

Invariants of cusps and the dimension formula

東北大教養 尾形 庄悦

序. $C \subset \mathbb{R}^n$ を自己双対, 等質, 開凸錐とし, $G = \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid gC = C\}$ とする。このときキューブ領域 $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n + \sqrt{-1}C$ は対称領域となる。 $\mathcal{O}$ の正則自己同型群の単位元を含む連結成分を $\tilde{G} = (\text{Hol } \mathcal{O})^0$ とおくと, $\tilde{G}$ はエルミート型の半単純リー群となる。 $r = R - \text{rk } \tilde{G}$ とする。 $\mathbb{Q} - \text{rk } \tilde{G} = 1$ となるように $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ をえらぶ。 $\mathcal{O}$ の有理境界点 $\sqrt{-1}\infty$ に対応する $\tilde{G}$ の放物部分群 P は $G \times \mathbb{R}^n$ と同型になる。

$\tilde{G}$ の neat な算術部分群 $\tilde{\Gamma}$ を選ぶと局所対称領域 $\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{O}$ は有限個の点 $\{P_1, \dots, P_n\}$ を付け加えてコンパクト化できる。

$Y^* = (\tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{O}) \cup \{P_1, \dots, P_n\}$ (佐武-Baily-Borel コンパクト化)。

$P_1 = \sqrt{-1}\infty$ とする。 $\pi: Y \rightarrow Y^*$ を特異点解消とすると, 例外因子 D は連結成分 $D^{(1)}, \dots, D^{(h)}$ の和に分解する。 $D^{(i)} = \pi^{-1}(P_i)$ 。

$\tilde{\Gamma}$ の重み k をもつカスプ型式全体を $S_k(\tilde{\Gamma})$ で表わすとき, その次元はリーマン-ロッホの定理を使って計算できる。

$$\dim S_k(\tilde{\Gamma}) = \dim H^0(Y, L^{\otimes k} \otimes \mathcal{O}_Y(-D)).$$

更に, これは, $F \setminus \bigcirc$ の体積に比例する普遍係数をもつ n 次の k の多項式 $P(k)$ と各 $D^{(i)}$ から決まる不変量 $\chi_\infty(p_i)$ の和として表わされる。i.e.,

$$\dim S_k(\tilde{F}) = P(k) + \sum_{i=1}^h (-1)^n \chi_\infty(p_i).$$

一方, ヒルバート・モジュラ-群の時 ($r=n$, $C=(\mathbb{R}_{>0})^n$), セルバーゲの跡公式により

$$\dim S_k(\tilde{F}) = P(k) + \sum_{i=1}^h 2^{-r} L_i(s) \Big|_{s=\frac{n}{2}}$$

と表わされる。 $L_i(s)$ は清水の L -関数の定数倍で, 境界点 p_i に対応する有理放物部分群 P_i により定義される。

この二つの公式より,

$$\sum_{i=1}^h (-1)^n \chi_\infty(p_i) = \sum_{i=1}^h 2^{-r} L_i(s) \Big|_{s=1}$$

が判る。このことから, Van der Geer は $(-1)^n \chi_\infty(p_i) = 2^{-r} L_i(s) \Big|_{s=1}$ と予想した。 Hirzebruch は $L_i(s) \Big|_{s=1}$ が p_i の符号数不足指数 (signature defect) $\sigma(p_i)$ と一致すべきだと予想し, Atiyah, Donnelly-Singer により, また Müller により証明された。

この予想と定理はヒルバート・モジュラ-群の場合だけを扱っている。一般の場合を考えたい。

$\mathbb{R}^n$ 上の r 次の多項式関数で, $g \in G$ に対し, $N(gv) = (\det g)^{\frac{r}{n}} N(v)$ $v \in \mathbb{R}^n$ を満たすように "ノルム" N を定める。 $S = \{N=0\}$ を特異集合とすると, $\mathbb{R}^n \setminus S = \bigsqcup_{i=0}^m C_i$ と分解する。 $C_0 = C$ とする。佐藤-新谷の概均質ベクトル空間の理論によれば,

$$\xi_i(M, s) = \sum_{\alpha \in \Gamma \backslash M_n C_i} \frac{\mu(\alpha)}{|N(\alpha)|^s}$$

ゼータ関数を定めると, ξ_i は関数等式を満たす。佐武は ξ_i の一次結合 $L(M, s)$ で単独に関数等式を満たすものを見つけた。

定理 (佐武) $L(M, 0) = 2^r \xi_0(M, 0).$

結局, Van der Geer と Hirzebruch の予想を一般化して, 二つの等式

$$\xi_0(M^*, 0) = (-1)^n \chi_\infty(p_1),$$

$$\xi_0(M^*, 0) = 2^{-r} \sigma(p_1) \quad (n \text{ は奇数})$$

が成立するかどうかという, 局所的問題に定式化される。

1. 凸錐のゼータ関数

$M \cong \mathbb{Z}^n$, $M_{\mathbb{R}} = M \otimes \mathbb{R}$ とする。自己双対とも等質とも限らない開凸錐 $C \subset M_{\mathbb{R}}$ と部分群 $\Gamma \subset GL(M)$ の組で条件

(i) $gC = C \quad \forall g \in \Gamma,$

(ii) Γ は $C/\mathbb{R}_{>0}$ 上固有不連続, 固定点なしに作用する,

(iii) 商 $\Gamma \backslash C/\mathbb{R}_{>0}$ はコンパクト

を満たすものを考える。

$\langle, \rangle: M^* \times M \rightarrow \mathbb{Z}$ を自然な pairing とし, C の双対錐を $C^* = \{y \in M^*_{\mathbb{R}}; \langle y, x \rangle > 0 \quad \forall x \in C \setminus \{0\}\}$ で定める。 C の特性関数を $\phi(x)$ とする。このとき, 凸錐 C のゼータ関数を

$$\Sigma(C, M; s) = \sum_{\alpha \in \Gamma \backslash M \cap C} \phi_{\alpha}(\alpha)^s$$

で定める。

定理 (i) $\Sigma(C, M; s)$ は全平面へ有理型に解析接続される。

(ii) $s=0$ で正則, かつ, その値は $\Gamma \backslash C \cup \partial C$ の錐分割の言葉を使って表わされる。

(iii) (石田) $\Sigma(C, M; 0) \in \mathbb{Q}$.

注意 C が等質, 自己双対錐のとき, $\phi(\alpha)$ は $N(\alpha)^{-n/r}$ の定数倍であるから, $\Sigma(C, M; 0) = \xi_0(M, 0)$.

2. 幾何的不変量

$\Delta = M_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}C \subset M_{\mathbb{C}}$ はキューブ領域で, $V = \Gamma \backslash M \setminus \Delta \cup \partial \Delta$ は孤立特異点 $p = \sqrt{-1}\infty$ を持つ正規解析空間である。この (V, p) を土橋カスプと呼ぶ。トロイダル埋込みを使って, 特異点解消 $\pi: (U, X) \longrightarrow (V, p)$ を例外因子 X が単純正規交叉のみをもつようにとる。 $X = \sum_{i \in I} X_i$. 各 X_i の定める類を $\delta_i \in H^2(U, \partial U; \mathbb{Z})$ とする。

定義(佐武) (i) $\chi_{\infty}(p) = \left[\prod_{i \in I} \frac{\delta_i}{1 - e^{-\delta_i}} \right]_m [U, \partial U] \in \mathbb{Q}$.

(ii) $\sigma(p) = \left[\prod_{i \in I} \delta_i \coth \delta_i \right]_m [U, \partial U] - \text{sign}(U, \partial U)$,

ここに, $\text{sign}(U, \partial U)$ はカッパ積 $H^m(U, \partial U) \otimes H^m(U) \longrightarrow H^{2m}(U, \partial U)$ により定まる $H^m(U, \partial U; \mathbb{R})$ 上の二次形式の符号数を表わす。

3. 結果

定理 (石田) (V, p) が (C, Γ, M) により定まる偶数次元のカスツのとき,

$$\chi_{\infty}(p) = Z(C^*, \Gamma, M^*; 0).$$

定理 n が偶数のとき,

$$\chi_{\infty}(p) = 2^{-n} \sigma(p).$$

この定理の証明には, $\text{sign}(U, \partial U)$ を $X_J = \bigcap_{j \in J} X_j$ ($J \subset I$) 上のある二次形式の符号数の和で表わす公式が使われる。

4. 発展

ϕ が チューブ領域でない場合, 例えば m 次元複素単位球 $B^m = \{z \in \mathbb{C}^m \mid \|z\| < 1\}$ の直積 $\phi = (B^m)^r$ ($r > 1$) の場合にも, $F \setminus \phi$ に有限個の点を付け加えてコンパクト化できることがある。このようなカスツ特異点 p に対しても,

定理 $n = mr$ が偶数のとき,

$$\chi_{\infty}(p) = 2^{-n} \sigma(p).$$

問題 §3での石田の定理に相当する等式を見つけたら。

参考文献

1. I. Satake and S. Ogata, Zeta functions associated to cones and their special values, Adv. Stud. Pure Math. vol. **15**, pp. 1-27(1989).
2. M.-N. Ishida, The duality of cusp singularities, Math. Ann. **298**, 81-97(1992).
3. S. Ogata, Hirzebruch's conjecture on cusp singularities, to appear in Math. Ann.
4. S. Ogata, Signature defects of Hilbert-Picard modular cusps, to appear in Math. Z.
5. H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. **35**, 607-639(1983).