

ベクトル値最短経路問題

長岡工業高等専門学校 (Nagaoka Technical College)

涌田和芳 (WAKUTA Kazuyoshi)

1. はじめに

Sniedovich[3]は、多目的最短経路問題を有限段階の多目的決定過程で定式化し、DPアルゴリズムにより解いた。一方、最短経路問題は、無限段階の決定過程すなわち吸収状態を持つマルコフ決定過程と見ることが出来る。Sancho[2]とBertsekasとTsitsiklis[1]は、確率的 shortest 経路問題を解くために、マルコフ決定過程モデルを考え、それを政策改良法で解いた。本報告では、多目的最短経路問題をマルコフ決定過程として定式化し、政策改良法で解く。最初に、多目的最短経路問題と一目的最短経路問題の相違について議論する。次に、locally efficient policyを導入し、すべての点から目的地への efficient なすべてのパスを求めるアルゴリズムを与える。

2. 多目的最短経路問題

$\bar{R} = R \cup \{\infty\}$ とおく。 $a=(a_1, \dots, a_m)$, $b=(b_1, \dots, b_m) \in \bar{R}^m$ に対して, $a \geq b \Leftrightarrow a_k \geq b_k, k=1, \dots, m$; $a \geq b \Leftrightarrow a \geq b, a \neq b$; $a > b \Leftrightarrow a_k > b_k, k=1, \dots, m$. $U \subset \bar{R}^m$ に対して, $e(U) = \{x \in U \mid x \in R^m \text{ かつある } y \in U \text{ に対して } y \leq x \text{ ならば } y=x\}$ とおく。

点 $\{1, 2, \dots, N\}$ をもつ有向ネットワークを考え、 N は目的地とする。各枝 (i, j) の距離を $c(i, j) \in R^m$ とする。すべての点から目的地へのパスが少なくとも1つ存在するとし、サイクル $i \rightarrow j_1 \rightarrow \dots \rightarrow j_k \rightarrow i$ に対して、 $c(i, j_1) + \dots + c(j_k, i) \geq 0$ と仮定する。この多目的最短経路問題 (MOSP) に対して、次のような多目的マルコフ決定過程 (MOMDP) を考える。

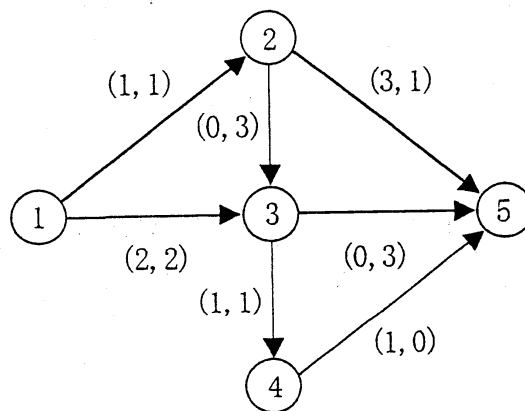
$S = \{1, 2, \dots, N\}$: 状態空間, $A(i) = \{j \in S \mid j \text{ は } i \text{ の直後の点}\}$: 行動空間, $T(i, a) = j, a \in A(i), a = j$: 推移法則, $c(i, a)$: コスト関数, N は目標状態で, $A(N) = N, c(N, N) = 0$ とする。政策は、確定的定常政策である。この全体を G とし、 $f \in G$ を用いたときの合計コストを $I_f(i) = (I_f^1(i), \dots, I_f^m(i)), i \in S$, で表す。 $I_f(i_1) \in e(V(i_1)), i_1 \in S$, ただし $V(i_1) = \bigcup_{f \in G} \{I_f(i_1)\}$ であるとき、 f は efficient であるという。 $f \in G$ の下で、すべての $i \in S$ から N が到達可能であるとき、 f は proper であるという。 f が proper であることは、 $I_f^k(i), i \in S$, が有限であることと同値である。

3. 反例

多目的最短経路問題と一目的最短経路問題の間にはいくつかの相違がある。まず最初に、MOMDP に対する efficient な政策は、すべての点から N への efficient なパスを与えるが、逆は正しくないことを示す。

反例 3.1.

次の MOSPP で、パス $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ は、efficient であるが、これを一部分とする efficient な政策は存在しない。



$B^m(S)$ を S から R^m へのすべての関数の集合とし、 $u \in B^m(S)$ に対して

$$T_a u(i) = c(i, a) + u(T(i, a)), \quad i \in S, a \in A(i),$$

$$T_f u(i) = T_{f(i)} u(i),$$

$$I_f^a(i) = T_a I_f(i).$$

とおく。 $u, v \in B^m(S)$ に対して、 $u \geq v \Leftrightarrow u(i) \geq v(i), i=1, \dots, m$; $u \geq v \Leftrightarrow u \geq v, u \neq v$; $u > v \Leftrightarrow u(i) > v(i), i=1, \dots, m$ とする。

補題 3.1. $f \in G$ は proper とする。このとき

- (i) $I_f^g \leq I_f$ ならば、 g は proper で、 $I_g \leq I_f$.
- (ii) $I_f^g = I_f$ ならば、 g は proper で、 $I_g = I_f$.
- (iii) $I_f^g \geq I_f$ で g が proper ならば、 $I_g \geq I_f$.

反例 3.2. 反例 3.1 と同じ MOSPP を考える. 政策 α_1 を $\alpha_1(1)=1, \alpha_1(2)=1, \alpha_1(3)=1$ とする. このとき,

$$I_{\alpha_1}(1) = (3,5), I_{\alpha_1}(2) = (2,4), I_{\alpha_1}(3) = (2,1)$$

$$I_{\alpha_1}^2(1) = (4,3), I_{\alpha_1}^2(2) = (3,1), I_{\alpha_1}^2(3) = (0,3).$$

$I_{\alpha_1}^a(i) \leq I_{\alpha_1}(i)$ なる $(i,a), i \in S, a \in A(i)$ は存在しない, すなわち, $I_{\alpha_1}^s \leq I_{\alpha_1}$ なる政策 g は存在しない. しかし, $I_{\alpha_1}(1) \notin e(V(1))$ なので α_1 は efficient ではない.

4. Locally efficient policies

$I_f^s \leq I_f$ なる g が存在しないとき, f は locally efficient であるという.

命題 4.1. i から N への任意の efficient なパスは, ある locally efficient な政策の一部分である.

[証明] 与えられた efficient なパスを含む政策を選ぶ. その政策を可能な限り改良する. その結果, locally efficient な政策を得る. 与えられた efficient なパスは, 変更されないことに注意する.

命題 4.2. f が locally efficient であるということは, $I_g \leq I_f$ であるような g が存在しないことと同値である.

[証明] f が locally efficient でないならば, 補題 4.1 より, $I_g \leq I_f$ なる政策 g が存在する. 逆に, $I_g \leq I_f$ なる政策 g が存在するとき, $I_f^f \leq I_f$ なる政策 f_1 が存在する. したがって, f は locally efficient ではない.

アルゴリズム

n 段階までに得られた locally efficient な政策の集合を E_n , それ以外の政策の集合を F_n で表す. また, すべての locally efficient な政策の集合を E_L で表す.

Phase I

1. 任意の政策 f_1 を選ぶ.
2. $I_{f_n}(i), i \in S$, を計算する.
- 2.1 f_n が proper でないならば,

$$E_n = E_{n-1}, F_n = F_{n-1} \cup \{f_n\}.$$

政策 $f_{n+1} \in (G \setminus (E_n \cup F_n))$ を選んで Step 2 へ行く.

2.2. f_n が proper ならば $a \neq f_n(i)$ を選んで, g を $g(i) = a$ かつ $g(j) = f_n(j)$, $j \neq i$ なる政策とする. これをすべての $i \neq N$ と $a \in A(i)$ に対して行う. もし f_n によって dominate される $\{g_1, \dots, g_k\}$ が見つければ

$$F_n = F_{n-1} \cup \{g_1, \dots, g_k\}$$

とおく.

2.2.1. もし $I_{f_n}^a(i) \leq I_{f_n}(i)$ なる (i, a) がなければ, f_n は locally efficient である.

$$E_n = E_{n-1} \cup \{f_n\}$$

とおく. 政策 $f_{n+1} \in (G \setminus (E_n \cup F_n))$ を選んで Step 2 へ戻る.

2.2.2. もし $I_{f_n}^a(i) \leq I_{f_n}(i)$ なる (i, a) があれば, f_{n+1} を $f_{n+1}(i) = a$ かつ $f_{n+1}(j) = f_n(j)$, $j \neq i$, として Step 2 へ戻る.

3. $E_n \cup F_n = G$ となったら止める. このとき, E_L を得る. Phase II へ行く.

Phase II

1. $f \in E_L$ を選ぶ.

$$d_f^g(i) = I_g(i) - I_f(i) \leq 0, \quad i \in (S \setminus N)$$

なる $g \in E_L$ が存在するかどうかチェックする. もし, そのような政策がなければ, $I_f(i)$ は efficient である. さもないと, $I_f(i)$ は efficient ではない.

[1] Bertsekas & Tsitsiklis (1991) An analysis of stochastic shortest path problems. Math. Oper. Res. 16:580-595.

[2] Sancho (1985) Routing problems and Markov decision processes. J. Math. Anal. Appl. 105:76-83.

[3] Sniedovich (1988) A multi-objective routing problem revisited. Eng. Opt. 13:99-108.