

複素力学系やフラクタル図形 から生じる Cuntz 環の仲間とその表現

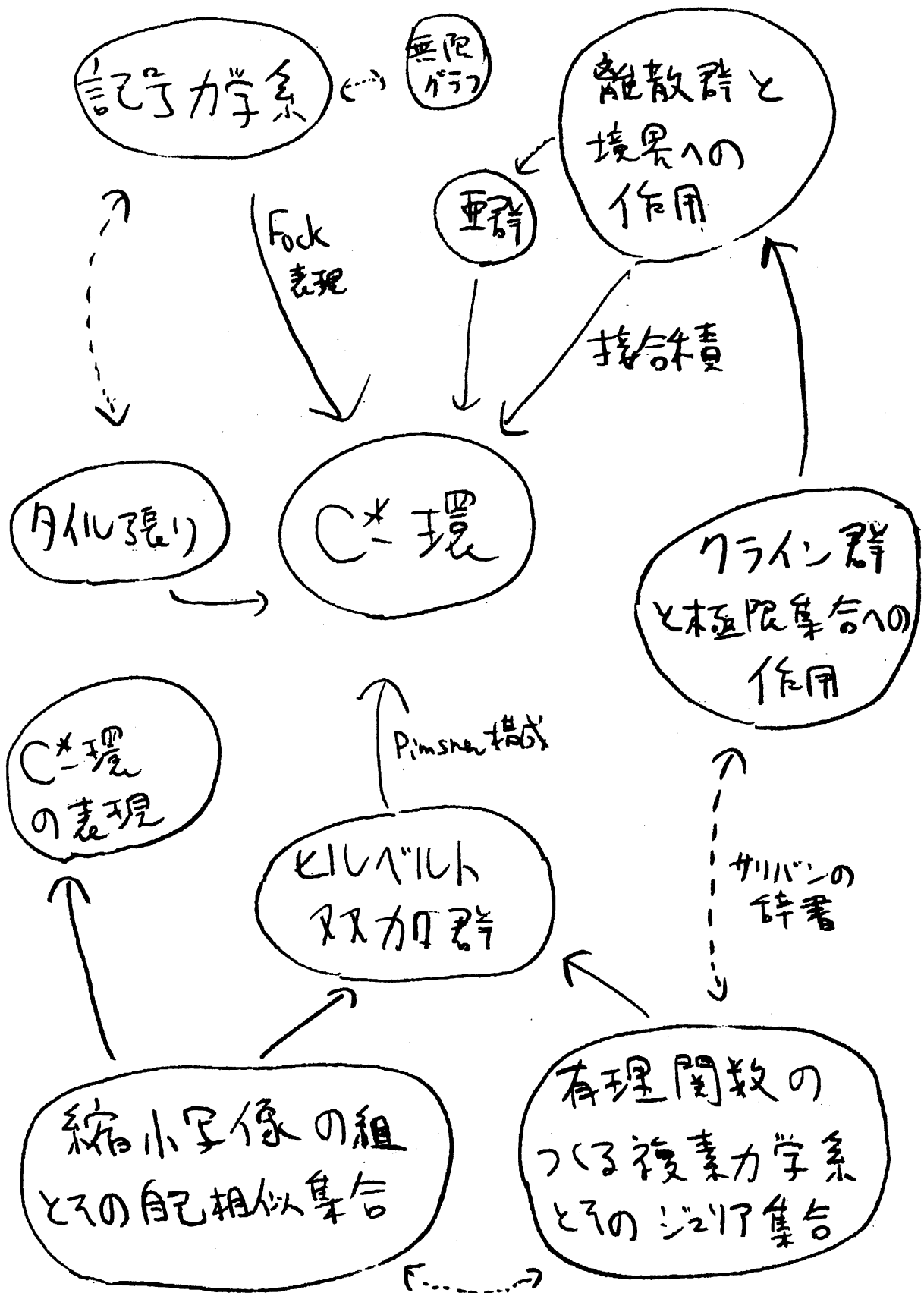
九州大学大学院数理学研究院

綿谷 安男 (Watatani, Yasuo)

Department of Mathematical Sciences,
Kyushu University

① はじめに

縮小写像の組からつくられるフラクタル図形や複素力学系のジュリア集合のよち自己相似性をもつ対象と Cuntz 環のよち純無限単純 C^* 環という作用素環の対象がどのように関連しているかを考えたい。



Cantor 集合のような自己相似性をもつ構造と Cuntz 環のような作用素環との間をつなぐ方法としては次の2つが最低考えられる。

- ① 自己相似性をもつ構造から C^* 環を構成し、元の構造が C^* 環の性質にどう反映しているかを調べる。例えば記号カ字系であるサブリント $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ に対し C^* 環 $\mathcal{O}_\sigma$ を構成し、その $\mathcal{O}_\sigma$ が単純 C^* 環になる条件を求め、 $\mathcal{O}_\sigma$ の K -群 $K_0(\mathcal{O}_\sigma)$ 等から元の位相カ字系 $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ の重要な不変量を導出した松本君の仕事がある。
- ② 自己相似性をもつ構造から特別な C^* 環である Cuntz $\mathcal{O}_n$ だけでなくその表現までこめて構成し、表現を分類する。この研究集会への

鈴木, 阿部-川村 の 話 で (わ)しいことをみて
もよう。例えば Hausdorff 次元の違いが表現を
区別する指標になりうる ([6])。

上の2つの道 ①と②は関連しているか
異なる接近なので, ①で簡単に例示して
説明するが, ②以降は, もっぱら①に
ついて, 梶原, Pinzari, 米谷と私の共同
研究 ([2], [3], [5]) について紹介する。
次のような問題についてはほとんど何もでき
ていないので, 次の機会にする。

- ① フラクタル図形上のうつらシアンのような解析学
は Cunt_3 環上でのように展開されるか?
- ② 距離構造や複素解析構造は Cunt_3 環
上のどんな上部構造を定めているのか?

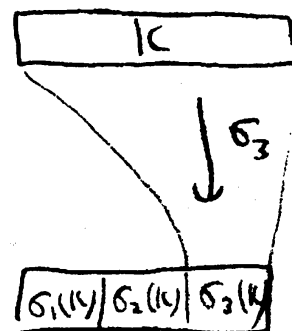
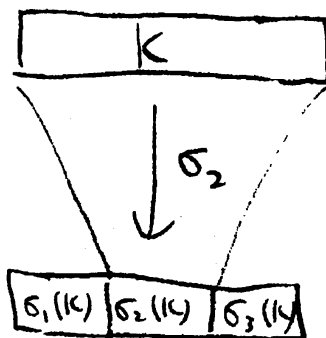
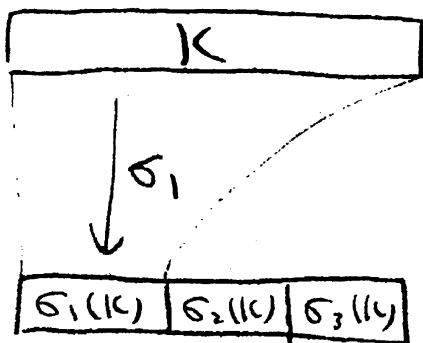
④何か似ているのか

コンパクト距離空間 (X, d) 上の真の縮小写像の
 N 個の組 $\sigma_1, \dots, \sigma_N : X \rightarrow X$ に対し $K_0 = X$,
 $K_1 = \bigcup_{i=1}^N \sigma_i(K_0)$, $\dots$, $K_{n+1} = \bigcup_{i=1}^N \sigma_i(K_n)$,
 と減少する空間の列 $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \dots$ を考え.

この時 $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ とおくと

$$\star \quad K = \bigcup_{i=1}^N \sigma_i(K)$$

をみたす. この $\star$ を弱い意味での「自己相似性」という. 縮小写像の組をうまく選べば K としてフラクタル図形が表れる.



ここで、上の図でコンパクト空間 K をヒルベルト空間 H におきかえ、縮小写像 σ_i を作用素 S_i でおきかえよう。特に K と $\sigma_i(K)$ が「相似」に相当するように ヒルベルト空間 H とその像 $S_i(H)$ が内積を保って同型になるようにしよう。つまり S_i は等距離作用素 (isometry) とすればよい。それは「作用素の逆が存在する」と $S_i^* S_i = I$ とする。また $K = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i(K)$ に対処するよう、 S_i の像 $S_i(H)$ が全体空間 H を張り、さらに各 $S_i(H)$ が互いに直交すること仮定しよう。それを作用素のことばでいうと

$$S_1 S_1^* + \cdots + S_n S_n^* = I$$

となる。このようにしてできた作用素 $S_1, \dots, S_n$ から生成された C^* 環 $\mathcal{O}_n$ は $Cuntz$ 環といい、その実現の仕方に依らず同型で単純な C^* 環になる。

以上のことを簡単に表にしておく:

コンパクト距離空間 K	ヒルベルト空間 H
縮小写像 $\sigma_1, \dots, \sigma_N: K \rightarrow K$	等距離作用素 ($S_i^* S_i = I$) $S_1, \dots, S_N: H \rightarrow H$
自己相似性 $K = \bigcup_{i=1}^N \sigma_i(K)$	像が直交して全体を張る $S_i(H) \perp S_j(H) \quad (i \neq j)$ $H = \bigoplus_{i=1}^N S_i(H)$ つまり $I = S_1 S_1^* + \dots + S_N S_N^*$

ここで K 上の適切な測度 μ を使って

$H = L^2(K, \mu)$ とおくと Radon-Nykodym の重みをつけ

ると σ_i は等距離作用素 S_i を誘導し,

Cuntz 環 $\mathcal{O}_N$ の表現 $\pi: \mathcal{O}_N \rightarrow B(H)$ が得られる。これが

(B) の道である。しかし自己相似集合 K の位相空間

としての性質を反映できるようにヒルベルト双加群を

つらつかう C^* 環を構成すると, C_{unt} 環とは違った C^* 環がでてくる。これはその K 群をみることで判定できる。これが (A) の道である。(B) の道では K の Hausdorff 次元が C_{unt} 環の表現の違いに間接的に影響するが, (A) の道では何に対応するのかは現在不明である。このように (A) と (B) の両方の道はそれぞれに意味があるように思われる。

[2] キルバート双加群をもつ C^* 環

A を C^* 環とする。右 A 加群 X 上に C^* 環 A に値をとる正値内積 $(\cdot, \cdot)_A: X \times X \rightarrow A$ が定まっていて, そのルノ $\|x\|_2 = \|(\cdot, x)\|_\infty^{1/2}$ について完備になっている時に X を (右) キルバート A -加群という。其役をもつ X 上の有界作用素全体を $\mathcal{K}(X)$ と

すると $\mathcal{L}(X)$ は C^* -環になる。 $x, y \in X$ に対し
 "rank one" 作用素 $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}(X)$ を

$$\theta_{x,y}(z) = x(y|z)_A, \quad (z \in X)$$

で定める。これらで張られたものの閉包を $\mathcal{K}(X)$ とする。
 これも C^* -環で $\mathcal{L}(X)$ のイデアルとなる。

Def X が C^* -環 A 上の ヒルベルト双加群 とは

- (1) X は (右) ヒルベルト A -加群
 (2) $\phi: A \rightarrow \mathcal{L}(X)$ とは $*$ -homomorphism があり右 A -作用
 と可換になっている。

$$\text{よって } a \cdot \int \cdot b = \phi(a) \int b \quad (a, b \in A, \int \in X)$$

により, X は 本当に A - A 双加群となっている

Def C^* -環 A 上の双加群 X からの Fock 空間

$F(X)$ を次で定める:

$$F(X) = A \oplus X \oplus X^{\otimes 2} \oplus X^{\otimes 3} \oplus \dots$$

この $F(X)$ も ヒルベルト A -加群である。

$F(X)$ 上に $\lambda \in X$ の生成作用素, $T_\lambda \in \mathcal{L}(F(X))$

次で定める: $\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n \in X^{\otimes n}$, $a \in A$

$$\begin{cases} T_\lambda a = \lambda \cdot a \\ T_\lambda \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n = \lambda \otimes \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n \end{cases}$$

すると $T_\lambda^* \in \mathcal{L}(F(X))$ は消滅作用素で

$$\begin{cases} T_\lambda^* a = 0 \\ T_\lambda^* (\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n) = (\lambda | \lambda_1)_A \lambda_2 \otimes \cdots \otimes \lambda_n \end{cases}$$

また A の $F(X)$ 上の表現 $i: A \rightarrow \mathcal{L}(F(X))$ を

次で定める: $a \in A$, $b \in A$, $\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n \in X^{\otimes n}$

$$\begin{cases} i(a) b = a b \\ i(a) \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n = \phi(a) \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n \end{cases}$$

ここで $\phi^{(n)} = \phi \otimes i \otimes \cdots \otimes i: A \rightarrow \mathcal{L}(X^{\otimes n})$ とおくと

$$i(a) = \begin{pmatrix} \phi(a) & & & \\ & \phi^{(2)}(a) & & \\ & & \phi^{(3)}(a) & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち ϕ は i の核に属する

Def $\{i(a) \in \mathcal{L}(F(X)) \mid a \in A\}$ と $\{T_x \mid x \in X\}$ を

生成した C^* -環 J_X を X 上の Toeplitz C^* -環

といい, 次の交換関係で特徴づけられる:

$$(*) \begin{cases} i(a) T_x = T_{\phi(a)x} \\ T_x i(a) = T_{xa} \\ T_x^* T_y = i(x(y)_A) \end{cases} \quad \begin{matrix} a \in A \\ x \in X \end{matrix}$$

Def $I_X := \{a \in A \mid \phi(a) \in K(X)\} \triangleleft A$ とする.

上の (*) より $i_K: K(X) \rightarrow \mathcal{L}(F(X))$ が次で与る

$$i_K(\theta_{x,y}) = T_x T_y^* \in \mathcal{L}(F(X))$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \theta_{x,y} & & & \\ & & \theta_{x,y} \otimes \text{id} & & \\ & & & \theta_{x,y} \otimes \text{id} \otimes \text{id} & \\ & 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$j := i_K \circ \phi: I_X \longrightarrow \mathcal{L}(F(X)) \quad (2)$$

$$j(a) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \phi(a) & & \\ & & \phi^{(2)}(a) & \\ & & & \phi^{(n)}(a) \\ & 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

とある。すなわち $a \in I_X$ に対し

$$i(a) - j(a) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(F(X))$$

で生成された J_X の ideal

$$\mathcal{I}_X := \overline{J_X \{i(a) - j(a) \mid a \in I_X\} J_X} \triangleleft J_X$$

による商 $\pi: J_X \longrightarrow J_X / \mathcal{I}_X$ を考える。

Def $\mathcal{O}_X = J_X / \mathcal{I}_X$ を C^* -環 X からの

生成された Cuntz-Pimsner 環 といふ (4). $\mathcal{O}_X$ は

$S_n := \pi(T_n)$ と $\hat{i}(a) = \pi \circ i(a)$, $(x \in X, a \in$
で生成される C^* -環 π -次の交差関係をもつ

普遍的な C^* 環である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{i}(a) S_x = S_{\phi(a)x} \\ S_x \widehat{i}(a) = S_x a \\ S_x^* S_y = \widehat{i}((x(y))_a) \\ \widetilde{j}(a) = \widehat{i}(a) \quad , (a \in I_x) \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} a \in A \\ x \in X \end{array} \right)$$

$$\pi: \widehat{i}_k: K(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X \quad \text{と} \quad \widehat{i}_k(\theta_{x,y}) = S_x S_y^* \\ \widetilde{j}: A \longrightarrow \mathcal{O}_X \quad \text{と} \quad \widetilde{j} = \widehat{i}_k \phi: I_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

が成り立つ。 $\widehat{i}(a) = \pi(\widehat{i}(a))$, $\widetilde{j}(a) = \pi(\widetilde{j}(a))$ に注意。

以下 a と $\widehat{i}(a)$ を同一視する。

③ 縮小写像から生成される C^* 環

Def コンパクト距離空間 K 上の N 個の縮小

写像 $\sigma_1, \dots, \sigma_N: K \rightarrow K$ に対し, C^* 環 $A = C(K)$

上のユニタリ双加算 $X = X(K; \sigma_1, \dots, \sigma_N)$ を次で

定義する。ただし $K = \bigcup_{i=1}^N \sigma_i(K)$ と仮定する

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \{(\sigma_i(y), y) \in K \times K \mid y \in K\}$$

$z \in \mathbb{C}$ への R の右岐指数を $c(z)$ とかく。 R の

シフト集合 J_R は完全不変 ($R^{-1}(J_R) = J_R = R(J_R)$)

なるべし $\Omega := \text{graph } R|_{J_R} = \{(x, R(x)) \mid x \in J_R\}$ とする

C^* 環 $A = C(J_R)$ 上のヒルベルト双加群 $X = C(\Omega)$

を次のようにする。 $f, g \in X$, $a, b \in A = C(J_R)$

$$(a \cdot f \cdot b)(n, z) = a(n) f(n, z) b(z)$$

$$(f(g))_A(z) = \sum_{x \in R^{-1}(z)} c(x) \overline{f(n, x)} g(n, z)$$

$\mathcal{O}_R := \mathcal{O}_z$ と有理関数 R から生成される C^* 環という。

Theorem (根原-W)

もし R の次数 $\deg R \geq 2$

$\Rightarrow \mathcal{O}_R$ は 純無限単純 C^* 環

(例) $R(z) = z^2 + c$, M は Mandelbrot 集合とする

① $c \notin M \Rightarrow \mathcal{O}_R \cong \mathcal{O}_2$ (Cuntz 環)

② c が M の主カージオイドの内点 $\Rightarrow \mathcal{O}_R$ は
Cuntz 環と異なり, $k_0(\mathcal{O}_R) = \mathbb{Z}$, $k_1(\mathcal{O}_R) = \mathbb{Z}$

③ $c = -2 \Rightarrow \mathcal{O}_R$ は Cuntz 環と異なり, $k_0(\mathcal{O}_R) = \mathbb{Z}$, $k_1(\mathcal{O}_R) = 0$.

《References》

- [1] J. Cuntz, Simple C^* -algebras generated by isometries, *Comm. Math. Phys.* 57 (1977), 173-185
- [2] T. Kajiwara, C. Pinzari and Y. Watatani, Ideal Structure and simplicity of the C^* -algebras generated by Hilbert bimodules, *J. Funct. Anal.* 159 (1988), 295-322.
- [3] T. Kajiwara and Y. Watatani, 準備中
- [4] M. Pimsner, A class of C^* -algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$, *Free probability Theory*, A.M.S. 1997, 189-212
- [5] C. Pinzari, Y. Watatani, K. Yonetani, KMS states, entropy and the variational principle in full C^* -dynamical systems, *Comm. Math. Phys.* 213 (2000) 331-379
- [6] M. Mori, O. Suzuki and Y. Watatani, Representations of Cuntz algebras on fractal sets, Preprint.