

## 変形領域における Helmholtz 方程式の数値解法と吸音板の最適設計

千葉大学工学部 水藤 寛 (Hiroshi Suito)

千葉大学工学部 河原田 秀夫 (Hideo Kwarada)

### Numerical Simulation of Helmholtz Equation in a Deformed Region and Optimal Shape Design for Sound Absorbing Plate

H. Suito and H. Kwarada

Faculty of Engineering, Chiba University

A shape optimization problem for a sound absorbing plate is studied. In order to optimize the shape of the sound absorbing plate, it is necessary to solve Helmholtz equation in a deformed region. Finite difference method with boundary fitting mesh are adopted to solve Helmholtz equation in the deformed region. Discretized Helmholtz equation is represented by a large sparse matrix. GPBi-CG method is applied to solve this linear system of equations. By using the solution of Helmholtz equation, the shape optimization problem is solved. Fuzzy optimization method is used to solve the optimization problem.

## 1 はじめに

本研究の目的は、コンサートホールや無響室などに使われる吸音板の最適形状設計を行うことである。そのために、変形した領域での音場を求める必要が生ずる。本研究では差分法を採用し、吸音板の形状に沿った座標系（物体適合座標系）を生成して、Helmholtz 方程式をこの座標系における方程式に変換して解く方法を用いた。

離散化された方程式は疎で大規模な係数行列で表現される連立一次方程式となる。しかし 3 次元の物体適合座標系を採用すると係数行列は非対称 19 重対角行列となり、解くのが困難になる。本研究では、GPBi-CG 法 (S.L.Zhang,1997)<sup>[1]</sup>を用いてこの連立一次方程式を解いた。また、前処理として不完全 LU 分解を行い、収束性を改善してから最適化を実行した。

## 2 最適化問題の概要

### 2.1 吸音板形状の表現

まず、

$$\eta_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1], \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

とおく。また、

$$f_0(x) = (-0.585x^2 + 1.867x)\eta_0(x), \quad (2)$$

$$f_1(x) = (1.170x^2 - 2.734x + 1.282)\eta_0(x), \quad (3)$$

$$f_2(x) = (0.585x^2 + 0.867x - 0.282)\eta_0(x). \quad (4)$$

とおき、 $\phi(x)$  を次のように定義する。

$$\phi(x) = f_0(x) + f_1(x-1) + f_2(x-2) \quad (5)$$

この $\phi(x)$ を用いて、 $\phi_{L,m}(x)$ を次のように定義する。

$$\phi_{L,m}(x) = \sqrt{N_L} \cdot \phi(N_L x - m) \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (6)$$

ただし、 $N_L = 2^L$ である。このように定義された $\{\phi_{L,m}\}$ は正規直交系をなす。

$$\int_R \phi_{L,m} \phi_{L,m'} dx = \delta_{m,m'}. \quad (7)$$

このようにして構成したスケーリング関数の例を図1に示す。

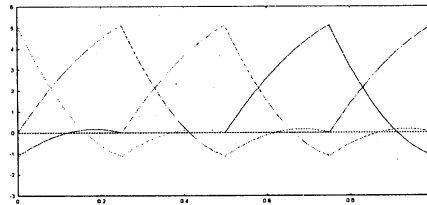


図 1: Scaling functions

このスケーリング関数 $\phi_{L,m}$ の線形結合を用いて、吸音板の形状 $\Gamma$ を次のように定義する。

$$\Gamma(y, z) = \sum_{m,m'=1}^{M_1} \gamma_{mm'} \phi_{L,m}(y) \phi_{L,m'}(z). \quad (8)$$

## 2.2 Notation

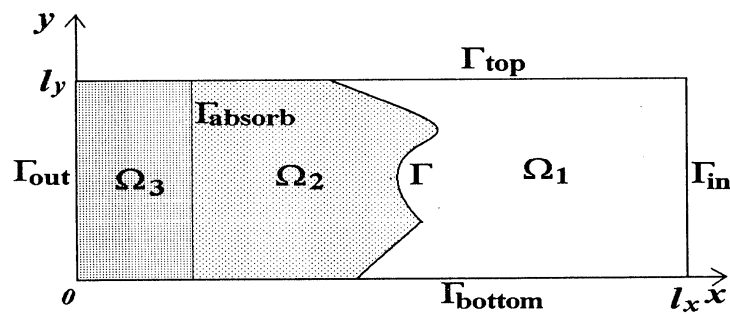


図 2: Projection of computational domain into  $x-y$  plane

- $\Gamma_{top}$  及び  $\Gamma_{bottom}$  は剛体壁である。これらの壁の密度は無限大であると考え、音波は完全反射するものとする。
- $\Gamma_{in}$  は、音波を放射する振動壁である。

- $\Omega_1$  は、水で満たされた領域である。
- $\Omega_2$  は松材でできており、 $\Omega_1$ から入射した音波を吸収する役目をする。
- $\Gamma$  は  $\Omega_1$  と  $\Omega_2$ の境界である。この境界面の形状を最適化することにより、 $\Omega_2$  に透過してゆく音波を最大にすることを目的とする。
- $\Omega_3$ は、いわゆる仮想領域であり、音波を減衰させる役目をする。この領域では複素数の波数が設定されている。
- $\Gamma_{absorb}$  は、透過波の振幅を測定する面である。
- $u^{(i)}(x, y, z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は、各領域における複素音圧を表す。
- $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は、各領域における波数を表す。
- $\rho_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は、各領域における媒質の密度である。
- $\mathbf{n}$  は各境界における外向き法線ベクトルを表す。
- $\alpha, \beta$  は入射角である。

### 2.3 状態方程式

$$\begin{aligned}
 (\Delta + k_i^2) u^{(i)}(\Gamma, a) &= 0 \quad \text{in } \Omega_i, \quad (i = 1, 2, 3), \\
 u^{(1)}(\Gamma) &= u^{(2)}(\Gamma) = a \quad \text{on } \Gamma, \\
 \frac{\partial u^{(i)}(\Gamma, a)}{\partial n} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_N, \quad (i = 1, 2, 3), \\
 u^{(1)}(\Gamma) &= U(y, z) \quad \text{on } \Gamma_{in}, \\
 u^{(2)}(\Gamma, a) &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{out},
 \end{aligned} \tag{9}$$

ただし、 $\Gamma_N = \Gamma_{top} \cup \Gamma_{bottom} \cup \Gamma_{side}$  である。波数  $k_i$  は各領域で次のように定義する。

$$k_i = \begin{cases} k_{water} & \text{in } \Omega_1, \\ k_{pine} & \text{in } \Omega_2, \\ \frac{k_{pine}}{\sqrt{1 + i\omega\nu/c^2}} & \text{in } \Omega_3, \end{cases} \tag{10}$$

ここで  $\nu$  は  $\Omega_3$  で定義される人工粘性である。

$\Gamma$  上で与える Dirichlet データ  $a$  は

$$a(y, z) = \sum_{m, m'=0}^{M_2} a_{mm'} \cos\left(\frac{2\pi m}{l_y} y\right) \cos\left(\frac{2\pi m'}{l_z} z\right), \tag{11}$$

とする。

## 2.4 最小値問題への定式化

コスト関数を次のように定義する。

$$J(\Gamma, a) = - \int_{\Gamma_{\text{absorb}}} |u^{(2)}(\Gamma, a)|^2 d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} \left| \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u^{(1)}(\Gamma, a)}{\partial n} - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u^{(2)}(\Gamma, a)}{\partial n} \right|^2 d\Gamma. \quad (12)$$

右辺第一項は、透過波の振幅を表し、第二項は $\Gamma$ における接合条件の満足度を表している。 $\varepsilon$ は小さな正の数である。この接合条件は異なる媒質の境界において課せられるもので、媒質粒子の速度の連続性に由来するものである。このコスト関数を用いると、最適化問題は次のように書かれる。

$$[P] \quad \text{Minimize } J(\Gamma, a) \quad \text{for } (\Gamma, a) \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2.$$

where

$$\mathcal{A}_1 = \{ \gamma_{mm'} \in \mathbf{R} \ (m, m' = 1, 2, 3, \dots, M_1) \mid |\gamma_{mm'}| \leq K \}, \quad (13)$$

$$\mathcal{A}_2 = \{ a_{mm'} \in \mathbf{C} \ (m, m' = 0, 1, 2, \dots, M_2) \mid |a_{mm'}| \leq L \}. \quad (14)$$

この最小値問題を、著者らが提案しているファジイ最適化法<sup>[2]</sup>を用いて解く。

## 3 Helmholtz 方程式の数値解法

### 3.1 座標変換

変形した領域における Helmholtz 方程式の数値解を差分法を用いて求めるため、次のようにして座標変換を行った。

まず、ある座標面が、変形した境界面に沿うような差分格子 $(\xi, \eta, \zeta)$ を生成する。この格子系は計算空間から物理空間への座標変換

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad (15)$$

$$y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad (16)$$

$$z = z(\xi, \eta, \zeta). \quad (17)$$

を表している。

次に、物理空間で書かれた Helmholtz 方程式を、計算空間におけるものに変換する。その結果、計算空間における Helmholtz 方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a_{11}}{J} \left( \frac{a_{11}}{J} \partial_{\xi\xi} + \frac{a_{12}}{J} \partial_{\eta\xi} + \frac{a_{13}}{J} \partial_{\zeta\xi} \right) + \frac{a_{12}}{J} \left( \frac{a_{11}}{J} \partial_{\xi\eta} + \frac{a_{12}}{J} \partial_{\eta\eta} + \frac{a_{13}}{J} \partial_{\zeta\eta} \right) + \frac{a_{13}}{J} \left( \frac{a_{11}}{J} \partial_{\xi\zeta} + \frac{a_{12}}{J} \partial_{\eta\zeta} + \frac{a_{13}}{J} \partial_{\zeta\zeta} \right) \right) u \\ & + \left( \frac{a_{21}}{J} \left( \frac{a_{21}}{J} \partial_{\xi\xi} + \frac{a_{22}}{J} \partial_{\eta\xi} + \frac{a_{23}}{J} \partial_{\zeta\xi} \right) + \frac{a_{22}}{J} \left( \frac{a_{21}}{J} \partial_{\xi\eta} + \frac{a_{22}}{J} \partial_{\eta\eta} + \frac{a_{23}}{J} \partial_{\zeta\eta} \right) + \frac{a_{23}}{J} \left( \frac{a_{21}}{J} \partial_{\xi\zeta} + \frac{a_{22}}{J} \partial_{\eta\zeta} + \frac{a_{23}}{J} \partial_{\zeta\zeta} \right) \right) u \\ & + \left( \frac{a_{31}}{J} \left( \frac{a_{31}}{J} \partial_{\xi\xi} + \frac{a_{32}}{J} \partial_{\eta\xi} + \frac{a_{33}}{J} \partial_{\zeta\xi} \right) + \frac{a_{32}}{J} \left( \frac{a_{31}}{J} \partial_{\xi\eta} + \frac{a_{32}}{J} \partial_{\eta\eta} + \frac{a_{33}}{J} \partial_{\zeta\eta} \right) + \frac{a_{33}}{J} \left( \frac{a_{31}}{J} \partial_{\xi\zeta} + \frac{a_{32}}{J} \partial_{\eta\zeta} + \frac{a_{33}}{J} \partial_{\zeta\zeta} \right) \right) u \\ & + k^2 u = 0, \quad (18) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} a_{11} &= y_{\eta} z_{\zeta} - y_{\zeta} z_{\eta}, & a_{12} &= y_{\zeta} z_{\xi} - y_{\xi} z_{\zeta}, & a_{13} &= y_{\xi} z_{\eta} - y_{\eta} z_{\xi}, \\ a_{21} &= z_{\eta} x_{\zeta} - x_{\eta} z_{\zeta}, & a_{22} &= x_{\xi} z_{\zeta} - x_{\zeta} z_{\xi}, & a_{23} &= x_{\eta} z_{\xi} - x_{\xi} z_{\eta}, \\ a_{31} &= x_{\eta} y_{\zeta} - y_{\eta} x_{\zeta}, & a_{32} &= y_{\xi} x_{\zeta} - x_{\xi} y_{\zeta}, & a_{33} &= x_{\xi} y_{\eta} - y_{\xi} x_{\eta}, \end{aligned}$$

$$J = \begin{vmatrix} x_{\xi} & x_{\eta} & x_{\zeta} \\ y_{\xi} & y_{\eta} & y_{\zeta} \\ z_{\xi} & z_{\eta} & z_{\zeta} \end{vmatrix}$$

である。物理空間において与えられた境界条件も、同様にして計算空間におけるものに変換する。

### 3.2 格子生成

変形した境界面に沿うようななめらかな格子を生成するため、楕円型方程式を用いて格子生成を行った。使用した格子点の数は  $\xi, \eta, \zeta$  の各方向にそれぞれ 161、21、21 である。

### 3.3 離散化 Helmholtz 方程式の解法

式(18)を、二次精度の中心差分を用いて離散化すると、疎で大規模な係数行列で表現される連立方程式になる。この連立方程式を解くためには、非定常反復法的一种である Generalized Product-type Bi-Conjugate Gradient Method<sup>[1]</sup>を用いた。前処理として、この非対称 19 重対角行列に対する不完全 LU 分解を行った。

実際の最適化計算にはいる前に、厳密解のわかっている問題を用いてソルバーの評価を行った。厳密解として次の関数を用いた。

$$\begin{aligned} u &= \exp(ik \cos \beta x) \exp(ik \sin \beta y) + \exp(ik \cos \beta x) \exp(-ik \sin \beta y) \\ &= 2 \exp(ik \cos \beta x) \cos(k \sin \beta y). \end{aligned}$$

図3にこの関数の  $Re(u) = 0.5$ 、及び  $Re(u) = -0.5$  の等値面を示す。

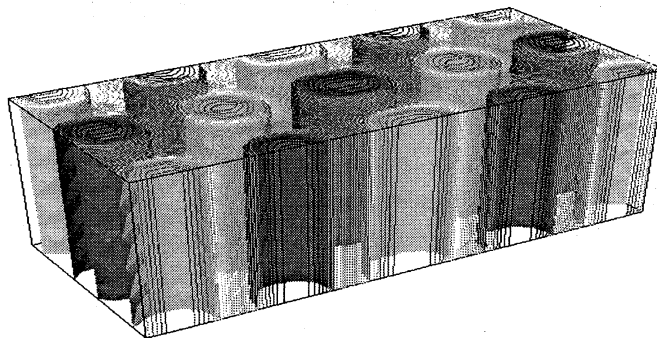


図 3: Exact solution

図4、及び図5に、直交格子を用いた場合、及び変形させた境界に沿うような物体適合格子を用いた場合の解を示す。

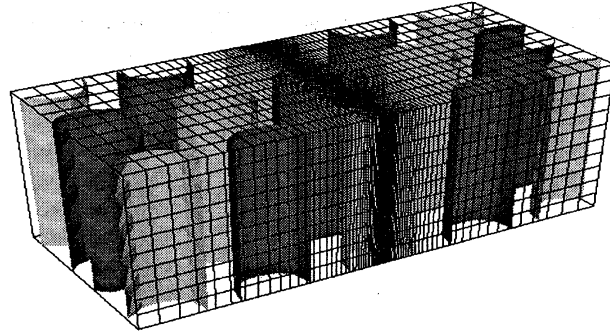


図 4: Solution of Helmholtz eq. by use of orthgonal mesh

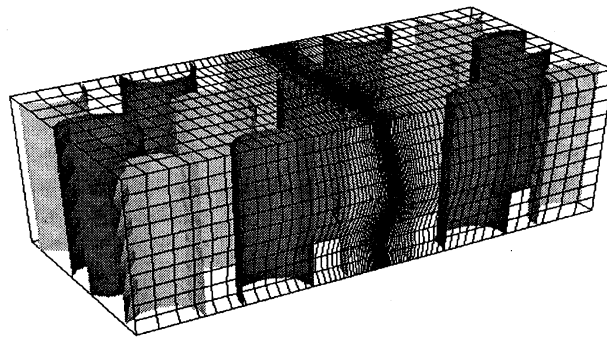


図 5: Solution of Helmholtz eq. by use of boundary fitting mesh

直交格子を用いた場合、物体適合格子を用いた場合の双方において、厳密解とよく一致した解が得られた。よって、このソルバーを用いて最適化を実行することとした。また、不完全LU分解による前処理を施すと、収束するまでの計算時間が非常に短縮されることを確認した。

## 4 最適化アルゴリズム

最小値問題 [P] を解くための手法として、著者らが提案しているファジイ最適化法<sup>[2]</sup>を用いた。この手法は最急降下法を基礎とし、探索ベクトル列に平均化を施すことによって最適化の収束性を改善する手法である。平均化のパラメータを決定する際に確率的ファジイ推論を行っているのが特徴である。

## 5 結果

入射角は  $\alpha = 0, \beta = 30 (> \beta_c)$  とした。ここで  $\beta_c$  は  $\sin \beta_c = \frac{k_2}{k_1}$  で与えられ、境界面  $\Gamma$  が平面ならば全反射の起こる入射角である。

まず、境界面の形状は変化させずに接合条件の最適化のみを行った。この場合のコスト関数は次のようにとる。

$$J_b(a) = \int_{\Gamma} \left| \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u^{(1)}(a)}{\partial n} - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u^{(2)}(a)}{\partial n} \right|^2 d\Gamma. \quad (19)$$

最適化が終了した時点での複素音圧の実数部、虚数部、絶対値を図6に示す。それぞれ、いくつかの値についての等値面を描いている。図の右側が入射側、左側が透過側である。

入射角が臨界角 $\beta_c$ を超えているために、吸音材側には音波はほとんど入り込まずに水側に反射していることがわかる。

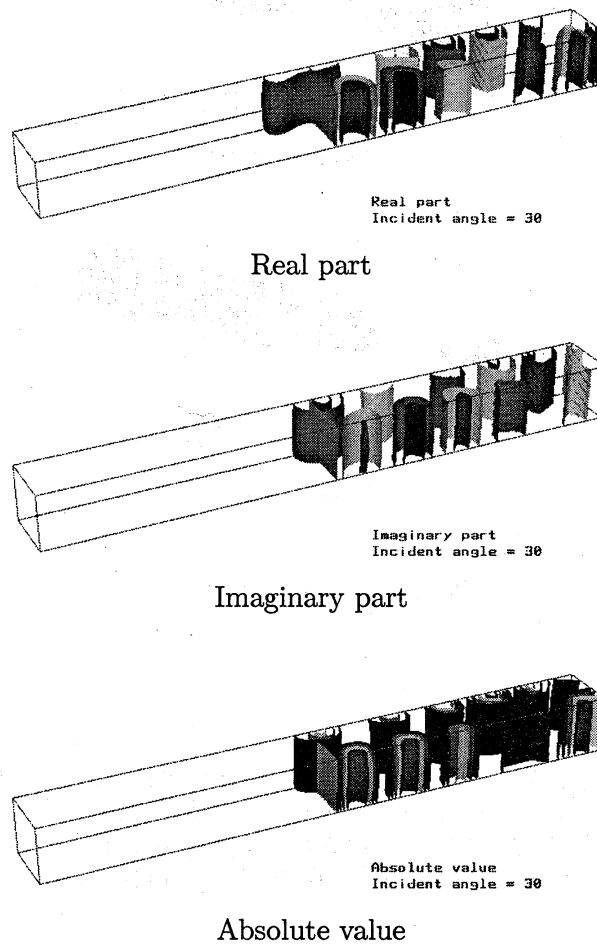


図 6: Boundary matching problem

次に(12)のコスト関数を用いて、接合条件の最適化と、境界面形状の最適化を同時に行った。図7に、最適化が終了した時点での複素音圧の実数部、虚数部、絶対値を示す。最適化によって境界面の形状が楔型に変形している。そのため、入射角が最初の例と同じであるにもかかわらず、入射波のうち多くの部分が吸音材側に透過してきていることがわかる。

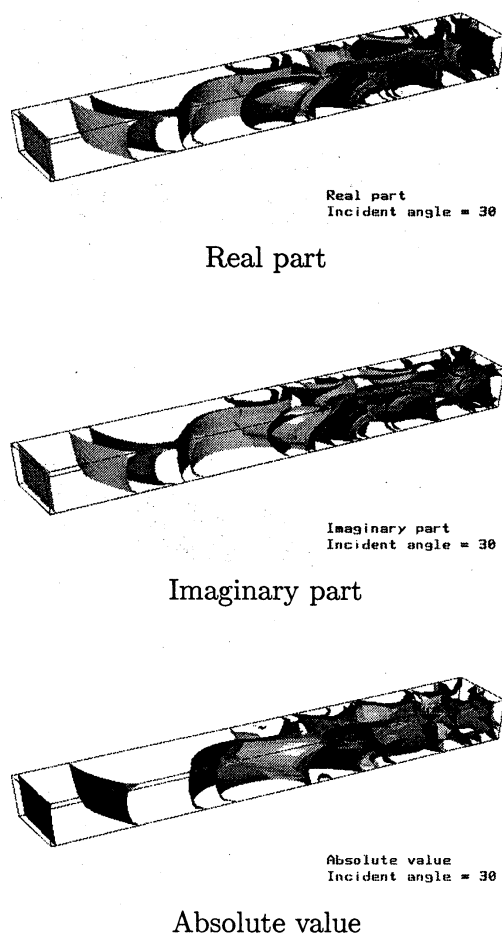


図 7: Shape optimization

## 6 結論

物体適合格子を用いることによって、変形領域における Helmholtz 方程式の解を効率的に計算することができた。ここでは、連立方程式の解法と、係数行列に対する前処理が重要な役割を果たした。また、計算された音場を用いて、境界面形状の最適化を行った。形状を変化させることにより、音波が吸音材側に透過して行く様子が観察され、最適な形状を求めることができた。

## 7 参考文献

1. S.-L. Zhang, GPBi-CG: *Generalized product-type methods based on Bi-CG for solving non-symmetric linear systems*, SIAM Journal on Scientific Computing, 18-2(1997), pp. 537-551.
2. H.Kawarada and H.Suito, *Fuzzy Optimization Method*, Computational Science for the 21st Century, John Wiley & Sons (1997), pp. 642-651.