

## Stability and Instability of Standing Waves for Nonlinear Schrödinger Equations with Harmonic Potential

東北大理 福泉麗佳 (Reika Fukuizumi)

Mathematical Institute, Tohoku Univ.

### 1. 序

調和ポテンシャル項を伴った非線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u = -\Delta u + |x|^2 u - |u|^{p-1} u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} \quad (\text{NLS})$$

の定在波 (standing wave) 解  $e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$  のリヤプノフの意味での安定性について考える. (NLS) において  $u = u(t, x)$  は複素数値の未知関数,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 < p < \infty$  で,  $n \geq 3$  のときは, さらにソボレフ空間  $H^1(\mathbb{R}^n)$  における劣臨界条件  $p < 1 + 4/(n-2)$  を仮定する. 定在波  $e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$  において,  $\omega \in \mathbb{R}$  は実のパラメータであり,  $e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$  が (NLS) の解になるためには,  $\phi_\omega(x)$  は定常問題

$$-\Delta \phi + \omega \phi + |x|^2 \phi - |\phi|^{p-1} \phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{SP})$$

の解でなければならないが, 以下では,  $\phi_\omega(x)$  は,  $\omega$  を 1 つ固定したとき, (SP) の非自明解のうち, 作用  $S_\omega$  を最小にする解 (基底状態解) であるとする. 基底状態解に対応する定在波解を基底定在波解と呼ぶことにする. 調和ポテンシャル項を伴わない場合, (NLS) は非線形光学やプラズマ物理などのモデル方程式として現れ, 基底定在波解のリヤプノフ安定性については 20 年程前に調べられて完全に分かっている ([1, 3, 22] 参照). その後, これらの結果は, 非線形クライン・ゴールドン方程式などを含む抽象的なハミルトン系に対する孤立波解の安定性に関する一般論として, Grillakis, Shatah and Strauss [7, 8] にまとめられている. 本報告で扱う調和ポテンシャル項を伴った場合は, 磁気トラップされたボーズ・アインシュタイン凝縮のモデル方程式として,  $n = p = 3$  の場合の (NLS) が現われる (例えば [21] 参照). 基底定在波解のリヤプノフ安定性はこれまで [19, 23] など考察されている. なお, 調和ポテンシャルでないポテンシャルの項がついた場合に関しては [6, 16] など研究されている. ポテンシャル項を伴った

場合, Grillakis, Shatah and Strauss [7, 8] による一般論における安定性及び不安定性に関する十分条件を直接, 具体的に確かめるのが困難である場合が多く, 様々な工夫が必要になることに注意する. ここでは, そのような工夫の一端を紹介したい.

## 2. 問題の設定

今の場合, エネルギー空間として

$$\Sigma := \{v \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) : \|v\|_{\Sigma} < \infty\}, \quad \|v\|_{\Sigma}^2 = (v, v)_{\Sigma},$$

$$(v, w)_{\Sigma} := \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \nabla v(x) \cdot \overline{\nabla w(x)} + |x|^2 v(x) \overline{w(x)} \right\} dx$$

と定義し, 実ヒルベルト空間  $\Sigma$  上で (NLS) を考える. ソボレフ空間  $H^1(\mathbb{R}^n)$  における劣臨界条件  $p < 1 + 4/(n-2)$  よりエネルギー汎関数

$$E(v) := \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|xv\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

は  $\Sigma$  上定義され, この空間で (NLS) を考えることは自然である.

(NLS) に対する初期値問題は  $\Sigma$  において時間局所的に適切であり, 解が存在する限り, エネルギーと粒子数の保存則が成り立つことが知られている.

**命題 1** (Cazenave [2] の 9.2 節, Oh [17]) For any  $u_0 \in \Sigma$ , there exist  $T = T(\|u_0\|_{\Sigma}) > 0$  and a unique solution  $u(t) \in C([0, T], \Sigma)$  of (NLS) with  $u(0) = u_0$  satisfying

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad \|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2, \quad t \in [0, T].$$

In addition, the virial identity

$$\frac{d^2}{dt^2} \|xu(t)\|_{L^2}^2 = 8P(u(t)) \tag{VI}$$

holds for  $t \in [0, T)$ , where

$$P(v) := \|\nabla v\|_{L^2}^2 - \|xv\|_{L^2}^2 - \frac{n(p-1)}{2(p+1)} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

次に, (SP) の基底状態解を定義するために, 作用と呼ばれるエネルギー空間  $\Sigma$  上の汎関数  $S_{\omega}$  及び別の汎関数  $I_{\omega}$  を

$$S_{\omega}(v) := E(v) + \frac{\omega}{2} \|v\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2} \|v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|xv\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

$$I_{\omega}(v) := \langle S'_{\omega}(v), v \rangle = \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2 + \|xv\|_{L^2}^2 - \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

と定義する. 定常問題 (SP) は作用  $S_\omega$  のオイラー・ラグランジュ方程式  $S'_\omega(\phi) = 0$  と同値であることに注意する.

**定義** 制約条件付き最小化問題

$$\inf\{S_\omega(v) : v \in \Sigma \setminus \{0\}, I_\omega(v) = 0\}$$

の最小化元全体の集合を  $\mathcal{G}_\omega$  で表し,  $\mathcal{G}_\omega$  の元を (SP) の基底状態解と呼ぶ.

任意の  $\phi_\omega(x) \in \mathcal{G}_\omega$  に対して, ラグランジュ乗数  $\eta \in \mathbb{R}$  が存在して  $S'_\omega(\phi_\omega) + \eta I'_\omega(\phi_\omega) = 0$  が成り立つ. このとき,  $I_\omega(\phi_\omega) = \langle S'_\omega(\phi_\omega), \phi_\omega \rangle = 0$  かつ  $\langle I'_\omega(\phi_\omega), \phi_\omega \rangle \neq 0$  より  $\eta = 0$  を得る. よって,  $S'_\omega(\phi_\omega) = 0$  が成り立つ. さらに,  $S'_\omega(v) = 0$  をみたす任意の  $v \in \Sigma \setminus \{0\}$  に対して  $I_\omega(v) = 0$  が成り立つので,  $\mathcal{G}_\omega$  の定義により,  $S_\omega(\phi_\omega) \leq S_\omega(v)$  が成り立つ. すなわち,  $\phi_\omega(x) \in \mathcal{G}_\omega$  は,  $\omega$  を 1 つ固定したとき, (SP) の非自明解のうち, 作用  $S_\omega$  を最小にする解である.

(SP) の基底状態解の存在は, 埋め込み  $\Sigma \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  がコンパクトであることから, 標準的な変分法により簡単に示すことができる.

**命題 2** Let  $\lambda_1 := \inf\{\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|xv\|_{L^2}^2 : \|v\|_{L^2}^2 = 1, v \in \Sigma\}$ . Then,  $\mathcal{G}_\omega$  is not empty for any  $\omega \in (-\lambda_1, \infty)$ .

ここで, ポテンシャル項を伴わない場合,  $\omega \leq 0$  のときは基底状態解が存在しないことに注意する. なお,  $\lambda_1 = n$  であり,  $\lambda_1$  に対応する固有関数は  $\Phi(x) = e^{-|x|^2/2}$  であることが知られている.

最後に, 安定性の定義を与えておく.

**定義** Let  $\Omega$  be a subset of  $\Sigma$ . We say that  $\Omega$  is stable for (NLS) if for any  $\varepsilon > 0$  there exists  $\delta > 0$  such that if  $u_0 \in \Sigma$  satisfies  $\inf\{\|u_0 - w\|_\Sigma : w \in \Omega\} < \delta$ , then the solution  $u(t)$  of (NLS) with  $u(0) = u_0$  exists for all  $t \geq 0$  and satisfies

$$\sup_{t \geq 0} \inf\{\|u(t) - w\|_\Sigma : w \in \Omega\} < \varepsilon.$$

Otherwise,  $\Omega$  is said to be unstable. Moreover, for  $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ , we shall say that the standing wave  $e^{i\omega t}\phi_\omega$  is stable if  $\mathcal{G}_\omega$  is stable, and that  $e^{i\omega t}\phi_\omega$  is unstable if  $\mathcal{O}_\omega$  is

unstable, where  $\mathcal{O}_\omega = \{e^{i\theta}\phi_\omega : \theta \in \mathbb{R}\}$ .

一般に  $\mathcal{O}_\omega \subset \mathcal{G}_\omega$  であるが逆の包含関係はわからない.  $n \geq 2$  で  $\omega > -\lambda_1$  のときには (SP) の解の一意性が証明されている ([9], [10], [12] を参照). したがって  $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{O}_\omega$  が成り立つので  $\Omega \equiv \mathcal{O}_\omega$  の安定性として定義できる. しかし  $n = 1$  のときは  $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{O}_\omega$  が成立するのか未だわからないので, このような安定性と不安定性との間にギャップが生じてしまうような定義になる.

### 3. 既知の結果と予想

まずポテンシャルを伴わない場合に対する既知の結果について簡単に振り返る. すなわち,

$$i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} \quad (\text{NLS0})$$

及び対応する定常問題

$$-\Delta \phi + \omega \phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{SP0})$$

について考える. ここで,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 < p < \infty$  で,  $n \geq 3$  のときはさらに  $p < 1 + 4/(n-2)$  を仮定する. このとき, 任意の  $\omega > 0$  に対して (SP0) のソボレフ空間  $H^1(\mathbb{R}^n)$  に属する正值球対称解  $\psi_\omega(x)$  が一意的に存在する (一意性に関しては [11] を参照). よって, 任意の  $\omega > 0$  に対して, (SP0) の基底状態解全体の集合  $\mathcal{G}_\omega^0$  は

$$\mathcal{G}_\omega^0 = \{e^{i\theta}\psi_\omega(\cdot + y) : \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n\}$$

で与えられる. つまりポテンシャル項を伴わない場合はすべての  $n \in \mathbb{N}$  と  $\omega > 0$  に対して  $\mathcal{G}_\omega^0 = \mathcal{O}_\omega^0 = \{e^{i\theta}\psi_\omega(\cdot + y) : \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n\}$  なのである (前節参照). さらに,  $\mathcal{G}_\omega^0$  は  $p < 1 + 4/n$  のとき任意の  $\omega > 0$  に対して (NLS0) に対して安定 ([3] を参照) であり,  $p \geq 1 + 4/n$  のとき任意の  $\omega > 0$  に対して不安定である ( $p > 1 + 4/n$  の場合は [1],  $p = 1 + 4/n$  の場合は [22] を参照). これから,  $p = 1 + 4/n$  は (NLS0) の基底定在波解の安定性・不安定性に関する臨界冪であることが分かる. Grillakis, Shatah and Strauss [7, 8] による一般論では, 安定性及び不安定性に関する十分条件は  $\omega > 0$  の関数  $d(\omega) = S_\omega(\psi_\omega)$  を用いて与えられる. すなわち,  $d''(\omega_1) > 0$  であれば  $\mathcal{G}_{\omega_1}$  は安

定であり, 逆に,  $d''(\omega_1) < 0$  であれば  $\mathcal{G}_{\omega_1}$  は不安定である. (NLS0) はスケール変換  $\lambda^{2/(p-1)}u(\lambda x, \lambda^2 t)$ ,  $\lambda > 0$ , に関して不変であるから,  $\psi_\omega(x) = \omega^{1/(p-1)}\psi_1(\sqrt{\omega}x)$  が成り立ち,  $d(\omega) = \omega^{2/(p-1)-n/2+1}d(1)$  が成り立つ. これから,  $\omega > 0$  に依らず,  $p = 1 + 4/n$  が臨界冪になることが分かる. これに対して, ポテンシャル項を伴う場合は, このようなスケール不変性は存在しないので, 実際にどのように  $d''(\omega)$  を計算すればよいか, という問題が生じる. 最後に,  $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ ,  $d(\omega) = S_\omega(\phi_\omega) = E(\phi_\omega) + (\omega/2)\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$  に対して

$$d'(\omega) = \langle S'_\omega(\phi_\omega), \partial_\omega \phi_\omega \rangle + \frac{1}{2}\|\phi_\omega\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$$

だから,  $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$  の増減を調べればよいことに注意する.

ポテンシャルを伴った場合に,  $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$  の増減を具体的に調べるのは一般には困難であるが, Rose and Weinstein [19] は  $n = 1$  で線形作用素  $-\Delta + V(x)$  が固有値をもつような, 有界かつ  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0$  を満たすポテンシャル  $V(x)$  を伴った場合に対して  $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$  を数値計算した. 彼らの数値計算結果から, 調和ポテンシャルを伴った場合に対して次が予想される.

(予想 1)  $p$  は任意とする.  $-\lambda_1$  に十分近い  $\omega > -\lambda_1$  に対して, (NLS) の基底定在波解  $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$  は安定であろう.

(予想 2)  $p > 1 + 4/n$  のとき, 十分大きい  $\omega$  に対して (NLS) の基底定在波解  $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$  は不安定であろう.

#### 4. 予想に対する主結果

この節では, 前節の予想に関して得られた結果について報告する. 以下では断りなく,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 < p < \infty$  で  $n \geq 3$  のときは  $p < 1 + 4/(n-2)$  を仮定する.

**仮定 (A)** For  $\varepsilon > 0$  there is a family of ground states  $\phi_\omega$  such that  $\omega \mapsto \phi_\omega$  is a  $C^1$  mapping on the interval  $(-\lambda_1, -\lambda_1 + \varepsilon)$ .

**定理 1** ( F. [4] ) Assume (A). There exists a sequence  $\{\omega_k\}$  such that  $\omega_k < 0$ ,  $\omega_k \rightarrow -\lambda_1$  and  $e^{i\omega_k t}\phi_{\omega_k}$  is stable.

$p \geq 3$  という仮定を加えれば, (A) を仮定しなくてもよく, さらに  $\{\omega_k\}$  という列をとらずに  $-\lambda_1$  に十分近いすべての  $\omega$  に対する定在波解の安定性が言える. ポテンシ

ルが  $|x|^2$  でなくても  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$  を満たす  $V(x)$  ならば定理 1 は証明できる. ただし今のところは (NLS) の時間局所適切性やエネルギー  $E$  と粒子数の保存を仮定することになる.

**定理 2** ( F. and Ohta [5] ) Let  $p > 1 + 4/n$  and  $\phi_\omega(x) \in \mathcal{G}_\omega$ . Then there exists  $\omega_* \in (\omega_0, \infty)$  such that the standing wave solution  $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$  of (NLS) is unstable for any  $\omega \in (\omega_*, \infty)$ .

定理 2 は命題 1 や命題 2 の内容を仮定すれば, より一般的なポテンシャル  $V(x)$  に対して証明できる. 以下は定理 2 の不安定性を証明するためだけに必要なポテンシャル  $V(x)$  に対する仮定である.

(V0) There exist real valued functions  $V_1(x)$  and  $V_2(x)$  such that

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x).$$

(V1.1)  $V_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$  and there exist positive constants  $m$  and  $C$  such that

$$0 \leq V_1(x) \leq C(1 + |x|^m) \text{ on } \mathbb{R}^n.$$

(V1.2) For any  $\alpha$  such that  $|\alpha| \leq 2$ , there exists  $C_\alpha > 0$  such that

$$|x^\alpha \partial_x^\alpha V_1(x)| \leq C_\alpha(1 + V_1(x)) \text{ on } \mathbb{R}^n.$$

(V2) There exists  $q$  such that  $q \geq 1$ ,  $q > n/2$  and

$$x^\alpha \partial_x^\alpha V_2(x) \in L^q(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ for } |\alpha| \leq 2.$$

この不安定性の結果では  $V(x)$  に対して下に有界であることや球対称性を仮定しなくてもいいことを強調しておきたい. また [4] では 調和ポテンシャルを伴った場合に,  $\omega > 0$ ,  $p \geq p_0(n) = (n^2 + 4 + 4\sqrt{n^2 + 1})/n^2$  ならば  $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$  は不安定となることが示されている. ここで  $p_0(n) > 1 + 4/n$  であるが, この定理 2 により  $p$  の範囲を  $1 + 4/n$  まで下げることができた.

さて, Grillakis, Shatah and Strauss [7, 8] の一般論に従って  $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$  の増減を直接調べるのは一般には困難であるので, 定理 1 は分岐理論 ([13], [14], [15] などを参照) によって (SP) の解を捉え, 零解から分岐した解の  $L^2$  ノルムの漸化式を用いる.

**命題 3** Put  $\lambda := -\omega$  in (SP). Let  $\Phi(x)$  be the eigenfunction corresponding to  $\lambda_1$ .

Then, (SP) has a family of solutions  $(u(\varepsilon), \lambda(\varepsilon))$  bifurcating from  $(0, \lambda_1)$  for  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  sufficiently small with  $u(\varepsilon) = \varepsilon\Phi + \varepsilon z(\varepsilon)$ , where  $z \in \Sigma$  is a continuous function of  $\varepsilon$ ,  $z(0) = 0$  and  $(z(\varepsilon), \Phi)_\Sigma = 0$ . Moreover, we have

$$\|u(\lambda)\|_{L^2}^2 = \|\Phi\|_{L^{p+1}}^{2(p+1)/(1-p)} (\lambda_1 - \lambda)^{2/(p-1)} + o(|\lambda_1 - \lambda|^{2/(p-1)}). \quad (1)$$

また, 定理 2 を示すために次の不安定性に関する十分条件を用いる.

**命題 4** ( Ohta [18] ) Let  $\phi_\omega(x) \in \mathcal{G}_\omega$ . If  $\partial_\lambda^2 E(\phi_\omega^\lambda)|_{\lambda=1} < 0$ , then the standing wave solution  $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$  of (NLS) is unstable. Here,  $v^\lambda(x) := \lambda^{n/2}v(\lambda x)$  for  $\lambda > 0$ .

このような形不安定性に関する十分条件は, Shatah and Strauss [20] の方法に基づき, Gonçalves Ribeiro [6] によって初めて与えられた. その後, [18] で, ビリアル等式 (VI) を用いて簡単な証明が与えられた. さて,  $\|v^\lambda\|_{L^2}^2 = \|v\|_{L^2}^2$ ,  $\partial_\lambda E(\phi_\omega^\lambda)|_{\lambda=1} = \partial_\lambda S_\omega(\phi_\omega^\lambda)|_{\lambda=1} = 0$  だから, 命題 4 における仮定  $\partial_\lambda^2 E(\phi_\omega^\lambda)|_{\lambda=1} < 0$  から, (NLS) の保存量である粒子数が一定の超曲面  $\{v \in X : \|v\|_{L^2}^2 = \|\phi_\omega\|_{L^2}^2\}$  上エネルギー汎関数  $E$  は  $\phi_\omega(x)$  において極小ではないことが従う. すなわち,  $L^2$  ノルムを不変とするスケーリング  $\phi_\omega^\lambda(x)$  を用いて具体的に不安定な方向を与えている. この十分条件  $\partial_\lambda^2 E(\phi_\omega^\lambda)|_{\lambda=1} < 0$  は,  $\omega$  に関して微分する必要がなく, Grillakis, Shatah and Strauss [7, 8] の一般論における  $d''(\omega) < 0$  よりも確認しやすい, という利点がある.

## 5. 定理 1 の証明の概略

Grillakis, Shatah and Strauss [7, 8] の一般論に従って  $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$  の増減を調べることを目標に, 命題 3 の (1) による (SP) の解の  $L^2$  ノルムの漸化式を得る. しかし命題 3 により捕まえた (SP) の解 (分岐解) と,  $\phi_\omega(x) \in \mathcal{G}_\omega$  が一致しているとは限らない. それについては次の補題 1 によって, 陰関数定理による一意性から  $-\lambda_1$  の近くでは両者が一致していることがわかる.

**補題 1** Let  $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ . Then,  $\|\phi_\omega\|_\Sigma \rightarrow 0$  as  $\omega \rightarrow -\lambda_1 + 0$ .

こうして (1) により  $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$  の  $L^2$  ノルムの振舞いの情報が得られた. つまり  $\omega > -\lambda_1$  が  $-\lambda_1$  に十分近いとき,  $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$  は単調増加である, すなわち, 予想 1 が成り立つと言

いたいところだが,  $\omega \rightarrow -\lambda_1 + 0$  のとき  $\|\phi_\omega\|_{L^2}^2$  が振動しながら 0 に収束する可能性を排除しきれていない. そこで, 定理 1 では 列  $\{\omega_k\}$  を取るかたちの主張となっている.

## 6. 定理 2 の証明の概略

$P(\phi_\omega) = \partial_\lambda E(\phi_\omega^\lambda)|_{\lambda=1} = 0$  を用いて計算すると, 命題 2 における仮定  $\partial_\lambda^2 E(\phi_\omega^\lambda)|_{\lambda=1} < 0$  は

$$\frac{\|x\phi_\omega\|_{L^2}^2}{\|\phi_\omega\|_{L^{p+1}}^{p+1}} < \frac{n(p-1)\{n(p-1)-4\}}{16(p+1)} \quad (2)$$

と同値であることが分かる. (2) の右辺は  $p > 1 + 4/n$  なので正定数である. したがって左辺が  $\omega \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束することを示せばよい. ここで,  $\phi_\omega(x) \in \mathcal{G}_\omega$  を  $\phi_\omega(x) = \omega^{1/(p-1)}\tilde{\phi}_\omega(\sqrt{\omega}x)$  とスケール変換した  $\tilde{\phi}_\omega(x)$  と, (SP0) の  $\omega = 1$  のときの基底状態  $\psi_1(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$  を考える.  $\tilde{\phi}_\omega(x)$  の満たす方程式は

$$-\Delta\phi + \phi + \omega^{-2}|x|^2\phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

となる.

この変形の理由はスケール変換することにより  $\omega$  の影響をポテンシャルのついた項へ持って行き,  $\omega^{-2}|x|^2\phi$  の項の効果が  $\omega \rightarrow \infty$  のときに消え,  $\psi_1(x)$  が  $p > 1 + 4/n$  のときに不安定であることに帰着するのではないかという予想が基盤となっているためである.

$$\frac{\|x\phi_\omega\|_{L^2}^2}{\|\phi_\omega\|_{L^{p+1}}^{p+1}} = \frac{\omega^{-2}\|x\tilde{\phi}_\omega\|_{L^2}^2}{\|\tilde{\phi}_\omega\|_{L^{p+1}}^{p+1}} \quad (3)$$

なので

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^{-2}\|x\tilde{\phi}_\omega\|_{L^2}^2}{\|\tilde{\phi}_\omega\|_{L^{p+1}}^{p+1}} = 0 \quad (4)$$

を示せばよい. まず, 以下の汎関数を定義する.

$$\tilde{I}_\omega(v) := \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + \omega^{-2}\|xv\|_{L^2}^2 - \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

$$I_1^0(v) := \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 - \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

次の補題が (4) を示すための鍵となる.

補題 2 Let  $\phi_\omega(x) \in \mathcal{G}_\omega$ .

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \lim_{\omega \rightarrow \infty} \|\tilde{\phi}_\omega\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \|\psi_1\|_{L^{p+1}}^{p+1}, & \text{(ii)} \quad & \lim_{\omega \rightarrow \infty} I_1^0(\tilde{\phi}_\omega) = 0, \\ \text{(iii)} \quad & \lim_{\omega \rightarrow \infty} \|\tilde{\phi}_\omega\|_{H^1}^2 = \|\psi_1\|_{H^1}^2, & \text{(iv)} \quad & \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{-2} \|x\tilde{\phi}_\omega\|_{L^2}^2 = 0. \end{aligned}$$

補題 2 の証明に関して,  $\tilde{\phi}_\omega(x)$  が制約条件付きの最小化問題

$$\inf\{\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} : v \in X \setminus \{0\}, \tilde{I}_\omega(v) \leq 0\}$$

の最小化元であること, 及び  $\psi_1(x)$  が

$$\inf\{\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} : v \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}, I_1^0(v) \leq 0\}.$$

の最小化元であることを用いて,  $\tilde{\phi}_\omega(x)$  と  $\psi_1(x)$  のノルムをお互いに比較することにより, (i) と (ii) は証明される. また, (iii) と (iv) は (i) と (ii) から直ちに導かれる.

## 参考文献

- [1] H. Berestycki and T. Cazenave, Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris. **293** (1981) 489–492.
- [2] T. Cazenave, “An introduction to nonlinear Schrödinger equations,” Textos de Métods Matemáticos 26, IM-UFRJ, Rio de Janeiro 1993.
- [3] T. Cazenave and P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, Comm. Math. Phys. **85** (1982) 549–561.
- [4] R. Fukuizumi, Stability and instability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential, Preprint.
- [5] R. Fukuizumi and M. Ohta, In preparation.

- [6] J. M. Gonçalves Ribeiro, Instability of symmetric stationary states for some nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field, *Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor.* **54** (1991) 403–433.
- [7] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I, *J. Funct. Anal.* **74** (1987) 160–197.
- [8] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II, *J. Funct. Anal.* **94** (1990) 308–348.
- [9] M. Hirose and M. Ohta, Structure of positive radial solutions to scalar field equations with harmonic potential, *J. Differential Equations*. (to appear)
- [10] Y. Kabeya and K. Tanaka, Uniqueness of positive radial solutions of semilinear elliptic equations in  $\mathbb{R}^N$  and Séré’s non-degeneracy condition. *Comm. Partial Differential Equations*. **24** (1999), 563–598.
- [11] M. K. Kwong, Uniqueness of positive solutions of  $\Delta u - u + u^p = 0$  in  $\mathbb{R}^n$ , *Arch. Rational Mech. Anal.* **105** (1989), 234–266.
- [12] M. K. Kwong and Y. Li, Uniqueness of radial solutions of semilinear elliptic equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **333** (1992), 339–363.
- [13] 増田 久弥, 非線型数学, 朝倉書店 (1985).
- [14] 増田 久弥, 非線型楕円型方程式, 岩波書店 (1977).
- [15] L. Nirenberg, Topics in nonlinear functional analysis, *Courant Lect. Notes Math.* (1974).
- [16] Y. G. Oh, Stability of semiclassical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989) 11–33.
- [17] Y. G. Oh, Cauchy problem and Ehrenfest’s law of nonlinear Schrödinger equations with potentials, *J. Differential Equations* **81** (1989) 255–274.

- [18] M. Ohta, Instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system, *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.* **62** (1995) 69–80.
- [19] H. A. Rose and M. I. Weinstein, On the bound states of the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential, *Physica D* **30** (1988) 207–218.
- [20] J. Shatah and W. Strauss, Instability of nonlinear bound states, *Comm. Math. Phys.* **100** (1985) 173–190.
- [21] 鶴見剛也・和達三樹, 中性原子を用いたボーズ・アインシュタイン凝縮, *科学* Vol. 69 No. 11 (1999) 937–944.
- [22] M. I. Weinstein, Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, *Comm. Math. Phys.* **87** (1983) 567–576.
- [23] J. Zhang, Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with unbounded potentials, *Z. Angew. Math. Phys.* **51** (2000) 489–503.