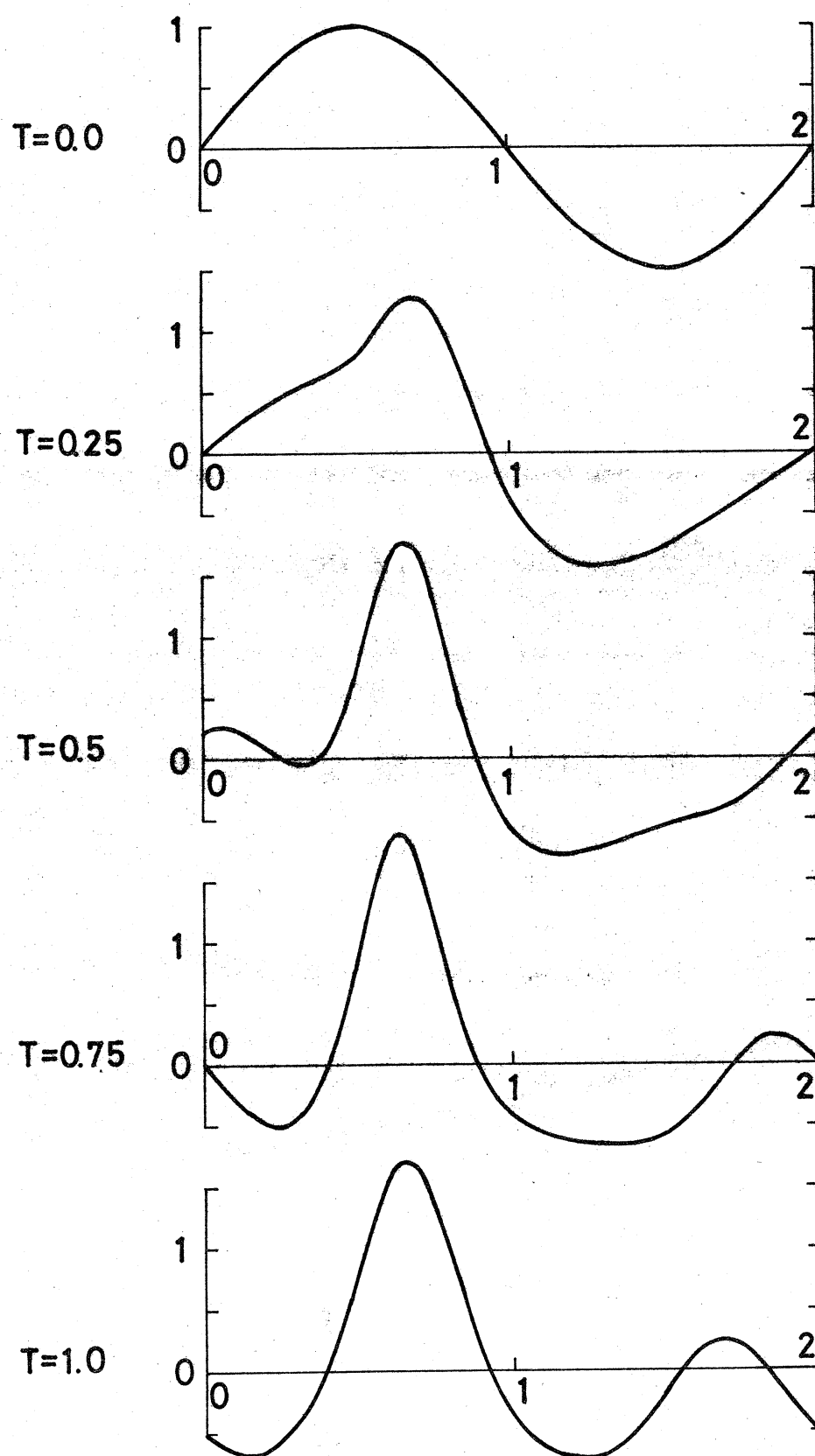


図 6. 初期値  $\sin \pi x$  の Lax-Wendroff scheme (3.3) による変化

$$\mu = \frac{1}{50} \quad \Delta x = 0.05 \quad \Delta t = 0.001$$

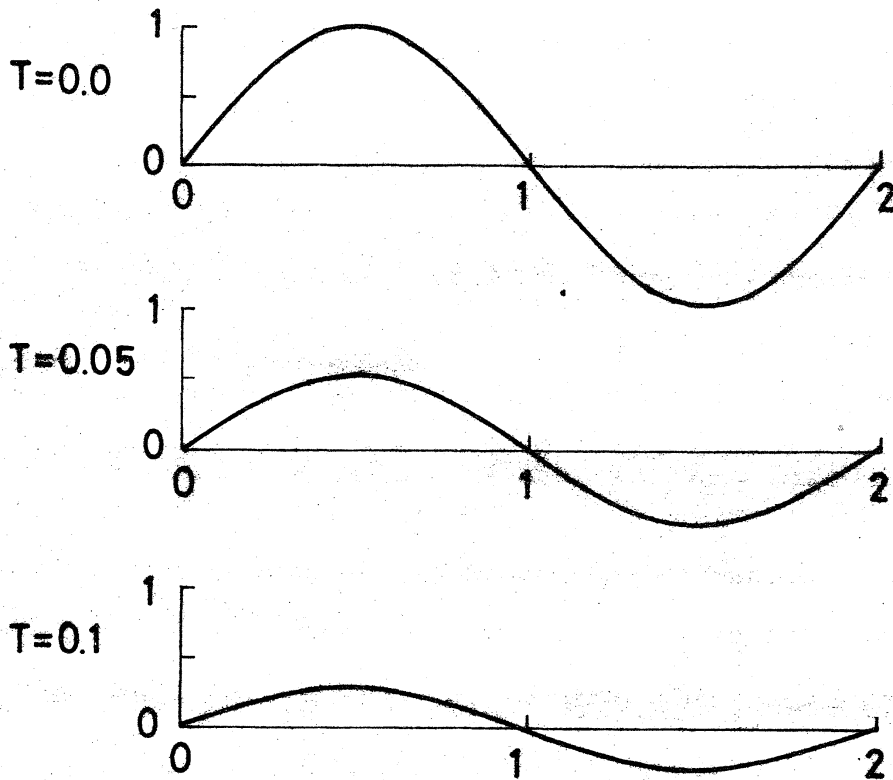


図 7. 初期値  $\sin \pi x$  の dissipative scheme (4.2) による変化

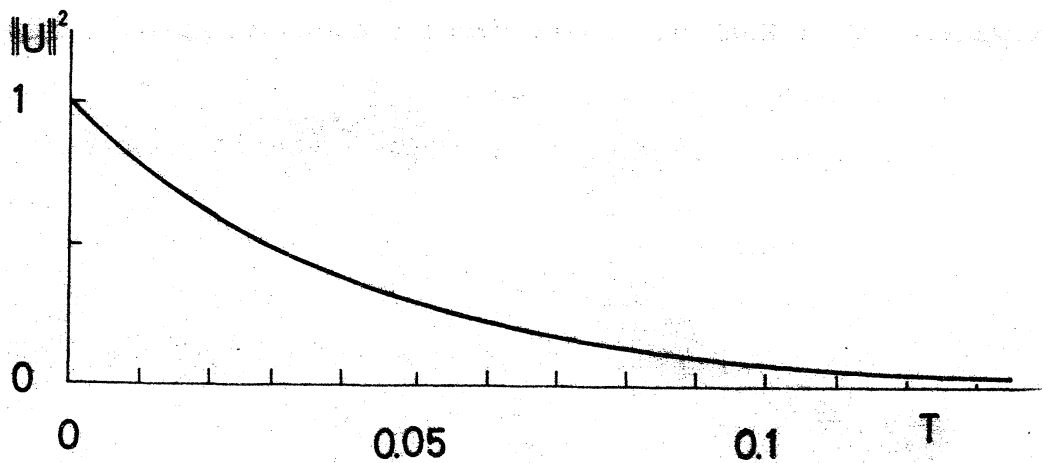


図 8. 初期値  $\sin \pi x$  の dissipative scheme (4.2) による  
エネルギーノルム  $\|u\|^2$  の減衰

## REFERENCES

- [1] Zabusky, N. J., and Kruskal, M. D. : Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Letters*, 15 (1965) 240-243.
- [2] Lax, P. D. : Integral of non-linear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.*, 21 (1968) 467-490.
- [3] Sjöberg, A. : On the Korteweg-de Vries equation : existence and uniqueness, *J. Math. Anal. and Appl.*, 29 (1970) 569-579.
- [4] Richtmyer, R. D., and Morton, K. W. : Difference methods / for initial-value problems (2nd. ed.), Interscience, New York, 1967.
- [5] Toda, M. : Mechanics and statistical mechanics of non-linear chains, *J. Phys. Soc. of Japan*, 26 suppl. (1969) 235-237.
- [6] Vliegenthart, A. C. : On finite difference methods for the Korteweg-de Vries equation, *J. Eng. Math.*, 5 (1970) 137-155.
- [7] Kawahara, T. : Weak nonlinear magneto-acoustic waves in a cold plasma in the presence of effective electron-ion collisions, *J. Phys. Soc. of Japan*, 28 (1970) 1321-1329.