

特異点の変形と漸近展開

慶大・数理工 石浦信三

京大・数理研 上野喜三雄

§1 動機

A_2 -singularity: $y^3=0$ の versal deformation $\varphi(x, y) = y^3 + xy$; $X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ を考える。ここで, X , 及び Y は, $\mathbb{C}_x, \mathbb{C}_y$ の原点の近傍である。積分

$$u_i = \int \delta(t - \varphi(x, y)) y^i dy \quad (i=0, 1) \quad (1)$$

を, $u = \delta(t - \varphi)$ の満たす微分方程式系

$$\begin{cases} (t - \varphi) u = 0 \\ (D_x + \varphi'_x D_t) u = 0, (D_y + \varphi'_y D_t) u = 0 \end{cases} \quad (2)$$

の変数 y に関する積分と了解して, u_i ($i=0, 1$) の満たすべき微分方程式を求めると, 次の極大過剰決定系を得る。

$$\begin{cases} t D_t u = A_0 D_t u + A_1 u \\ D_x u = B D_t u \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{where } u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x & \\ -\frac{2}{9}x^2 & \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \\ & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} & -1 \\ \frac{x}{3} & \end{pmatrix}$$

この極大過剰決定系(3)を *versal deformation* に伴う system of Gauss-Manin と呼ぶ,

同様に, A_3 -singularity $y^4=0$ の *versal deformation*

$\varphi(x, y) = y^4 + x_2 y^2 + x_1 y : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ を考える. 積分

$$u_i = \int \delta(t - \varphi) y^i dy \quad (i=0, 1, 2) \quad (4)$$

を $u = \delta(t - \varphi)$ の満たす方程式系

$$\begin{cases} (t - \varphi)u = 0 & (D_y + \varphi'_y D_t)u = 0 \\ (D_{x_i} + \varphi'_{x_i} D_t)u = 0 & (i=1, 2) \end{cases} \quad (5)$$

の積分と了解し, $u_i \ (i=0, 1, 2)$ の満たす方程式系を求めると,

$$\begin{cases} t D_t u = A_0 D_t u + A_1 u \\ D_{x_i} u = B_0^{(i)} D_t u + B_1^{(i)} u \quad (i=1, 2) \end{cases} \quad (6)$$

where $u = {}^t(u_0, u_1, u_2)$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4}x_1 & \frac{1}{2}x_2 \\ -\frac{1}{8}x_1x_2 & \frac{1}{4}x_2^2 & \frac{3}{4}x_1 \\ \frac{3}{16}x_2^2 & \frac{1}{2}x_1x_2 & \frac{1}{4}x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & & \\ & -\frac{2}{4} & \\ \frac{1}{8}x_2 & & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$B_0^{(1)} = \begin{bmatrix} & -1 & \\ & & -1 \\ \frac{1}{4}x_1 & \frac{2}{4}x_2 & \end{bmatrix}$$

$$B_0^{(2)} = \begin{bmatrix} & & -1 \\ \frac{1}{4}x_1 & \frac{2}{4}x_2 & \\ & \frac{1}{4}x_2 & \frac{2}{4}x_2 \end{bmatrix}$$

$$B_1^{(2)} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ -\frac{1}{4} & & \end{bmatrix}$$

という極大過剰決定系を得る。これを A_3 -singularity の versal deformation に伴う system of Gauss-Manin という。さて、いずれの場合も、 φ の critical subset, そして, discriminant を

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(x, y) \in X \times Y; \varphi'_y(x, y) = 0\} \\ \Delta &= \{(x, \varphi(x, y)) \in X \times \mathbb{C}; (x, y) \in \Sigma\}\end{aligned}\quad (7)$$

で定めると, 上記の Gauss-Manin system は, Δ に沿って singularity をもつ $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -module を定める。 Δ は, $S = X \times \mathbb{C}$ の analytic hypersurface としての構造をもち, A_2, A_3 のそれぞれの場合の定義方程式は,

$$\begin{aligned}A_2; \Delta &= \{(x, t); t^2 + \frac{4}{27}x^3 = 0\} \\ A_3; \Delta &= \{(x, t); t^3 + \frac{1}{2}t^2x_1^2 + \frac{9}{16}tx_1x_2^2 + \frac{27}{256}x_2^4 \\ &\quad + \frac{1}{16}tx_1^4 + \frac{1}{64}x_1^3x_2^2 = 0\}\end{aligned}\quad (8)$$

で与えられる。

一方, Arnold [1] は, 積分 $\int \delta(t - \varphi) a(x, y) dy$ を考える代わりに実領域で振動積分

$$\begin{aligned}I(x, t) &= \int e^{-it\varphi(x, y)} \tilde{a}(x, y) dy, \\ \tilde{a}(x, y) &\in C_c^\infty\end{aligned}\quad (9)$$

を考え, その $t \rightarrow +\infty$ とするときの, 漸近挙動を問題にした。このとき, φ は phase function と呼ばれ, A_2, A_3 等の simple singularity の versal deformation をとくに選ぶということは, stable Lagrangian を考えることに相当している。ところで

Fourier変換

$$\int e^{-it\varphi} \tilde{a} dy = \int e^{-itt} dt \int \delta(t-\varphi) \tilde{a}(x, y) dy \quad (10)$$

を通じて, この問題が Gauss-Manin connection とその monodromy と関連することは, Malgrange [1] により発見され, のちに Pham [1] によって, microlocal な観点から体系的に論じられた。

いま実領域で考える代わりに, 複素領域における Laplace 変換

$$\int_{\Gamma} e^{\tau t} dt \int \delta(t-\varphi) a(x, y) dy \quad (11)$$

(ここで, Γ は適当な積分路をえらぶ。)

を考察する。その為に, 例えば, 方程式系 (3) の Laplace 像 w が満たす方程式系

$$\begin{cases} \tau D_{\tau} w = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x \\ -\frac{2}{3}x^2 \end{pmatrix} \tau - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\} w \\ D_x w = \begin{pmatrix} -x & 1 \end{pmatrix} \tau w \end{cases} \quad (12)$$

を論じよう。オ1の方程式は, $x \neq 0$ で, $\tau = \infty$ に一級の不確定特異点を持ち, $\frac{1}{3}$ 次, $\frac{2}{3}$ 次 の Bessel 函数を混合することにより, その独立解を表示することができる。一方, オ2の方程式は, この方程式系が monodromy 不変 (あるいは, Stokes 係数不変) に deform されていることを意味している。

我々の研究目標は、振動積分(9)の漸近挙動を調べる代りに不確定特異点をもつ方程式系(12)の漸近解が示す $t = \infty$ での Stokes 現象と、もとの方程式系(3)との関係を論じることにある。

§2 Discriminant

A_2 -singularity の versal deformation に議論を限ろう。 $S = X \times \mathbb{C}$ 上の線型偏微分作用素の層 $\mathcal{D}_S$ を考え、方程式系(3)を $\mathcal{D}_S$ -holonomic module として了解しよう。まず、(3)を

$$\begin{cases} D_t u = (tI - A_0)^{-1} A_1 u \\ D_x u = B(tI - A_0)^{-1} A_1 u \end{cases} \quad (13)$$

とかきなおそう。このとき、discriminant の方程式 Δ は、

$$\Delta = \det(tI - A_0) = t^2 + \frac{4}{27}x^3 \quad (14)$$

で与えられることに注意されたい。 $\mathcal{O}_S$ -free module $\mathcal{H}_\varphi^{(0)}$ とその Δ に沿う局所化

$$\mathcal{H}_\varphi^{(0)} = \mathcal{O}_S u_1 \oplus \mathcal{O}_S u_2 \quad (15)$$

$$\mathcal{H}_\varphi = \bigcup_{k \geq 0} \Delta^{-k} \mathcal{H}_\varphi^{(0)} = \mathcal{H}_\varphi^{(0)}(\Delta)$$

を考えよう。方程式(13)により、 $\mathcal{H}_\varphi$ には、 $\mathcal{D}_S$ -module の構造が入る。(13)によって定まる Δ に沿って pole をもつ meromorphic connection が、いわゆる Gauss-Manin connection に他ならない。(参照 Saito [1], [2])

斎藤氏の理論との関係を少し述べよう。(13)のガリ方程式から、形式的に D_t を払って、

$$D_t^{-1}u = (I + A_1)^{-1}(tI - A_0)u \quad (16)$$

で、 $D_t^{-1} : \mathcal{H}_\varphi^{(0)} \rightarrow \mathcal{H}_\varphi^{(0)}$ という単射を導入し、

$$\mathcal{H}_\varphi^{(k)} = D_t^k \mathcal{H}_\varphi^{(0)} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (17)$$

という good filtration を導入する。一方、写像

$$\Phi(x, y) = (x, \varphi(x, y)) : X \times Y \rightarrow X \times \mathbb{C}$$

による

$$\Omega_\varphi = \Omega'_{X \times Y / X} / d_y \varphi \wedge \Omega^\circ_{X \times Y / X} \quad (18)$$

の直像を考え、これも Ω_φ と書くことにすると、 Ω_φ の $\mathcal{O}_{X \times Y}$ -module としての support は、 Σ であり、 $\mathcal{O}_S$ -module としての support が Δ ということになる。

このとき、(18)式は、 $\mathcal{O}_S$ -isomorphism

$$\Omega_\varphi \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_\varphi^{(0)} / \mathcal{H}_\varphi^{(-1)} \quad (19)$$

にちょうど対応している。さて一般に、斎藤氏により、 $\mathcal{H}_\varphi^{(0)}$ は S 上の vector field のなす、 $\mathcal{O}_S$ -free module Der_S と $\mathcal{O}_S$ -isomorphism

$$\oplus : \text{Der}_S \rightarrow \mathcal{H}_\varphi^{(0)} \quad (20)$$

$$D_t \mapsto u_0, \quad -D_x \mapsto u_1$$

により同一視できることが示されている。そこで、

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tD_t + \frac{2}{3}x D_x \\ \frac{2}{q}x^2 D_t - tD_x \end{pmatrix}$$

$$= (tI - A_0) \begin{pmatrix} D_t \\ -D_x \end{pmatrix} = \oplus \begin{pmatrix} \frac{1}{3} D_t^{-1} u_0 \\ \frac{2}{3} D_t^{-1} u_1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

で定まる Dens の元 v_0, v_1 を考えよう。 $v_0 u = A_1 u$ となるので
とくに v_0 を Euler operator と呼ぶ。

このとき,

$$\begin{cases} v_0 \Delta = 2\Delta \\ v_1 \Delta = 0 \end{cases} \quad (22)$$

で方程式系(22)は, discriminant Δ を定数倍を除いて決定して
しまう。いま,

$$\text{Dens}(\log \Delta) = \{v \in \text{Dens}; v\Delta \in \Delta \mathcal{O}_S\}$$

とおくと, v_0, v_1 は, $\text{Dens}(\log \Delta)$ の $\mathcal{O}_S$ -basis をなす。

短完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Dens}(\log \Delta) & \longrightarrow & \text{Dens} & \longrightarrow & \Omega_\varphi \longrightarrow 0 \\ & & \oplus \downarrow & & \downarrow \oplus & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_\varphi^{(0)} & \longrightarrow & \mathcal{H}_\varphi^{(0)} & \longrightarrow & \Omega_\varphi \longrightarrow 0 \end{array} \quad (23)$$

において式(21)は, v_0, v_1 が $\text{Dens}(\log \Delta)$ の $\mathcal{O}_S$ -basis を与える
ことと, $\frac{1}{3} D_t^{-1} u_0, \frac{2}{3} D_t^{-1} u_1$ が $\mathcal{H}_\varphi^{(0)}$ の $\mathcal{O}_S$ -basis を与えることの
同等性を主張しているのである。

v_0 をとくに Euler operator と呼んだ。一般に simple singul-
arity の versal deformation でも, その system of Gauss-
Manin を explicit に求めることは, 繁雑である。

(勿論, その discriminant を求めることも) しかし, ψ_0 はいつも容易に求まる。因みに, A_l -singularity: $y^{l+1}=0$ の versal deformation

$$\varphi(x, y) = y^{l+1} + \sum_{i=1}^{l-1} x_i y^i$$

について,

$$u_k = \int \delta(t - \varphi) y^k dy \quad (k=0, \dots, l-1)$$

とおいて, その Euler operator を求めると

$$\psi_0 = (tD_t + \sum_{i=1}^{l-1} \frac{l-i+1}{l+1} x_i D_{x_i})$$

$$\psi_0 \Delta = l \Delta$$

$$\psi_0 u = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l+1} & & \\ & \ddots & \\ & & -\frac{1}{l+1} \end{bmatrix} u$$

(27)

$$u = {}^t(u_0, \dots, u_{l-1})$$

といった具合になる。これから, とくに quasi-homogeneous polynomial である discriminant Δ の weight が,

$$(1; \frac{1}{l}, \frac{1}{l} \frac{1}{l+1}, \dots, \frac{1}{l} \frac{2}{l+1})$$

であることが判る。

このように, system of Gauss-Manin (3) から discriminant を記述する方程式 ψ_0, ψ_1 を導き出すことができる。以下考えたことは, (3) と ψ_0, ψ_1 の関係をより具体的に把握することである。

§3 方程式系の変換

A_2 -singularityの場合に戻ろう。方程式系(3)を分数巾の微分作用素(即ち“量子化された接触変換”)を用いて, ψ_0, ψ_1 に関する方程式系(22)に変換しようというのが, 我々の当面の目標である。

結果は, 次の通り。

命題 分数巾微分作用素による変換

$$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

を考える。このとき, ψ_0, ψ_1 の満たす方程式系は,

$$\begin{cases} \psi_0 \psi = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \\ & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \psi \\ \psi_1 \psi = 0 \end{cases} \quad (29)$$

where $\psi = {}^t(\psi_0, \psi_1)$

である。

(29)から, ψ は const 倍を除いて,

$$\psi = \begin{pmatrix} \Delta^{\frac{1}{3}} \\ \Delta^{\frac{1}{6}} \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

上に述べた変換は, 解 u の積分表示; Gauss超幾何函数の Euler 積分表示; に他ならない, 方程式(1)の u と ψ の解を超幾何函数 $F(\alpha, \beta; \gamma; t)$ を用いて書くと,

4

$$u = \bar{x}^1 \left[F\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}; \frac{t-t_0}{2t_0}\right) - \frac{3t_0}{x} F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}; -\frac{t-t_0}{2t_0}\right) \right], t_0 = 2i\left(\frac{x}{3}\right)^{3/2} \quad (31)$$

となる。 $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ の Euler 積分表示

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = cte \int_1^\infty t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{\gamma-\beta-1} (t-x)^{-\alpha} dt \quad (32)$$

を一般化された微分

$$(D_x^\gamma f)(x) = cte \int_1^\infty (t-x)^{-\gamma-1} f(t) dt \quad (33)$$

を用いて書き直すと

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = cte D_x^{\alpha-1} [x^{\alpha-\gamma} (x-1)^{\gamma-\beta-1}] \quad (34)$$

という表示をもつ。これと()を合わせて、結論

$$\begin{cases} \Delta^{\frac{1}{2}} \bar{x}^1 D_t^{\frac{1}{3}} u_0 = cte \Delta^{\frac{1}{3}} \\ \Delta \bar{x}^2 D_t^{\frac{2}{3}} u_0 = cte \Delta^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

を得る。しかし、命題自体の証明は、純粋に代数化できる。

このような分数中の微分作用素による変換、即ち、量子化された接触変換を導入した動機は、一般の simple singularity の deformation の場合に、discriminante の満す方程式系が、system of Gauss-Manin を具体的な level でどの程度統制しているかを知りたい為である。

§4 Stokes係数の決定

A_2 -singularity の Laplace 像の満す方程式系

$$\begin{cases} \tau D_\tau w = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x \\ -\frac{2}{9}x^2 \end{pmatrix} \tau - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\} w \\ D_x w = - \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{x}{3} \end{pmatrix} \tau w \end{cases} \quad (12)$$

を考える。この方程式に変換

$$w = \begin{pmatrix} \tau^{\frac{1}{3}} \\ \tau^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} v \quad (35)$$

を施すと,

$$\begin{cases} \{\mathcal{D}_0 + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}\} v = 0 \\ \mathcal{D}_1 v = 0 \end{cases} \quad (36)$$

を得る。但し, $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ は、次の様に定義される。

$$\mathcal{D}_0 = \tau D_\tau - \frac{2}{3} x D_x, \quad \mathcal{D}_1 = D_\tau D_x + \frac{2}{9} x^2 \tau$$

更に, v を Laplace 逆変換: $v = \int_0^\infty e^{t\lambda} R(t) dt$; すると, R は次の方程式を満す。

$$\begin{cases} \{\mathcal{D}_0 + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\} R = 0 \\ \mathcal{D}_1 R = 0 \end{cases} \quad (37)$$

ゆえに, $R = t^{\frac{1}{6}} (\Delta^{\frac{1}{6}}, \Delta^{\frac{1}{6}})$ が const 倍を除いて成立する。従って, w との w は, 次の積分表示をもつ。

命題

$$W = \begin{pmatrix} \tau^{\frac{1}{3}} \int_{\Gamma} e^{i\tau t} \Delta^{\frac{7}{6}} dt \\ \tau^{\frac{2}{3}} \int_{\Gamma} e^{i\tau t} \Delta^{\frac{1}{6}} dt \end{pmatrix} \quad (38)$$

ここで、積分路 Γ は、積分が収束するようにとる。又、 Γ に応じて、上の方程式の独立解が得られる。

Remark 上の積分表示は、Hankel 関数の積分表示

$$H_{\nu}^{(1,2)}(\tau) = cte \left(\frac{\tau}{2} \right)^{\nu} \int_{\Gamma_{1,2}} e^{i\tau t} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt$$

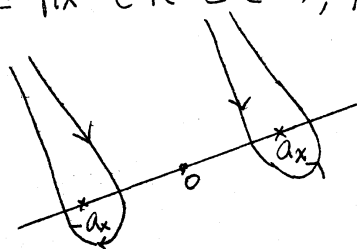
に対応している。

さて、Laplace 像の満たす方程式 (12) の解の基本系として、次のものとする。

$$Y_1(\tau) = \begin{pmatrix} \tau^{\frac{1}{3}} \int_{\Gamma_{1,x}} e^{i\tau t} \Delta^{\frac{7}{6}} dt & \tau^{\frac{1}{3}} \int_{\Gamma_{2,x}} e^{i\tau t} \Delta^{\frac{7}{6}} dt \\ \tau^{\frac{2}{3}} \int_{\Gamma_{1,x}} e^{i\tau t} \Delta^{\frac{1}{6}} dt & \tau^{\frac{2}{3}} \int_{\Gamma_{2,x}} e^{i\tau t} \Delta^{\frac{1}{6}} dt \end{pmatrix} \quad (39)$$

但し、 $\Gamma_{1,2,x}$ は次のものである。

($x \neq 0$ で、 x を fix したときの、 t -平面の picture)



$$a_x = 2i \left(\frac{x}{3} \right)^{3/2}$$

積分路の漸近方向は、 $\operatorname{Re} \tau t \rightarrow -\infty$ as $|t| \rightarrow +\infty$ となるようにとる。 $Y_1(\tau)$ の漸近展開は次の如くなる。

$$Y_1(\tau) \sim \left\{ \begin{pmatrix} r_1(\frac{1}{3}) & r_2(\frac{1}{3}) \\ r_1(\frac{2}{3}) & r_2(\frac{2}{3}) \end{pmatrix} + O(\eta^1) \right\} \eta^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ i \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \eta \right\} \quad (40)$$

$$\text{in } \delta_1 = \{-\pi < \arg \eta < \pi\}$$

ここで, $\eta = 2(\frac{\pi}{3})^{3/2}$ であり, $\gamma_j(V)$ は, V と X に depend する。
さて, 角領域 δ_2, δ_3 を

$$\delta_2 = \{0 < \arg \eta < 2\pi\}, \quad \delta_3 = \{\pi < \arg \eta < 3\pi\}$$

によって定義しよう。(48)の解の基本系 Y_2, Y_3 で,

$Y_j \sim$ the same asymptotic expansion as (40) in δ_j , $j=2,3$
となるものを考える。このとき,

$$Y_2 = Y_1 C_1, \quad Y_3 = Y_1 C_2 \quad (41)$$

という関係を得るが, これらの non-singular 行列を Stokes 係数というのである。通常, Stokes 係数を求めることは, 困難な問題であるが, 今の場合 C_1, C_2 は, 積分表示(39)のあるおかげで, 比較的容易に求められ,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & e^{\frac{\pi i}{3}} \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} & 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

を得る。

我々は, 複素領域における oscillatory integral の漸近挙動の問題を, この様にある解の基本系達の漸近展開と Stokes 係数を決定する, 即ち, Stokes 現象を解析するという方向で精密化していきたいと思う。

Reference

V. I. Arnold [1]; Remarks on the method of stationary phase and Coxeter numbers, (In Russian). Russ. Math. Surv. vol 28, No 5, 1973, pp 17-44.

B. Malgrange [1]; Integrals asymptotiques et monodromie. Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup 7 pp 405-430.

F. Pham [1]; Caustiques, phase stationnaire et micro-fonctions. Acta, Sci. Vietnamica 1977

K. Saito [1]; On the uniformization of complement of discriminant loci, 1975. Several Complex Variables. AMS, Providence

[2], 78-79年度 東京大学での講義.