

階数 1 非コンパクト対称空間上の調和解析とその応用.

広島 大(理)

橋爪 道考

Hashizume Michihiko

対称空間上の調和解析に於いて基本的な役割を果たすものとして、 $\mathbb{R}^n$ の場合のフーリエ変換に対応して球フーリエ変換が、ラドン変換の対応物として(アーベル・セルバーグ)・ハリシュ・チャンドラ変換が、更にポアソン和公式に対応してセルバーグの跡公式がある。とりわけ球フーリエ変換に関してはその反転公式やプランシェレルの定理、ペーリー・ウィナー型定理等が与えられて居り 現在その応用に関心が集まっている。さてその応用(とりわけ局所対称空間上の調和解析への応用)とすると まだまだ球フーリエ変換の性質について調べる必要が有ると思われる。周知の如く球フーリエ変換はハリシュ・チャンドラ変換と $\mathbb{R}^n$ 上のフーリエ変換の合成として表わされる。従って球フーリエ変換の研究はハリシュ・チャンドラ変換のそれらに帰着できるのであるが、ハリシュ・チャンドラ変換が応用上有用な形にまで書き直されていない事もある。この点

場からの対称空間上の調和解析の研究はさほど進展してはいないようである。本稿では ハリシュ・チンドラ 変換とその転公式を標題に記した対称空間の場合に具体的に与える事により その種々の応用について述べる。

§ 1. 準備.

G を連結、非コンパクト半単純リー群で中心有限かつその実階数が1であるものとする。 $K \in G$ の最大コンパクト部分群とする。 G, K のリー環を夫々 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ とし、 $\mathfrak{g}$ のキリーング形式 $B(\cdot, \cdot)$ に肉する $\mathfrak{k}$ の直交補空間を $\mathfrak{p}$ で表わす。 $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ の最大アベル部分環とすれば G の実階数が1だから $\dim \mathfrak{a} = 1$ である。 $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に肉するルート系を Σ とし、その正のルート系 Σ^+ を一つ固定する。このとき $\alpha \in \Sigma^+$, $\alpha/2 \notin \Sigma^+$ なるルート α が唯一存在し $\Sigma^+ = \{\alpha\}$ 又は $\Sigma^+ = \{\alpha, 2\alpha\}$ が成り立つ。 $\mathfrak{a}$ の元 $H_0 \in \mathfrak{a}$ ($H_0 = 1$) を満たすように選ぶ。 $\mathfrak{a} = \mathbb{R} H_0$ だから $\mathfrak{a}$ の複素双対空間 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ は $\mathbb{C}$ と同型で その同型対応は $\nu \in \mathbb{C} \mapsto \nu \alpha \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ で与えられる。以下 $\mathbb{C}$ と $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ を上の対応で同一視する。ルート α , 2α に対応する $\mathfrak{g}$ のルート空間を $\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{2\alpha}$ とし、その次元を

$$p = \dim \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad q = \dim \mathfrak{g}_{2\alpha}$$

で表わす。以下

$$s = p/2 + q$$

と置く。 $\mathfrak{N} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ とすれば $\mathfrak{N}$ は $\mathfrak{g}$ の部分環である。 $\mathfrak{N}$ に対応する G の連結部分群を夫々 A, N と記す。 $A = \exp \mathfrak{N} = \exp(\mathbb{R}H_0)$ より A の元は $a_t = \exp(tH_0)$ ($t \in \mathbb{R}$) と一意的に表ける。 又 $N = \exp \mathfrak{N} = \exp(\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha})$ より N の元は $n = \exp(Y + Z)$ ($Y \in \mathfrak{g}_\alpha, Z \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$) と一意的に表わされる。 G の元は $g = k a_t n$ ($k \in K, a_t \in A, n \in N$) と一意的に分解される。 又 G の元は $g = k a_t k'$ ($k, k' \in K, a_t \in A$ かつ $t \geq 0$) と表わされるが、この時 a_t ($t \geq 0$) は g により一意に定まる事を注意しておく(この分解はカルタニ分解と呼ぶ)。

商空間 G/K は定数倍を除いて唯一の G -不変リーマン計量をもち、それは階数 1 の非コンパクト型リーマン対称空間と呼ばれる負の断面曲率をもつ完備、厚連結リーマン多様体である。 G/K の次元を d とすると以下の関係がある：

$$d = \dim G/K = p + q + 1.$$

本稿では G/K の G -不変計量を以下の如く正規化する。 $\theta \in$ カルタニ分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に対応するカルタニ包含とすると、 $-B(X, \theta Y)$ ($X, Y \in \mathfrak{g}$) は $\mathfrak{g}$ 上にユークリッド内積を与える。そこで $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle, \rangle$ を

$$\langle X, Y \rangle = -B(X, \theta Y) / B(H_0, H_0) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

で定義する。これを $\mathfrak{p}$ に制限すれば $\mathfrak{p}$ 上に $\text{Ad}(K)$ -不変内積が定まる。これを G/K 上の G -不変リーマン計量に延長した

ものを考える。かく与えられたリーマン計量に因する G/K 上の距離関数を $d(\cdot, \cdot)$, 体積要素を dv , ラプラス作用素を Δ と表わす。これらはすべて G -不変である。以下 $x \in G$ の定める剰余類 $xK \in G/K$ を単に $\bar{x}$ と書く事にする。

次にハール測度の正規化について述べる。先づ K のハール測度は $\int_K dk = 1$ を満たすものとする。 G のハール測度 dx を

$$\int_G f(x) dx = \int_{G/K} \int_K f(xk) dk dv(\bar{x}) \quad (f \in C_0(G))$$

が成立するようにとる。 A のハール測度は

$$da_t = dt \quad (a_t = \exp tH_0, t \in \mathbb{R}), \quad (dt \text{ は } \mathbb{R} \text{ のルベグ測度})$$

を採用する。 $\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_{2a}$ には $\mathfrak{g}$ の計量 $\langle, \rangle$ から誘導されるユークリッド計量があり 対応するユークリッド測度を夫々 dY, dZ と表わす。これを用いて N のハール測度を

$$dn = 2^{-(p+b)/2} dY dZ \quad (n = \exp(Y+Z), Y \in \mathfrak{g}_a, Z \in \mathfrak{g}_{2a})$$

で与える。上に述べたように正規化されたハール測度の t とは次の積分公式が成立つ: $f \in C_0(G)$ に對し,

$$\int_G f(x) dx = \int_K \int_{-\infty}^{\infty} \int_N f(ka_t n) e^{2\rho t} dk dt dn.$$

更に $D(t) \quad (t \geq 0)$ を

$$D(t) = 2\pi^{d/2} \cdot \Gamma(d/2)^{-1} (\sinh t)^p (2^{-1} \sinh 2t)^b$$

とすると

$$\int_G f(x) dx = \int_{K \times K} \int_0^\infty f(ka_t k') D(t) dt dk dk'.$$

§2 球フーリエ変換とハリシュ・チンドラ変換.

以下 $C^\infty(G//K) = \{f \in C^\infty(G) \mid f(kxk') = f(x), k, k' \in K, x \in G\}$ とし,

$C_0^\infty(G//K) = \{f \in C^\infty(G//K) \mid \text{supp}(f) : \text{コンパクト}\}$ とおく. $f \in C^\infty(G//K)$

の A への制限 $f(ax)$ は $t \in \mathbb{R}$ の関数として $C^\infty(\mathbb{R})_e = \{F \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid F(-t) = F(t)\}$

に属す. 逆に $F \in C^\infty(\mathbb{R})_e$ に対し G 上の関数 $f \in C^\infty(G//K)$ を $f(kaxk') = F(t)$

で定義すれば $f \in C^\infty(G//K)$ である. 従って同型:

$$(2.1) \quad C^\infty(G//K) \cong C^\infty(\mathbb{R})_e, \quad C_0^\infty(G//K) \cong C_0^\infty(\mathbb{R})_e$$

を得る. $f \in C_0^\infty(G//K)$ に対し

$$(2.2) \quad \hat{f}(\nu) = \int_G f(x) \mathcal{P}_\nu(x) dx \quad (\nu \in \mathbb{C})$$

を f の球フーリエ変換という, ここに $\mathcal{P}_\nu(x)$ はハリシュ・チンドラの球関数と呼ばれる $C^\infty(G//K)$ の元で積分表示

$$(2.3) \quad \mathcal{P}_\nu(x) = \int_K e^{(i\nu - \rho)(t(xk))} dk \quad (x \in G)$$

で与えられる. 但し $t(xk)$ は $xk \in Ka_{t(xk)}N$ により一意的に定まる実数である. 更に $\mathcal{P}_\nu(x)$ は微分方程式

$$(2.4) \quad \Delta \mathcal{P}_\nu + (\nu^2 + \rho^2) \mathcal{P}_\nu = 0, \quad \mathcal{P}_\nu(e) = 1$$

の解としても一意に決定される事を知らぬ (cf. [4]).

次に $f \in C_0^\infty(G//K)$ に対しハリシュ・チンドラ変換 $\mathcal{H}f$ は

$$(2.5) \quad (\mathcal{H}f)(at) = e^{\rho t} \int_N f(atn) dn, \quad (t \in \mathbb{R})$$

により定義される. このとき球フーリエ変換は

$$(2.6) \quad \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}f)(at) e^{-i\nu t} dt$$

と表わされる ([4]). 即ち球フーリエ変換はハリシュ・チンドラ変

換と $\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換の合成に他ならぬ。この多価ハリス・チャンドラ変換をより具体的な形に表わす事を行う。

$f \in C^\infty(\mathbb{R})_e$ に対し $[1, +\infty)$ 上の関数 $\phi = Cf$ を

$$(2.7) \quad \phi(x) = (Cf)(x) = f(\log(x + \sqrt{x^2 - 1})) \quad (x \geq 1)$$

で与える。更に写像 C による $C^\infty(\mathbb{R})_e$ 及び $C_0^\infty(\mathbb{R})_e$ の像を夫々 $C^\infty[1, +\infty)$, $C_0^\infty[1, +\infty)$ と置く事にする。写像 C の逆 $C^{-1}: C^\infty[1, +\infty) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})_e$ は, $\cosh t = \cosh t$ なる略記の t とに,

$$(2.8) \quad (C^{-1}\phi)(t) = \phi(\cosh t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

で与えられる。以上により $C^\infty(G/K) \cong C^\infty(\mathbb{R})_e \cong C^\infty[1, +\infty)$ 及び $C_0^\infty(G/K) \cong C_0^\infty(\mathbb{R})_e \cong C_0^\infty[1, +\infty)$ が成立つ事を注意しておく。

更にハリス・チャンドラ変換 $\mathcal{H}$ は同型対応 (2.1) のもとに $C_0^\infty(\mathbb{R})_e$ 上定義されるものを見なせる。又その像は再び $C_0^\infty(\mathbb{R})_e$ の元で与える事も知られてゐる ([4]).

定理 2.1. (i) $\phi \in C_0^\infty[1, +\infty)$ に対し,

$$(2.9) \quad \mathcal{H}C^{-1}\phi(x) = \int_{\mathfrak{g}_a \times \mathfrak{g}_{2d}} \phi((\cosh t + |Y|^{1/2})^2 + |Z|^2)^{1/2} dY dZ$$

が成立つ。

(ii) $\mathcal{S} = C \circ \mathcal{H} \circ C^{-1}: C_0^\infty[1, +\infty) \rightarrow C_0^\infty[1, +\infty)$ は

$$(2.10) \quad (\mathcal{S}\phi)(x) = \int_{\mathfrak{g}_a \times \mathfrak{g}_{2d}} \phi((x + |Y|^{1/2})^2 + |Z|^2)^{1/2} dY dZ, \quad (x \geq 1)$$

で与えられる。

証明. N の元は $n = \exp(Y + Z)$ ($Y \in \mathfrak{g}_a, Z \in \mathfrak{g}_{2d}$) と表わされ, このとき $dn = 2^{-(p+q)/2} dY dZ$ であった。従つて (2.5) は

$$(\mathcal{H}f)(a_t) = 2^{-(p+1)/2} e^{pt} \int_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{2\alpha}} f(a_t \exp(Y+Z)) dY dZ$$

と書ける。所以 $a_t \exp(Y+Z)$ のカルタニ分解を

$$a_t \exp(Y+Z) = k a_\tau k', \quad \tau = \tau(t, Y, Z) \geq 0, \quad k, k' \in K$$

として, $\tau(t, Y, Z)$ を求めよう。 $\mathbb{R}Y, \mathbb{R}Z$ が $\mathfrak{g}$ の中で生成する部分リ-環を $\mathfrak{g}(Y, Z)$ とすると, $\mathfrak{g}(Y, Z) \supset \mathfrak{o}$ であり, $\mathfrak{g}(Y, Z) \cong \mathfrak{su}(2, 1)$ が成立 $\supset (\mathfrak{g}_{2\alpha} = 0)$ のときは $\mathfrak{g}(Y) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 。更に $\mathfrak{g}(Y, Z)$ はリ-環と見る G の連結部分群 $G(Y, Z)$ は $SU(2, 1)$ に同型で $a_t \exp(Y+Z)$ のカルタニ分解は, それを $G(Y, Z) \cong SU(2, 1)$ の元とみて行えばよい (いわゆる “ $SU(2, 1)$ -環元” cf. [5])。かくして次を得る:

$$\text{ch } \tau(t, Y, Z) = \left\{ (cht + e^t |Y|^2/4)^2 + e^{2t} |Z|^2/2 \right\}^{1/2}.$$

これを利用すれば

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(C^\sharp \phi)(a_t) &= 2^{-(p+1)/2} e^{pt} \int_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{2\alpha}} (C^\sharp \phi)(a_t \exp(Y+Z)) dY dZ \\ &= 2^{-(p+1)/2} e^{pt} \int_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{2\alpha}} (C^\sharp \phi)(a_{\tau(t, Y, Z)}) dY dZ \\ &= 2^{-(p+1)/2} e^{pt} \int_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{2\alpha}} \phi(\text{ch } \tau(t, Y, Z)) dY dZ \\ &= 2^{-(p+1)/2} e^{pt} \int_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{2\alpha}} \phi\left(\left((cht + e^t |Y|^2/4)^2 + e^{2t} |Z|^2/2\right)^{1/2}\right) dY dZ \end{aligned}$$

を得る。

これに変数変換 $Y \mapsto (2e^t)^{1/2} Y, Z \mapsto (2e^{2t})^{1/2} Z$ を施し, $\beta = p/2 + q$ に注意すれば (2.9) を得る。

(注意). $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{2\alpha}$ に於ける単位球面の体積を ω_p, ω_q とすると我々の計量の β と γ は 夫々次で与えられる:

$$(2.11) \quad \omega_p = 2\pi^{p/2}/\Gamma(p/2), \quad \omega_q = 2\pi^{q/2}/\Gamma(q/2).$$

従って (2.10) は 夫々

$$(2.12) \quad \mathcal{S}\phi(x) = 2^{p/2-1} \omega_p \int_0^\infty \phi(x+y) y^{p/2-1} dy \quad (q=0 \text{ の場合}),$$

$$(2.13) \quad \mathcal{S}\phi(x) = 2^{p/2-1} \omega_p \omega_q \int_0^\infty \int_0^\infty \phi((x+y)^2 + z^2)^{q/2} y^{p/2-1} z^{q-1} dy dz \quad (q \geq 1)$$

と書く事が出来る。

§3 セルバーク変換 $\mathcal{S}_{p,q}$.

$p \geq 1$, $q \geq 0$ (整数) とし, $\omega_p = 2\pi^{p/2} \Gamma(p/2)^{-1}$, $\omega_q = 2\pi^{q/2} \Gamma(q/2)^{-1}$ ($p, q \geq 1$)

とする。変換 $\mathcal{S}_{p,q} : C_0^\infty[1, +\infty) \rightarrow C_0^\infty[1, +\infty)$ に 夫々

(i) $q = 0$ のとき

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}_{p,0}\phi(x) &= 2^{p/2-1} \omega_p \int_0^\infty \phi(x+y) y^{p/2-1} dy, \quad (x \geq 1) \\ &= 2^{p/2-1} \omega_p \int_x^\infty \phi(y) (y-x)^{p/2-1} dy \end{aligned}$$

(ii) $q \geq 1$ のとき

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}_{p,q}\phi(x) &= 2^{p/2-1} \omega_p \omega_q \int_0^\infty \int_0^\infty \phi((x+y)^2 + z^2)^{q/2} y^{p/2-1} z^{q-1} dy dz \\ &= 2^{p/2-1} \omega_p \omega_q \int_x^\infty \left\{ \int_y^\infty \phi(w) (w^2 - y^2)^{q/2-1} w dw \right\} (y-x)^{p/2-1} dy \end{aligned}$$

により定義し、この変換 $\mathcal{S}_{p,q}$ をセルバーク変換と呼ぶ事にしよう。

実際 $p=1$, $q=0$ の場合

$$(3.3) \quad \mathcal{S}_{1,0}\phi(x) = 2^{1/2} \int_x^\infty \phi(y) (y-x)^{-1/2} dy$$

はセルバーク ([8]) に導入された変換に他ならない。更に $p \geq 1$,

$q=0$ の場合は 高橋礼司先生により考察されたものである。

以下セルバーク変換 $\mathcal{S}_{p,q}$ の逆変換を決定する。先づ次の関係が成立する事は容易である:

$$(3.4) \quad \mathcal{S}_{p+1,0} = \mathcal{S}_{p,0} \circ \mathcal{S}_{1,0} \quad (p \geq 1).$$

$C^\infty[1, +\infty)$ 上の作用素 $\#, b, D, \mathcal{D}$ は夫々

$$(\# \phi)(x) = \phi^\#(x) = \phi(x^2), \quad (b\phi)(x) = \phi^b(x) = \phi(x^{1/2})$$

$$D\phi(x) = \frac{d}{dx}\phi(x), \quad \mathcal{D}\phi(x) = x^{-1} \frac{d}{dx}\phi(x)$$

で定義する。そして $\#^{-1} = b$ である。

補題 3.1. $p, q \geq 1$ のとき 次の成立する:

$$(3.5) \quad \mathcal{S}_{p,q} = 2^{-1/2} \mathcal{S}_{p,0} \circ \# \circ \mathcal{S}_{q,0} \circ b.$$

証明. (3.2) より

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{p,q} \phi(x) &= 2^{p/2-1} \omega_p \omega_q \int_x^\infty \left\{ \int_y^\infty \phi(w) (w^2 - y^2)^{q/2-1} w dw \right\} (y-x)^{p/2-1} dy \\ &= 2^{p/2-1} \omega_p 2^{-1} \omega_q \int_x^\infty \left\{ \int_{y^2}^\infty \phi(u^{1/2}) (u - y^2)^{q/2-1} du \right\} (y-x)^{p/2-1} dy \\ &= 2^{p/2-1} \omega_p 2^{-1/2} \int_x^\infty \left\{ 2^{q/2-1} \omega_q \int_{y^2}^\infty \phi^b(u) (u - y^2)^{q/2-1} du \right\} (y-x)^{p/2-1} dy \\ &= 2^{-1/2} 2^{p/2-1} \omega_p \int_x^\infty (\mathcal{S}_{q,0} \phi^b)(y^2) (y-x)^{p/2-1} dy \\ &= 2^{-1/2} 2^{p/2-1} \omega_p \int_x^\infty (\mathcal{S}_{q,0} \phi^b)^\#(y) (y-x)^{p/2-1} dy \\ &= 2^{-1/2} \mathcal{S}_{p,0} ((\mathcal{S}_{q,0} \phi^b)^\#)(x). \end{aligned}$$

定理 3.2. ヘルムホルツ変換 $\mathcal{S}_{p,q}$ の逆変換は夫々次のようになる

(i) $q=0$ のとき (高橋[9]).

$$a) \quad p: (\text{偶数}) \quad \mathcal{S}_{p,0}^{-1} \phi(x) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{p/2} D^{p/2} \phi(x) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{p/2} \phi^{(p/2)}(x)$$

$$b) \quad p: (\text{奇数}), \quad \mathcal{S}_{p,0}^{-1} \phi(x) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+1)/2} (\mathcal{S}_{1,0} \circ D^{(p+1)/2} \phi)(x)$$

$$= \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+1)/2} 2^{1/2} \int_x^\infty \phi^{(p+1)/2}(y) (y-x)^{-1/2} dy$$

ii) $q \geq 1$ のとき

$$(3.6) \quad \delta_{p,q}^{-1} = 2^{1/2} \# \circ \delta_{q,0}^{-1} \circ b \circ \delta_{p,0}^{-1}$$

が成り立ち、従って

c) p, q : 偶数 のとき

$$\delta_{p,q}^{-1} \phi(x) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+q)/2} (D^{q/2} \circ D^{p/2} \phi)(x)$$

d) p : 奇数, q : 偶数 のとき

$$\delta_{p,q}^{-1} \phi(x) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+q+1)/2} (\delta_{1,0} \circ D^{q/2} \circ D^{(p+1)/2} \phi)(x)$$

e) p : 偶数, q : 奇数 のとき

$$\begin{aligned} \delta_{p,q}^{-1} \phi(x) &= \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+q+1)/2} (\tilde{\delta}_{1,0} \circ D^{(q+1)/2} \circ D^{p/2} \phi)(x) \\ &= 2 \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+q+1)/2} \int_x^\infty \left(y \frac{d}{dy}\right)^{(q+1)/2} \left(\frac{d}{dy}\right)^{p/2} \phi(y) \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

f) p, q : 奇数 のとき

$$\delta_{p,q}^{-1} \phi(x) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+q)/2+1} (\tilde{\delta}_{1,0} \circ \delta_{1,0} \circ D^{(q+1)/2} \circ D^{(p+1)/2} \phi)(x)$$

但し e), f) の場合 $\tilde{\delta}_{1,0}$ は

$$(\tilde{\delta}_{1,0} \phi)(x) = 2^{-1/2} \# \circ \delta_{1,0} \circ b \phi(x) = 2 \int_x^\infty \phi(y) \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

と定義されるものである。

証明. (3.1) より $\delta_{2,0} \phi(x) = 2\pi \int_x^\infty \phi(y) dy$. 従って $\delta_{2,0}^{-1} = (-1/2\pi) \frac{d}{dx} = \left(\frac{-1}{2\pi}\right) D$ と得る. $\left(\frac{-1}{2\pi}\right) D \circ \delta_{p,0} = \delta_{p-2,0}$ ($\because$ (3.4) を用いる) より p が偶数 のとき $\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{p/2} D^{p/2} = \delta_{p,0}^{-1}$ と得る. p が奇数 のとき, (3.4) より $\delta_{p,0}^{-1} = \delta_{1,0} \circ \delta_{p+1,0}^{-1}$ であり更に $(p+1)$ が偶数 である

事に注意すれば $\delta_{p,0}^{-1} = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+1)/2} \delta_{1,0} \circ D^{(p+1)/2}$ を得る。ii) の場合, まず (3.6) は (3.5) の逆写像を考えれば明らかである。c) ~ f) の証明は皆同様であるので後で使う e) を示す。この場合 (i) より

$$\delta_{p,0}^{-1} = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{p/2} D^{p/2}, \quad \delta_{q,0}^{-1} = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(q+1)/2} \delta_{1,0} \circ D^{(q+1)/2} \quad \text{で, これを (3.6) に代入すれば}$$

$$\delta_{p,q}^{-1} = 2^{q/2} \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+q+1)/2} \# \circ \delta_{1,0} \circ D^{(q+1)/2} \circ b \circ D^{p/2} \quad \text{を得る。}$$

$$\text{所以 } \# \circ \delta_{1,0} \circ D^{(q+1)/2} \circ b \circ D^{p/2} = \# \circ \delta_{1,0} \circ b \circ \# \circ D^{(q+1)/2} \circ b \circ D^{p/2}$$

$$= 2^{1/2} \tilde{\delta}_{1,0} \circ \# \circ D^{(q+1)/2} \circ b \circ D^{p/2}$$

であり, 更に $\# \circ D^{(q+1)/2} \circ b = 2^{-(q+1)/2} \mathcal{D}^{(q+1)/2}$ に注意すれば $\# \circ \delta_{1,0} \circ D^{(q+1)/2} \circ b \circ D^{p/2} = 2^{-1/2} \tilde{\delta}_{1,0} \circ \mathcal{D}^{(q+1)/2} \circ D^{p/2}$ となり従って e) を得る。

§4. ハリシ・チャンドラ変換の逆変換.

初めに標題に記した対称空間の分類表を与えておく。

階数1 非コンパクト対称空間: M	$I(M)^0$	p, q, s
(I). (2n+1)次元実双曲空間 (n ≥ 1)	$SO_0(2n+1, 1)$	2n, 0, n
(I) _e 2n次元実双曲空間 (n ≥ 1)	$SO_0(2n, 1)$	2n-1, 0, n-1/2
(II) 2n次元複素双曲空間 (n ≥ 2)	$SU(n, 1)$	2(n-1), 1, n
(III) 4n次元4元数双曲空間 (n ≥ 2)	$Sp(n, 1)$	4(n-1), 3, 2n+1
(IV) 16次元8元数双曲空間	$F_{4(-20)}$	8, 7, 11

我々は §2 で ハリシ・チャンドラ変換 $\mathcal{H}: C_0^\infty(G/K) \cong C_0^\infty(\mathbb{R})_e \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R})_e \cong C_0^\infty(G/K)$ と, $\mathcal{S} = \mathcal{C} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{C}^{-1}: C_0^\infty[1, \infty) \rightarrow C_0^\infty[1, \infty)$ と導入した。この §2 では $\mathcal{H}$ 及び $\mathcal{S}$ の逆変換を前節の結果を用いて与えよう。 $C^\infty(\mathbb{R})_e$ 上の作用素 $\mathcal{S}^*$ を

$$(4.1) \quad \mathcal{D} = (\text{sh}t)^{-1} \frac{d}{dt} \quad (\text{但, } \text{sh}t = \sinh t)$$

τ^n と $\bar{\tau}$ と τ 。 τ の t と τ

$$(4.2) \quad D = \frac{d}{dx} = C \circ \mathcal{D} \circ C^{-1} = C \circ (\text{sh}t)^{-1} \frac{d}{dt} \circ C^{-1}$$

に注意する。

定理 4.1. 変換 $\mathcal{S} = C \circ \mathcal{H} \circ C^{-1}$ は $\mathcal{H}$ の変換は夫々次
 τ^n と $\bar{\tau}$ と τ 。 但し (I)₀ ~ (IV) は上の分類表に対応してゐる。

$$(I)_0 \quad (\mathcal{S}^{-1}\phi)(x) = (-1/2\pi)^n \phi^{(n)}(x)$$

$$(\mathcal{H}^{-1}F)(t) = (-1/2\pi)^n (\mathcal{D}^n F)(t)$$

$$(I)_e \quad (\mathcal{S}^{-1}\phi)(x) = 2^{1/2} (-1/2\pi)^n \int_x^\infty \phi^{(n)}(y) (y-x)^{-1/2} dy$$

$$(\mathcal{H}^{-1}F)(t) = 2^{1/2} (-1/2\pi)^n \int_t^\infty (\mathcal{D}^n F)(\tau) (\text{ch}\tau - \text{ch}t)^{-1/2} \text{sh}\tau d\tau$$

$$(II) \quad (\mathcal{S}^{-1}\phi)(x) = 2 (-1/2\pi)^n \int_x^\infty \phi^{(n)}(y) (y^2 - x^2)^{-1/2} dy$$

$$(\mathcal{H}^{-1}F)(t) = 2 (-1/2\pi)^n \int_t^\infty (\mathcal{D}^n F)(\tau) (\text{ch}^2\tau - \text{ch}^2t)^{-1/2} \text{sh}\tau d\tau$$

$$(III) \quad (\mathcal{S}^{-1}\phi)(x) = 2 (-1/2\pi)^{2n} \int_x^\infty \{ \gamma \phi^{(2n)}(y) - \phi^{(2n-1)}(y) \} y^2 (y^2 - x^2)^{-1/2} dy$$

$$(\mathcal{H}^{-1}F)(t) = 2 (-1/2\pi)^{2n} \int_t^\infty \{ \text{ch}\tau (\mathcal{D}^{2n} F)(\tau) - \mathcal{D}^{2n-1} F(\tau) \} \text{ch}^2\tau (\text{ch}^2\tau - \text{ch}^2t)^{-1/2} \\ \times \text{sh}\tau d\tau$$

$$(IV) \quad (\mathcal{S}^{-1}\phi)(x) = 2 (-1/2\pi)^8 \int_x^\infty \{ \gamma^3 \phi^{(8)}(y) - 6\gamma^2 \phi^{(7)}(y) + 15\gamma \phi^{(6)}(y) - 15\phi^{(5)}(y) \} \gamma^{-6} \\ \times (y^2 - x^2)^{-1/2} dy$$

$$(\mathcal{H}^{-1}F)(t) = 2 (-1/2\pi)^8 \int_t^\infty \{ (\text{ch}\tau)^3 \mathcal{D}^8 F(\tau) - 6 \text{ch}^2\tau \mathcal{D}^7 F(\tau) + 15 \text{ch}\tau \mathcal{D}^6 F(\tau) - 15 \mathcal{D}^5 F(\tau) \} \\ \times \text{ch}^6\tau (\text{ch}^2\tau - \text{ch}^2t)^{-1/2} \text{sh}\tau d\tau$$

証明. (2.12), (2.13) より 分類表に与えられた p, q をとれば, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{p,q}$ に他ならず 従って定理 3.2 が適用できる。(I)₀, (I)_e は

定理 3.2 (i) より明らかである。(II), (III), (IV) については分類表より p : 偶数, q : 奇数 であり従って定理 3.2 の ii) e) が適用できる。更に $q = 1, 3, 7$ に注意すればこの場合の δ^1 も容易に求められる。(4.2) と C, C^1 の定義を使えば $\mathcal{H}^1$ が上記の如く与えられる事は δ^1 の公式より明らかである。

§5 応用.

最初に セルバーグ変換は次のようにも書ける事に注意する。

$$(5.1) \begin{cases} \delta_{p,0} \phi(x) = 2^{p/2} \omega_p x^{p/2} \int_0^1 \phi(xu^2) u^{-p/2-1} (1-u)^{p/2-1} du, \\ \delta_{p,q} \phi(x) = 2^{p/2} \omega_p \omega_q 2^{-1} x^{p/2+q} \int_0^1 \int_0^1 \phi(xu^2 v^{-q}) u^{-(p/2+1)} (1-u)^{p/2-1} v^{-q/2-1} (1-v)^{q/2-1} du dv. \end{cases}$$

$s \in \mathbb{C}$ とし $f_s \in C^\infty(G//K)$ と

$$(5.2) \quad f_s(k_0 x k') = (c_h x)^{-(s+p)}$$

と定義する。このとき $\phi_s(x) = (C f_s)(x) = x^{-(s+p)}$ である。

命題 5.1. 内積 f_s に対し次が成り立つ。

$$i) \quad \Delta f_s = (s^2 - p^2) f_s - (s+p)(s+p/2+1) f_{s+2}$$

ii) $\operatorname{Re}(s) > 0$ のとき, $\mathcal{H} f_s$ は収束してそれは

$$(\mathcal{H} f_s)(x) = \frac{\pi^{d/2} 2^{1-s} \Gamma(s)}{\Gamma((s+p)/2) \Gamma((s+p/2+1)/2)} (c_h x)^{-s}$$

と与えられる。

iii) $\operatorname{Re}(s) > 0$ から $\operatorname{Re}(s \pm i\nu) > 0$ のとき, f_s の球対称変換は存在して

$$\hat{f}_s(\nu) = \frac{\pi^{d/2} \Gamma((s+i\nu)/2) \Gamma((s-i\nu)/2)}{\Gamma((s+p)/2) \Gamma((s+p/2+1)/2)}$$

と与えられる。

証明. (i) $\delta(\Delta) = \frac{d^2}{dt^2} + (D'(t)/D(t)) \frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} + (p \coth t + 2q \coth 2t) \frac{d}{dt}$

とあれば $f \in C^\infty(G/K)$ に対し $(\Delta f)|_A = \delta(\Delta)(f|_A)$ が成り立つ。

これより (i) は容易である。ii) は $\mathcal{R} = C^\infty \circ \mathcal{R} \circ C$ より $\delta \phi_s$ を求める事に帰着する。 $\delta \phi_s$ は (5.1) を用いれば容易に計算される。

iii) は $\operatorname{Re}(s \pm iv) > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (cht)^{-s} e^{-ivt} dt = \Gamma((s+iv)/2) \Gamma((s-iv)/2) 2^{s-1} \Gamma(s)^{-1}$$

が成り立つ事及び $\hat{f}_s(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{R} f_s)(t) e^{-ivt} dt$ に注意すれば容易。

(注意) この関数 f_s は 対称空間上の調和解析に於いて重要な役割を果たす関数である (cf. [1], [6])。尚 f_s は $\operatorname{Re}(s) > \rho$ のとき 対称空間上のシュワルツ空間 $\mathcal{S}^1(G/K)$ に属する事を注意しておく。

$N \geq [d/2] + 1$ (整数), $\varepsilon > 0$ とし $D_\varepsilon = \{v \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im}(v)| < \rho + \varepsilon\}$ とおく。 $A^{N,\varepsilon} = \{h: D_\varepsilon \text{ 上正則}, h(-v) = \bar{h}(v), \exists M > 0 \quad |h(v)| \leq M(1+|v|)^{N-\varepsilon}\}$ とおく。次の命題はセルバーク [8] の拡張である。

命題 5.2. $h \in A^{N,\varepsilon}$ に対し その逆フーリエ変換 f が存在して f は $(N - [d/2] - 1)$ 階連続微分可能 (即ち $f \in C^{N-[d/2]-1}(G/K)$) で、

$$|f^{(j)}(at)| \leq C_j (cht)^{-(2\rho + \varepsilon/2 + j)} \quad (0 \leq j \leq N - [d/2] - 1)$$

を満たす。

証明の概略. $F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) e^{ivt} dv$ とするとき, $F \in C^{N+1}(\mathbb{R})_e$ かつ $|F^{(k)}(t)| \leq M_k (cht)^{-(\rho + \varepsilon/2)} \quad (0 \leq k \leq N+1)$ が成り立つ。 $\phi = CF$ と

おける $\phi \in C^{N-1}[1, \infty)$ かつ $|\phi^{(k)}(\omega)| \leq B_k x^{-(p+q_k+k)} \quad (0 \leq k \leq N-1)$ が言える。これを用いて定理 4.1 で与えた $\delta\phi$ の式を各場合に応じて評価すればよい。

最後に局所対称空間のラプラス作用素のスペクトルに関連したあるディリクレ型不等式とその解析接続について述べる。これは Huber [6] の結果の拡張である (cf. [2])。

Γ を G の離散部分群で $\Gamma \backslash G$ はコンパクトとし、更に Γ は G/K に固定点なしに働くものとする。このとき $\Gamma \backslash G/K$ は真断面曲率を持つ局所対称空間と呼ばれる。さて $f_s \ (s \in \mathbb{C})$ を (5.2) で与えられる $C^\infty(G/K)$ の元とし、級数 $\sum_{\gamma \in \Gamma} f_s(x^{-1}\gamma y) \ (x, y \in G)$ を考える。

命題 5.3. (i) $x, y \in G, \operatorname{Re}(s) > \rho$ に対し級数 $\sum_{\gamma \in \Gamma} f_s(x^{-1}\gamma y)$ は広義一様絶対収束する。以下その和を $K(s; x, y)$ と書く。

(ii) $K(s; x, y)$ は $\operatorname{Re}(s) > \rho$ で正則かつ $(x, y) \in G \times G$ に対し C^∞ -関数で

$$K(s; \gamma_1 x \gamma_2, \gamma_2 y \gamma_2) = K(s; x, y) \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in K)$$

を満足し、従って $\Gamma \backslash G/K \times \Gamma \backslash G/K$ 上の C^∞ -関数とみなせる。

この命題の証明には次の2つの補題が用いられる。

補題 5.4. $r > 0, x, y \in G$ に対し Γ の部分集合 $\Gamma(r; x, y) \in \Gamma(r; x, y) = \{\gamma \in \Gamma; d(\bar{x}, \gamma \bar{y}) \leq r\}$ で定め、その元の個数を $N(r; x, y)$ で表わす。このとき r, x, y に依らず定数 $C_0 > 0$ が存在して、

$$N(r; x, y) \leq C_0 (\operatorname{ch} r)^{2\rho}.$$

証明. $r_0 = 2^{-1} \inf \{ d(\bar{x}, \gamma \bar{x}) : x \in G, \gamma \in \Gamma \setminus \{e\} \}$ とする. $r_0 > 0$ が成立. r_0 は $\Gamma \backslash G/K$ の平射半径と呼ばれる. r_0 の定義より $\gamma \in G$ を任意に固定すると球の族 $\{B_{r_0}(\gamma \bar{y}) : \gamma \in \Gamma\}$ は互いに交りをもたない. $\gamma \in \Gamma(r: x, y)$ ならば $B_{r_0}(\gamma \bar{y}) \subset B_{r+r_0}(\bar{x})$ なるから $\sum_{\gamma \in \Gamma(r: x, y)} \text{vol}(B_{r_0}(\gamma \bar{y})) \leq \text{vol}(B_{r+r_0}(\bar{x}))$ が成立. 所て $t > 0$ $z \in G$ に対し, $b_0 > 0$ がそれと無関係に存在して, $\text{vol}(B_t(\bar{z})) = \text{vol}(B_t(\bar{e})) \leq b_0 (\text{ch } t)^{2p}$ とある事に注意すれば上の不等式より $N(r: x, y) \text{vol}(B_{r_0}(\bar{e})) \leq b_0 (\text{ch}(r+r_0))^{2p}$ とあり従って $C_0 > 0$ が存在して $N(r: x, y) \leq C_0 (\text{ch } r)^{2p}$ が言える.

補題 5.5. $x, y \in G, 0 \leq r_1 \leq r_2$ とする. $\sigma > p$ ならば

$$\sum_{\gamma \in \Gamma, r_1 \leq d(\bar{x}, \gamma \bar{y}) \leq r_2} f_\sigma(x^{-1} \gamma y) < C_0 (1 + 2p/(\sigma-p)) (\text{ch } r_1)^{-(\sigma-p)}$$

が成立. 従って特に $r_1 = 0, r_2 = r$ とすれば次が成立:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(r: x, y)} f_\sigma(x^{-1} \gamma y) < C_0 (1 + 2p/(\sigma-p)).$$

証明. $N(r: x, y)$ の定義より

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma: r_1 \leq d(\bar{x}, \gamma \bar{y}) \leq r_2} f_\sigma(x^{-1} \gamma y) &= N(r_1: x, y) (\text{ch } r_1)^{-(\sigma+p)} + \int_{r_1}^{r_2} (\text{ch } \tau)^{-(\sigma+p)} dN(\tau: x, y) \\ &= N(r_2: x, y) (\text{ch } r_2)^{-(\sigma+p)} + (\sigma+p) \int_{r_1}^{r_2} N(\tau: x, y) (\text{ch } \tau)^{-(\sigma+p)-1} \text{sh } \tau d\tau. \end{aligned}$$

これに補題 5.4 の評価を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma: r_1 \leq d(\bar{x}, \gamma \bar{y}) \leq r_2} f_\sigma(x^{-1} \gamma y) &\leq C_0 (\text{ch } r_2)^{-(\sigma-p)} + C_0 (\sigma+p) \int_{r_1}^{r_2} (\text{ch } \tau)^{-(\sigma-p)-1} \text{sh } \tau d\tau \\ &= C_0 (1 + \frac{2p}{\sigma-p}) (\text{ch } r_1)^{-(\sigma-p)} - C_0 \frac{2p}{\sigma-p} (\text{ch } r_2)^{-(\sigma-p)} < C_0 (1 + \frac{2p}{\sigma-p}) (\text{ch } r_1)^{-(\sigma-p)}. \end{aligned}$$

命題 5.3 の証明. $x_0 \in G, r > 0$ を任意に与え固定する. $\bar{y} \in B_r(\bar{x}_0), \sigma = \text{Re}(s) > p$ に対し $\sum_{\gamma \in \Gamma} f_\sigma(x^{-1} \gamma y)$ が収束する事を示せば

よ。先づ次は明かす。(1) $\forall \varepsilon > 0$ に對し $\exists r_\varepsilon > 0$ が存在し, $C_0(1 + \frac{2p}{\sigma-p})(dr_\varepsilon)^{-(\sigma-p)}$
 $< \varepsilon$ とできる。 Γ は離散的だから Γ の元は番号を $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ と $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ とする。 Γ は G/K に真性不連続に作用するから
 (ii) $\forall \varepsilon > 0$ に對し $\exists$ 番号 j_0 があつて $j > j_0$ ならば $\gamma_j \cdot B_r(\bar{x}_0) \cap B_{r+\varepsilon}(\bar{x}_0) = \emptyset$.
 $\bar{x}, \bar{y} \in B_r(\bar{x}_0)$ とすると (i) $d(\bar{x}, \gamma_j \bar{y}) > r_\varepsilon$ ($j > j_0$) が成り立つ。

(ii) より $n \geq m > j_0$ とすると補題 5.5 を用いて

$$\sum_{j=m}^n f_\sigma(x^{-1}\gamma_j y) \leq \sum_{\gamma \in \Gamma, r_\varepsilon < d(\bar{x}, \gamma \bar{y}) \leq 2r_\varepsilon} f_\sigma(x^{-1}\gamma y) < C_0(1 + \frac{2p}{\sigma-p})(dr_\varepsilon)^{-(\sigma-p)} < \varepsilon$$

を得る。これより $\sum_{\gamma \in \Gamma} f_\sigma(x^{-1}\gamma y)$ が収束する事かわかる。他の主張の証明は省略する。

G/K 上のラプラス作用素 Δ は G -不変だから $\Gamma \backslash G/K$ 上のラ
 プラス作用素 Δ_Γ が自然に誘導する。このとき $-\Delta_\Gamma$ は $L^2(\Gamma \backslash G/K)$
 上の正値自己共役作用素に拡張され, $\Gamma \backslash G/K$ がコンパクトだから
 その固有値は離散的である。今それら $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$
 とし対応する固有空間を $L^2(\Gamma \backslash G/K)^{\lambda_n}$ ($n \geq 0$), その次元 $\in \mathbb{N}_n$ と
 書く事にする。各固有空間 $L^2(\Gamma \backslash G/K)^{\lambda_n}$ の正規直交基底 $\{f_{\lambda_n, k} : 1 \leq k \leq m_n\}$ としよう。このとき (1) 各 $f_{\lambda_n, k}$ は左 Γ -不変, 右 K -不変な
 G 上の C^∞ -函数 (2) $\Delta f_{\lambda_n, k} + \lambda_n f_{\lambda_n, k} = 0$ ($1 \leq k \leq m_n$) である。特に
 $m_0 = 1$, $f_{\lambda_0, 1} = \text{vol}(\Gamma \backslash G/K)^{-1/2}$ (定数函数) である。

$-\Delta_\Gamma$ のスペクトル分解は表現論の立場からは次のように解釈
 できる。 $(R_\Gamma, L^2(\Gamma \backslash G))$ は G の $L^2(\Gamma \backslash G)$ への右正則表現, $\hat{G} \in G$ の既約
 ユニタリ表現の同値類の集合とすると $L^2(\Gamma \backslash G)$ は $L^2(\Gamma \backslash G) =$

$\bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m(\pi) H_\pi$ と既約分解される。ここには H_π は $L^2(\Gamma \backslash G)$ の 閉不変部分空間で $R_\Gamma|_{H_\pi}$ は π と同値であり重複度 $m(\pi)$ は有限である。

$\hat{G}^K = \{(\pi, V_\pi) \in \hat{G} : V_\pi^K \neq (0)\}$ とすると $(\pi, V_\pi) \in \hat{G}^K$ に対し $\dim V_\pi^K = 1$ が知られてゐる (但し $V_\pi^K = \{v \in V_\pi : \pi(k)v = v \ \forall k \in K\}$)。従つて $L^2(\Gamma \backslash G/K) =$

$$L^2(\Gamma \backslash G)^K = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}^K} m(\pi) H_\pi^K \text{ が成立つ。}$$

Δ_Γ は H_π^K 上で不変とし、 $\dim H_\pi^K = 1$ よりそれは Δ_Γ の固有空間でその固有値は $\pi(\Delta)$ に等しい。従つて

G は実数 1 から $\hat{G}^K = \{\pi_{iv} : 0 \leq iv \leq \rho \text{ または } iv \in \mathbb{R}^+\}$ である。

ここには π_{iv} は G のクラス 1 主系列表現と呼ばれるものの

であるが重要な事は $\pi_{iv}(\Delta) = -(v^2 + \rho^2)$ が成立つ事である。さて

$-\Delta_\Gamma$ の各固有値 λ_n に対し $\nu_n \in \mathbb{C}$ を

$$\nu_n = \sqrt{\lambda_n - \rho^2} \quad (\lambda_n > \rho^2 \text{ のとき}), \quad -i\sqrt{\rho^2 - \lambda_n} \quad (\rho^2 \geq \lambda_n \geq 0 \text{ のとき})$$

で定める。ここから $0 \leq \lambda_n \leq \rho^2 \Leftrightarrow 0 \leq i\nu_n \leq \rho$, $\lambda_n > \rho^2 \Leftrightarrow i\nu_n \in \mathbb{R}^+$

に注意する。更に上には述べた事から

$$L^2(\Gamma \backslash G/K)^{\lambda_n} = m(\pi_{i\nu_n}) H_{\pi_{i\nu_n}}^K, \quad m_n = m(\pi_{i\nu_n}) \quad (n \geq 0)$$

が成立つ事が分る。以下 $x, y \in G$ に対し

$$K_n(x, y) = \sum_{k=1}^{m_n} f_{\lambda_n, k}(x) f_{\lambda_n, k}(y) \quad (n \geq 0)$$

と置く。次はセリヒ - 7 の "Pre-trace formula" の π の形であるが:

定理 5.6. $\operatorname{Re}(s) > \rho$ とする。 $K(s; x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f_s(x^{-1}\gamma y)$ は次の

形に表わせる: 但し $h(s, \nu) = \Gamma((s+i\nu)/2) \Gamma((s-i\nu)/2)$ とおくと,

$$\begin{aligned} K(s; x, y) &= \sum_{n \geq 0} \hat{f}_s(\nu_n) K_n(x, y) \\ &= \pi^{d/2} \Gamma((s+\rho)/2)^{-1} \Gamma((s+\rho/2+1)/2)^{-1} \sum_{n \geq 0} h(s, \nu_n) K_n(x, y), \end{aligned}$$

証明. $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \rho$ とする. $|K(s; x, y)| \leq K(\sigma; x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f_{\sigma}(x^{-1}\gamma y)$ であるから補題 5.5 より $\sum_{\gamma \in \Gamma} f_{\sigma}(x^{-1}\gamma y) < C_0(1 + \frac{2\rho}{\sigma - \rho})$ に注意すると $\int_{\Gamma \backslash G/K} |K(s; x, y)|^2 dy < C_0^2 (1 + 2\rho/(\sigma - \rho))^2 \operatorname{vol}(\Gamma \backslash G/K) < \infty$. 故に $\operatorname{Re}(s) > \rho$ のとき $K(s; x, y)$ は y に對し $L^2(\Gamma \backslash G/K)$ に属す. x に對し $z \in \Gamma$ と同様. $\{f_{\lambda_n, k} : 1 \leq k \leq m_n, n \geq 0\}$ は $L^2(\Gamma \backslash G/K)$ の正規基底であるから

$$a_{\lambda_n, k}(s; x) = \int_{\Gamma \backslash G/K} K(s; x, y) f_{\lambda_n, k}(y) dy$$

と表わす.

$$K(s; x, y) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=1}^{m_n} a_{\lambda_n, k}(s; x) f_{\lambda_n, k}(y)$$

が成り立つ. 更に

$$\begin{aligned} a_{\lambda_n, k}(s; x) &= \int_{\Gamma \backslash G/K} \sum_{\gamma \in \Gamma} f_s(x^{-1}\gamma y) f_{\lambda_n, k}(y) dy = \int_G f_s(x^{-1}y) f_{\lambda_n, k}(y) dy \\ &= \int_G f_s(y) (R_{\Gamma}(y) f_{\lambda_n, k})(x) dy =: R_{\Gamma}(f_s) f_{\lambda_n, k}(x). \end{aligned}$$

$f_{\lambda_n, k} \in H_{\pi_{\lambda_n}}^K$ より, $a_{\lambda_n, k}(s; x) \in H_{\pi_{\lambda_n}}^K$ である. 更に $a_{\lambda_n, k}(s; x)$ は K -不変であるから $a_{\lambda_n, k}(s; x) \in H_{\pi_{\lambda_n}}^K$ であり, $\dim H_{\pi_{\lambda_n}}^K = 1$ より

$a_{\lambda_n, k}(s; x) = a_{\lambda_n, k}(s) f_{\lambda_n, k}(x)$ と書ける. 更に

$$a_{\lambda_n, k}(s) = (a_{\lambda_n, k}(s; \cdot), f_{\lambda_n, k})_{L^2(\Gamma \backslash G)} = (R_{\Gamma}(f_s) f_{\lambda_n, k}, f_{\lambda_n, k})_{L^2(\Gamma \backslash G)}$$

であり更に $R_{\Gamma}|_{H_{\pi_{\lambda_n}}^K} \cong \pi_{\lambda_n}$, $f_{\lambda_n, k} \in H_{\pi_{\lambda_n}}^K$ に注意すれば $a_{\lambda_n, k}(s)$

$$= \int_G f_s(y) \varphi_{\lambda_n}(y) dy = \hat{f}_s(\nu_n) \quad (1 \leq k \leq m_n) \text{ を得る. 以上より}$$

$$K(s; x, y) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=1}^{m_n} \hat{f}_s(\nu_n) f_{\lambda_n, k}(x) f_{\lambda_n, k}(y) = \sum_{n \geq 0} \hat{f}_s(\nu_n) K_n(x, y).$$

以下では定理 5.6 の右辺の級数 $\sum_{n \geq 0} \hat{f}_s(\nu_n) K_n(x, y)$ が全 s -平面に有理型関数として解析接続できる事を示す, $h(s, \nu_0) = \Gamma(s + \rho/2)$

$\times \Gamma((s+p)/2)$ にかゝる級数 $\sum_{n \geq 1} h(s, \nu_n) K_n(x, y)$ を考察すれば十分である。

定理 5.7. (i) 級数 $\sum_{n \geq 1} h(s, \nu_n) K_n(x, y)$ は $\operatorname{Re}(s) > p$ で広義一様絶対収束し、更に全平面に有理型に解析接続される。又その極は $P = \{i\nu_n - 2j, -i\nu_n - 2k; n \geq 1, j, k \geq 0\}$ に在る。

ii) 級数 $\sum_{n \geq 1} m_n h(s, \nu_n)$ は全 s -平面に有理型に解析接続され、その極は P に在る。

この定理は次の 3 つの補題のせきにより得られる。

補題 5.8. $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ で $p+2 \leq \sigma \leq \sigma_0$ を満たすとき $C_1 > 0$ が存在して

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{m_n} |h(s, \nu_n) f_{\lambda_n, k}(x)|^2 \leq C_1 e(\sigma_0)^2$$

が成立つ。ここで $e(\sigma_0) = \Gamma((\sigma_0+p)/2) \Gamma((\sigma_0+p/2+1)/2)$ とおく。

証明. $K(s; x, y) = \pi^{d/2} \Gamma((s+p)/2)^{-1} \Gamma((s+p/2+1)/2)^{-1} \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{m_n} h(s, \nu_n) f_{\lambda_n, k}(x) f_{\lambda_n, k}(y)$ は $\operatorname{Re}(s) > p$ のとき x, y に因り $L^2(\Gamma \backslash G/K)$ に属してゐる。Bessel の不等式より

$$\pi^d |\Gamma((s+p)/2) \Gamma((s+p/2+1)/2)|^{-2} \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{m_n} |h(s, \nu_n) f_{\lambda_n, k}(x)|^2 \leq \int_{\Gamma \backslash G/K} |K(s; x, y)|^2 dy.$$

併し補題 5.5 より $|K(s; x, y)| \leq C_0 (1 + \frac{2p}{\sigma-p})$ である。これを同様に

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{m_n} |h(s, \nu_n) f_{\lambda_n, k}(x)|^2 \leq \pi^{-d} |\Gamma((s+p)/2) \Gamma((s+p/2+1)/2)|^2 C_0^2 (1 + \frac{2p}{\sigma-p})^2 \operatorname{vol}(\Gamma \backslash G/K)$$

$\sigma = \operatorname{Re}(s) \geq p+2$ より Γ -肉数は単調増加、従つて $|\Gamma((s+p)/2) \Gamma((s+p/2+1)/2)|^2 \leq e(\sigma_0)^2$ //

さて Minakshisundaram - Pleijel [7] にあるのは $\sum_{n \geq 1} (\sum_{k=1}^{m_n} f_{\lambda_n, k}^2(x)) \lambda_n^{-s}$

は $\sum_{n \geq 1} m_n \lambda_n^{-s}$ は $\operatorname{Re}(s) > d/2$ で絶対一様収束する事を知ることが

出来る。以下 $N \in \mathbb{N}$ $N > \max\{(2+\sqrt{2})[d/4], p+2\}$ である正整数とし

$Q_N = \{s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}; |\sigma| \leq N, |\tau| \leq N\}$ とおく。

補題 5.9. $s \in \mathbb{Q}_N$, $\nu \geq 2N$ ならば, N にのみ依る定数 $A_N > 0$ が存在して次が成立つ:

$$|h(s, \nu)| \leq A_N \nu^{-2([d/4]+1)} |h(s+2N, \nu)|.$$

証明. 積数の都合で書く.

補題 5.10. $N > \text{Max} \{ (2+\sqrt{2})[d/4], p+2 \}$ なる整数とし, 更に $n_0 = \text{Max} \{ n; \nu_n < 2N \}$ とおく.

(i) 各 $(s, x, y) \in \mathbb{Q}_N \times G \times G$, 各 $l \geq m > n_0$ なる整数に対し, $C_2 > 0$ が存在して

$$\sum_{n=m}^l \sum_{k=1}^{m_n} |h(s, \nu_n) f_{\lambda_n, k}(x) f_{\lambda_n, k}(y)| \leq C_2 A_N e(3N) \left\{ \sum_{n=m}^l K_n(y, y) \nu_n^{-4([d/4]+1)} \right\}^{1/2}.$$

(ii) 各 $s \in \mathbb{Q}_N$, 各 $l \geq m > n_0$ なる整数に対し $C_3 > 0$ が存在して,

$$\sum_{n=m}^l |m_n h(s, \nu_n)| \leq C_3 A_N e(3N) \left(\sum_{n=m}^l m_n \nu_n^{-4([d/4]+1)} \right)^{1/2}.$$

証明. $l \geq m > n_0$ 及び $l \geq n \geq m$ なる n に対し $\nu_n \geq 2N$ に

注意すると前補題より

$$\sum_{n=m}^l \sum_{k=1}^{m_n} |h(s, \nu_n) f_{\lambda_n, k}(x) f_{\lambda_n, k}(y)| \leq A_N \sum_{n=m}^l \sum_{k=1}^{m_n} |h(s+2N, \nu_n) f_{\lambda_n, k}(x)| |f_{\lambda_n, k}(y) \nu_n^{-2([d/4]+1)}|$$

これに Cauchy-Schwarz の不等式を用いて

$$\leq A_N \left\{ \sum_{n=m}^l \sum_{k=1}^{m_n} |h(s+2N, \nu_n) f_{\lambda_n, k}(x)|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=m}^l \sum_{k=1}^{m_n} f_{\lambda_n, k}^2(y) \nu_n^{-4([d/4]+1)} \right\}^{1/2}.$$

$s \in \mathbb{Q}_N$ より, $p+2 \leq N \leq \text{Re}(s+2N) \leq 3N$ に注意すれば補題 5.8

が使える. 上式 $\leq C_1^{1/2} A_N e(3N) \left\{ \sum_{n=m}^l K_n(y, y) \nu_n^{-4([d/4]+1)} \right\}^{1/2}.$

(i) は (ii) で $x=y$ とおいて両辺を $\backslash G/K$ 上で積分する事により得らる.

系 5.11. 補題 5.10 と同じ仮定のもとに

$\sum_{n \geq n_0} h(s, \nu_n) K_n(x, y)$ と $\sum_{n \geq n_0} m_n h(s, \nu_n)$ は広義一様絶対収束する。

証明. 前に注意した Minakshisundaram-Plancherel の結果より従う。

以上の結果を用いて定理 5.7 を示せる。

定理 5.7 の証明. 先づ $h(s, \nu) = \Gamma((s+i\nu)/2) \Gamma((s-i\nu)/2)$ は s の有理型関数でその極は $s = i\nu - 2j$, $i\nu + 2k$ ($j=0, 1, 2, \dots$, $k=0, 1, 2, \dots$) にある事に注意する。 N, Q_N, n_0 は上述の N に選ぶと上の式より $\sum_{n \geq n_0} h(s, \nu_n) K_n(x, y)$ は $s \in Q_N$ で正則であり, 一方 $\sum_{n_0 \leq n \leq N} h(s, \nu_n) \times K_n(x, y)$ は $s \in Q_N$ で高々有限個の極をもつ有理型関数である。従って $\sum_{n \geq 1} h(s, \nu_n) K_n(x, y)$ は Q_N で有理型でその極は $h(s, \nu_n)$ ($1 \leq n \leq n_0$) の Q_N 内の極に一致する。所で N はいくらでも大きくとれるから h より $\sum_{n \geq 1} h(s, \nu_n) K_n(x, y)$ は全 s -平面で有理型でありその極は P に在ることになる。 $\sum_{n \geq 1} m_n h(s, \nu_n)$ についても同様である。 //

命題 5.2 と 5.3 より $h \in A^{N, E}$ の球フーリエ変換 f とすれば $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(x^{-1} \gamma y)$ は広義一様絶対収束し更に定理 5.6 の証明と同様にして

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(x^{-1} \gamma y) = \sum_{n \geq 0} h(\nu_n) K_n(x, y)$$

が成立する事に注意しておく。

なお筆者は研究集会に於いて局所対称空間における移り変分布に関する評語を与えられた。後に浦川氏より Günther の仕

事[3]を教えて頂いた。筆者にとって残念な事に彼の結果のえがより秀れたい事を報告しておく。ここで改めて蒲川氏に感謝する。参考文献は書き挙げれば際限ないので文中に引用したものに限り事を許して頂きたい。

- [1] L. Berard-Bergéry, *Seminaire Bourbaki* 24 1971-72 Exp. 406.
- [2] R. Gangolli, *J. Differential Geometry* 12 (1977).
- [3] P. Günther, *Math. Nachr.* 94 (1980).
- [4] Harish-Chandra, *Amer. J. Math.* 80 (1958).
- [5] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*.
- [6] H. Huber, *Math. Ann.* 139 (1959).
- [7] Minakushisundaram-Pleijel, *Canad. J. Math.* 1 (1949).
- [8] A. Selberg, *J. Indian Math. Soc.* 20 (1956).
- [9] R. Takahashi, *Bull. Soc. Math. France* 91 (1963).