

接触幾何学に現われる特異点について

北大・理 山口 佳三
(Keizo Yamaguchi)

接触幾何学は一階一未知函数偏微分方程式論なる図式において、Legendre 特異点は、独立変数を指定しに時の、解に現われる特異点である。接触幾何学に現われる特異点の他の例として、ここでは、方程式に現われる“特異点”について論じた。内容は、V. V. Lychagin の次の論文の紹介である。

[L] Local classification of non-linear first order partial differential equations

Russian Math. Surveys 30:1 (1975) 105-175

詳細は、原論文を読んで頂くことにして、ここでは、問題の背景と概略を述べる。

0. 古典的一階偏微分方程式論

M は n 次元 C^∞ -多様体。 $J^1(M; \mathbb{R})$ は M 上の実数値函数の 1-jets の空間とする。 $J^1(M; \mathbb{R})$ は canonical に $T^*(M) \times \mathbb{R}$ と同一視される。このとき、 $\hat{\pi} = du - \alpha$ は $J^1(M; \mathbb{R})$ 上の接触構造

$$C = \{ \hat{\pi} = 0 \} \subset T(J^1(M; \mathbb{R}))$$

を定める。ここに、 α は $T^*(M)$ 上の canonical 1-form である。

定義と用語：(i) $J^1(M; \mathbb{R})$ の部分多様体 R は M 上の函数に対する一階（非線型）偏微分方程式系と考える。

(ii) $J^1(M, \mathbb{R}) \supset R$ の解 $\gamma \in C^\infty(M) \iff J^1(\gamma); M \rightarrow J^1(M, \mathbb{R})$ graph
の像が R に含まれる。

$S = J^1(\gamma)(M)$ は、このとき、接触多様体 $(J^1(M, \mathbb{R}), C)$
の Legendre 部分多様体である。以下では $S \subset R$ なる
Legendre 部分多様体 S をすべて R の解と呼ぶ。

(iii) $\pi \in \hat{\pi}$ の R への制限とする。さらに、 $\forall x \in R$ で、
 $T_x(R)$ の部分空間 $D(x)$ を次で定める。

$$D(x) = \{ X \in T_x(R) \mid \pi(X) = 0 \} = T_x(R) \cap C(x)$$

(iv) $J^1(M, \mathbb{R}) \supset R$ が包含系である $\iff \forall x \in R$ にあって
 $T_x(R)$ は $(J^1(M, \mathbb{R}), C)$ の Legendre 部分空間 (i.e.
 $(C(x), d\pi)$ の Lagrangean 部分空間) を含んでいる。

((これは、方程式系 R に対する compatibility condition である))

このとき、古典的-一階偏微分方程式論の内容は、次の 2
つから成ると考えられる。

Regular な包含系 R (i.e. $D \subset T(R)$ が部分系) に対して

(A) 接触同値問題 (接触多様体の部分多様体論)

$\forall x \in R$ の近傍に $(J^1(M, \mathbb{R}), C)$ の正準座標 $(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$
がとれて、 $R = \{ p_1 = \dots = p_n = 0 \}$ となる。このとき、正
準座標では $C = \{ du - \sum_{i=1}^n p_i dx_i = 0 \}$ とする $J^1(M, \mathbb{R})$ の座標。

いっかえれば、regular な包含系 R は、局所的には
常に、接触変換によって、 R の次元のみによって定

ある標準的な線型方程式系に移される。従って、次の等しい包含系 (regular) は、すべて局所接触同値である。

(B) 求積論

上のような正準座標を、いかにして求めるか？この部分は、いわゆる特性系の理論であり、 x_i, u, p_i は常微分方程式を解いて得られる。

以上の内容については、上記、*Lychagin* の論文の前半を、し次を参考にされたい。

大島・小松 著 一階偏微分方程式 岩波基礎数学

我々は、以下において、包含系 R が regular ではない場合に、主として (A) の問題を論じたい。すなわち、 R は $J'(M, R)$ の部分多様体として、 D の特異点を考察する。

1. 包含系の特異点と Hessian

包含系 $R \subset J'(M, R)$ に対して

$$x \in R \text{ が特異点} \iff \pi_x = 0 \quad (\text{i.e., } D(x) = T_x(R))$$

と定める。特に R の余次元が 1 であるとき、

$$x \in R \text{ が特異点} \iff T_x(R) = C(x)$$

である。従って、この場合、 x を原点とする $J'(M, R)$ の正準座標 $(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ をとると、 x の近傍で、

$$R = \{ u = f(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) \}$$

と書かれる。 $\pi = df - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ であるから、このとき、 x は関数 f の特異点である。我々は、特異点 x の近傍での R の様子を接触同値の下で調べたい。

⑨ 特異点における Hessian

R の特異点 x は R 上 π の特異点であるから、 x での R の Hessian h_π を次で定める。

$$\begin{aligned} h_\pi : T_x(R) \times T_x(R) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\longmapsto v_1(\pi(Y)) \end{aligned}$$

ここに、 Y は $Y_2 = v_2$ なる R 上のベクトル場である。これに *well-defined* なることは、通常の関数 f の特異点での Hessian の場合（いわば $\pi = df$ の場合）と同様であり、次も容易にわかる。

$$h_\pi(v_1, v_2) - h_\pi(v_2, v_1) = d\pi(v_1, v_2)$$

簡単のため、以下、 R の余次元は 1 とする。このとき $T_x(R) = C(x)$ であり、 $d\pi$ は $T_x(R)$ の symplectic 形式 $\langle, \rangle$ を定める。従って Hessian h_π は $\langle, \rangle$ を用いて $T_x(R)$ の線型変換 H_x として表現できる。

$$H_x : T_x(R) \rightarrow T_x(R) : \text{線型変換}$$

$$\langle H_x(v_1), v_2 \rangle = h_\pi(v_1, v_2)$$

このとき、 H_x は次を満足している。

$$\langle H_x(v_1), v_2 \rangle - \langle H_x(v_2), v_1 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

明らかに、接触変換 φ は、包含系の特異点も特異点に移し、その微分 φ_* は、 $(T_x(R), \langle, \rangle)$ に対しては *conformal symplectic* な変換として働く。さらに φ_* は H_x と可換である。 H_x は接触変換の下で、包含系の特異点を分類しようとするとき、最初の目安となる。

従って、我々の最初の課題は、*symplectic* ベクトル空間 $(V, \langle, \rangle)$ において、 $\langle H(v_1), v_2 \rangle + \langle v_1, H(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ を満たす $H: V \rightarrow V$ と $Csp(V)$ の下で分類することである。この部分については、[L] Chapter III, §2 を参照されたい。

2. 単独方程式の場合への帰着

接触多様体 $(J^1(M, \mathbb{R}), C)$ において、函数 $f \in C^\infty(J^1(M, \mathbb{R}))$ は、 $J^1(M, \mathbb{R})$ 上の無限小接触変換 X_f を次で定める；

$$\begin{cases} \hat{\pi}(X_f) = f \\ X_f \lrcorner d\hat{\pi} \equiv -df \pmod{\hat{\pi}} \end{cases}$$

$J^1(M, \mathbb{R}) \supset R$ を余次元 r の包含系として、 $x \in R$ の特異点とする。適当な函数 f を用いて、 x の近傍で R を 1 次元ふくらませて、余次元 $r-1$ の *regular* な包含系 Q が、局所的に次のようにして作られる： $f \in C^\infty(J^1(M, \mathbb{R}))$ を $f(x) \neq 0$ なる函数とする。さらには、 $(X_f)_x \notin C(x)$ であり、従って、

$(X_f)_x \notin T_x(R)$ である。 X_f の生成する 1-parameter 接触変換群を

Φ_t とすると

$$\begin{aligned} \Psi: R \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow J^1(M, \mathbb{R}) \\ (y, t) &\longmapsto \Psi(y, t) = \Phi_t(y) \end{aligned}$$

は、 $(x, 0)$ の近傍 $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ で埋め込みとなる。このとき、

$Q = \Psi(U \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ は、regular な余次元 $r-1$ の包含系であり、

U は余次元 1 の部分多様体として含んでいる。

従って、0. の結果より、 x の近傍で、 x を原点とする正準座標 $(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ がとれて、

$$Q = \{p_1 = \dots = p_{r-1} = 0\}$$

となる。 x は R の特異点であるから、 $T_x(R) \subset C(x) = \{du - \sum_{i=1}^n p_i dx_i = 0\}$

よって、 x の近傍で、

$$R = \{p_1 = \dots = p_{r-1} = u - f(x_r, \dots, x_n, p_r, \dots, p_n) = 0\}$$

と書ける。さらに、この正準座標で、 $X_{p_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}$ である。ま

た、 R は包含系であるから、 $X_{p_1}, \dots, X_{p_{r-1}}$ は R に接してい

る。従って、 $f = f(x_r, \dots, x_n, p_r, \dots, p_n)$ である。よって次に得に、

命題 1 ([L] Chap. III §3 p.150)

$J^1(M, \mathbb{R}) \supset R$ は余次元 r の包含系とする。 $x \in R$ は

特異点とするとき、 x を原点とする $J^1(M, \mathbb{R})$ の正準座標

$(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ と関数 f が存在して、 R は x の近傍で、

$$R = \{p_1 = \dots = p_{r-1} = u - f(x_r, \dots, x_n, p_r, \dots, p_n) = 0\}$$

と書ける。

命題1により包合系 R の特異点の近傍での様子は、余次元1の場合を調べればよい。余次元1の場合、 R は特異点 x の近傍で、 x を原点とする正準座標で、

$$R = \{ u = f(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) \}$$

と書かれる。我々の問題は、函数 f の標準形を求めることにある。

3. 標準形

この節では、余次元1の包合系 R の特異点 x において、Hessianが f の x での 2-jet と定めている様子を見る。

① Hessian の標準形

Symplectic ベクトル空間 $(V, \langle, \rangle)$ において、

$$\langle H(v_1), v_2 \rangle + \langle v_1, H(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

を満たす線型変換 $H: V \rightarrow V$ は、次のように分類される。

(概略 H の分類は、 H を Jordan 行列として表わす、 V の基底を、 $\langle, \rangle$ に関する直交関係で、どう満たすように取れるかで与えられる。)

まず、 H の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $1-\lambda$ も常に固有値となる。

従って、 V は、 $\langle, \rangle$ の下、次の形に直交分解される：

$$V = \bigoplus_{\lambda, j} E_{\lambda, j}$$

ここに、 $E_{\lambda, j}$ は固有値の組 $(\lambda, \bar{\lambda}, 1-\lambda, 1-\bar{\lambda})$ に対して定まる

とする。 x を原点とする正座標を固定する。このとき

$$\pi = dt - \sum_{i=1}^n p_i dx_i = \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - p_i \right) dx_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i \right\}$$

であり、 $\pi_x = 0$ から、 x は座標の原点であるから

$$f(x) = 0 \quad \& \quad (df)_x = 0$$

とする。従って、 $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial p_1} \right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial p_n} \right)_x \right\}$ は $(T_x(R), \langle, \rangle)$

の symplectic 基底とする。さらに

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\pi \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) = h_{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \langle H_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle.$$

同様にして

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial p_j}(x) = \langle H_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \frac{\partial}{\partial p_j} \rangle, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}(x) = \langle H_x \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right), \frac{\partial}{\partial p_j} \rangle$$

を得る。よって、 $H_x : T_x(R) \rightarrow T_x(R)$ の標準形に応じて、 f の x での 2-jet が定まる。

例として、 $H_x : T_x(R) \rightarrow T_x(R)$ が、2つの実固有値 $\lambda, 1-\lambda$ のみを持ち、それぞれ1:1に1つの Jordan 細胞を持つ場合 (i.e., $T_x(R) = E_{\lambda, 1}$ の型の標準形を持つ場合) に、 f の 2-jet を求めてみよう。この場合、 $\{v_1, \dots, v_n, w_n, \dots, (-1)^{n-s} w_s, \dots, (-1)^n w_1\}$ が symplectic 基底になるから、 $v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $(-1)^{n-i} w_i = \frac{\partial}{\partial p_{n-i+1}}$ であり、

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \langle H_x(v_i), v_j \rangle = 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}(x) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial p_j}(x) = \langle H_x(v_i), (-1)^{i-1} w_{n-j+1} \rangle = \lambda \delta_{ij} + \delta_{i-1, j} \end{cases}$$

を得る。従って、 f の x での 2-jet は

$$(1) \quad \lambda \sum_{i=1}^n x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{i+1}$$

となる。同様にして、他の Hessian の標準形より得られる f の標準形は、次の通り。

$$(2) \quad a \sum_{i=1}^n (x_i p_i + x'_i p'_i) + b \sum_{i=1}^n (x'_i p_i - x_i p'_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i p_{i+1} + x'_i p'_{i+1})$$

$$(3) \quad (-1)^{m+1} (p_m^2 + p'_m{}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (x_i p_i + x'_i p'_i) + \mu \sum_{i=1}^m (x'_i p_i - x_i p'_i) + \sum_{i=1}^{m-1} (x_i p_{i+1} + x'_i p'_{i+1})$$

$$(4) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{i+1} \pm \mu \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (x_i x_{n-i+1} - p_i p_{n-i+1})$$

$$(5) \quad a) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{i+1}$$

$$b) \quad \pm (-1)^{n+1} p_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{i+1}$$

一般の場合、 f の標準形は、上記 (1) ~ (5) の適当な和で書ける。例を少し上げてみる。 $H_x: T_x(R) \rightarrow T_x(R)$

$$(i) \quad H_x = 0 \quad \text{の場合} \quad f = 0$$

$$(ii) \quad H_x \text{ の固有値が、すべて実で相異なる、} \frac{1}{2} \text{ を含むない。}$$

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i p_i$$

$$(iii) \quad H_x \text{ の固有値が、すべて相異なる、} \operatorname{Re} \lambda = \frac{1}{2} \text{ 且 } \operatorname{Im} \lambda \neq 0。$$

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i p_i + \mu_i \sum_{i=1}^n (x_i^2 + p_i^2)$$

我々の、次の課題は、正準座標をさるに、取りかえて、 f をいつ、Hessian の定める 2 次の標準形に移せるかである。
 (この部分は、いわば、函数の特異点で、非退化の仮定の下) に、Morse の Lemma を示す部分に、対応している。

4. 局所接触同値性と局所可解性

この節では、それぞれ特異点 x_1, x_2 を持つ単独方程式

R_1, R_2 に対して, $R_1 \ni R_2$ に移し, $\varphi(x_1) = x_2$ とする局所接触変換 φ の存在問題は, いわば φ の graph が満たすべき, 特異点を持つ単独方程式の, 特異点での局所可解性に帰着されることを見る。

まず, 局所接触同値性より準備する。

$$\begin{array}{ccc} J^1(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & T^*(M) \times \mathbb{R} \\ \downarrow & & \\ J^1_z(h) & \longmapsto & ((dh)_z, h(z)) \end{array}$$

は, 微分同型である。この同一視の下, $J^1(M, \mathbb{R})$ の $T^*(M)$ への射影を π とする。また, $J^1(M, \mathbb{R})$ の微分同型 φ が $\varphi^* \hat{\pi} = \hat{\pi}$ を満たすとき, $\hat{\pi}$ -diffeo. と呼ぶ (φ が $\varphi^* \hat{\pi} = t \cdot \hat{\pi} \quad \exists t \in C^\infty(J^1(M, \mathbb{R}))$ を満たすとき, 接触変換である)。 $J^1(M, \mathbb{R})$ の部分多様体 R_1, R_2 とその上の点 x_1, x_2 に対して, (R_1, x_1) と (R_2, x_2) が局所 $\hat{\pi}$ -同値であるとは, $\varphi(x_1) = x_2$ なる局所 $\hat{\pi}$ -diffeo. $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ (locally) が満たすものが存在するということ。我々の出発点は次の命題である。

命題 2 ([L] Chap 2 §1 p.130)

$J^1(M, \mathbb{R})$ の超曲面 R_1, R_2 に $x_1 \in R_1, x_2 \in R_2$ で

$$\pi_* : T_{x_i}(R_i) \rightarrow T_{\pi(x_i)}(T^*(M)) : \text{linear iso} \quad (i=1, 2)$$

を満たしているとする。このとき次は同値である。

(i) (R_1, x_1) と (R_2, x_2) は局所 $\hat{\pi}$ -同値である。

(ii) $\exists \varphi: R_1 \rightarrow R_2$: 局所微分同型 $\varphi(x_1) = x_2$ と $\varphi^* \pi_2 = \pi_1$

を満たす。ここに、 $\pi_i = \hat{\pi}|_{R_i}$ ($i=1, 2$)。

(i) $\Rightarrow$ (ii) は、明白である。(ii) $\Rightarrow$ (i) は、概ね次のように示される。条件より、 π は R_i と $T^*(M)$ の局所微分同型である。このとき、 φ は $T^*(M)$ の正準変換 ψ を導く。 $T^*(M)$ の正準変換は、局所的には、0-jet の値、定数倍を除いて、 $J^1(M, \mathbb{R})$ の $\hat{\pi}$ -diffeo に一意的に持ち上がる。従って、 ψ は $\psi(x_1) = x_2$ なる局所 $\hat{\pi}$ -diffeo $\hat{\psi}$ を一意的に定める。後は、 $\hat{\psi}|_{R_i} = \varphi$ をいえばよい。

特に、 x が単独方程式 R の特異点である場合、 x は命題 2 の仮定を満たしている。従って、特異点の近傍での単独方程式の局所接触同値性というには、 π を保つ R の局所微分同型を与えればよい。

次に、局所同値性に局所可解性に帰着される方程式を与えよう。直積空間 $M \times M$ の第1成分への射影を p_1 、第2成分への射影を p_2 とする。次の submersion を考える：

$$\begin{aligned} \nu : J^1(M, \mathbb{R}) \times J^1(M, \mathbb{R}) &\longrightarrow J^1(M \times M, \mathbb{R}) \\ (j_1^1(f), j_2^1(g)) &\longmapsto j_{(z_1, z_2)}^1(p_1^*f - p_2^*g) \end{aligned}$$

座標で書けば、 $((x, u, p), (x', u', p')) \longmapsto (x, x', u-u', p, -p')$ である。

R_1, R_2 を $J^1(M, \mathbb{R})$ の超曲面 (単独方程式) とし、 x_1, x_2 をそれぞれの方程式の特異点とする。 ν の $R_1 \times R_2 \subset J^1(M, \mathbb{R}) \times J^1(M, \mathbb{R})$

$\wedge$ の制限を考えると.

$$\nu: R_1 \times R_2 \longrightarrow J^1(M \times M, \mathbb{R})$$

は (x_1, x_2) の近傍で immersion となる。座標で書けば.

$$((x, f(x, p), p), (x', f(x', p'), p')) \longmapsto (x, x', f-f', p, -p')$$

よって $\hat{R} = \nu(R_1 \times R_2) \subset J^1(M \times M, \mathbb{R})$ は $J^1(M \times M, \mathbb{R})$ の単独方程式となり、 (x_1, x_2) は $\hat{R}$ の特異点である。

次の命題を示そう。

命題 3 ([L] Chap. IV §1 p 151)

$R_1, R_2 \subset J^1(M, \mathbb{R})$ の単独方程式とし、 x_1, x_2 をそれぞれの方程式の特異点とする。このとき、次は同値である。

(i) (R_1, x_1) と (R_2, x_2) は、局所 π -同値である。

(ii) $\hat{R} = \nu(R_1 \times R_2)$ の局所解 (Legendre 部分多様体) S で (x_1, x_2) を通り

$$(*) \quad (g_i)_\# : T_{(x_i, x_i)}(S) \longrightarrow T_{x_i}(R_i) : \text{linear iso. } (i=1, 2)$$

を満すものが存在する。ここに、 $g_i: R_1 \times R_2 \rightarrow R_i$: 射影である。

(i) $\Rightarrow$ (ii) $J^1(M \times M, \mathbb{R})$ 上の canonical contact form の $\hat{R}$ への制限を θ とすると、 ν の定義より

$$\theta = d(f-f') - \sum_{i=1}^n p_i dx_i + \sum_{i=1}^n p'_i dx'_i = \pi_1 - \pi_2$$

となる。従って、 $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$: 局所微分同型 ($\varphi(x_1) = x_2$) に対

して、 φ の $\text{graph}\{(x, \varphi(x))\} = P$ は $R_1 \times R_2$ の部分多様体であるが、

$$\varphi^* \pi_2 = \pi_1 \iff \nu(P) : \text{Legendre 部分多様体}$$

となる。

(ii) $\Rightarrow$ (i) 条件(*)より、 S は (x_1, x_2) の近傍で、 $\exists \varphi: R_1 \rightarrow R_2$ 局所微分同型 ($\varphi(x_1) = x_2$) の graph となるから、上記より、 φ は $\varphi^* \pi_2 = \pi_1$ を満たす。

最後に、 $\hat{R}$ において、 $\hat{x} = (x_1, x_2)$ を通る解 S が存在する
ための条件を考えよう。特に Legendre 部分空間 $T_{\hat{x}}(S)$ の満た
すべき性質を考察する。 $\hat{x}$ は $\hat{R}$ の特異点であるから、 $T_{\hat{x}}(\hat{R})$
 $= C(\hat{x})$ であり、 $(T_{\hat{x}}(\hat{R}), d\theta)$ は、symplectic ベクトル空間で
ある。 $T_{\hat{x}}(\hat{R})$ を $T_{x_1}(R_1)$ と $T_{x_2}(R_2)$ の直和と同一視するとき、
 $\theta = \pi_1 - \pi_2$ より、 $T_{\hat{x}}(\hat{R})$ は、symplectic ベクトル空間の直和

$$(T_{\hat{x}}(\hat{R}), d\theta) = (T_{x_1}(R_1), d\pi_1) \oplus (T_{x_2}(R_2), -d\pi_2)$$

となる。すなわち $\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle_1 - \langle v_2, w_2 \rangle_2$,
 $v_i, w_i \in T_{x_i}(R_i)$ ($i=1,2$) である。よって、Hessian は $h_0 =$
 $h_{\pi_1} - h_{\pi_2}$ であるが、上の直和の下、 $H_{\hat{x}} = H_{x_1} \oplus H_{x_2}$ となる。

このとき、 $T_{\hat{x}}(\hat{R})$ の Legendre 部分空間 L に対して、

$$h_0|_L = 0 \iff L : H_{\hat{x}}\text{-不変}$$

である。また、 $A: T_{x_1}(R_1) \rightarrow T_{x_2}(R_2): \text{linear iso.}$ に対して、

$L = \{v + Av \in T_{\hat{x}}(\hat{R}) \mid v \in T_{x_1}(R_1)\}$ は $T_{\hat{x}}(\hat{R})$ の部分空間と考
える。

L : Legendre 部分空間 $\iff A$: symplectic 同型

が成立する。さらに、この L が $H_{\hat{x}}$ -不変なるとき、 A は

$$A \cdot H_{x_1} = H_{x_2} \cdot A$$

を満にしている。従って、次を得る。

補題 4 ([L] Chap IV §2 p153)

(1) $\hat{x}$ を通る解 S で (*) を満にすものが存在すると、

$L = T_{\hat{x}}(S)$ は $T_{\hat{x}}(\hat{R})$ の $H_{\hat{x}}$ -不変 Legendre 部分空間であり、 H_{x_1} と H_{x_2} は symplectic 同値となる。さらに、 $\hat{A} \cdot H_{x_1} = H_{\hat{x}}|_L \cdot \hat{A}$ より、 $H_{\hat{x}}|_L$ の Jordan 標準形は H_{x_1} のそれと一致する。ここに、 $\hat{A}(v) = v + A(v) \in L$, $v \in T_{x_1}(R_1)$ 。

(2) 逆に、 H_{x_1} と H_{x_2} が symplectic 同値 (i.e., $\exists A: T_{x_1}(R_1) \rightarrow T_{x_2}(R_2)$: symplectic 同型 s.t. $A \cdot H_{x_1} = H_{x_2} \cdot A$) なるとき、

$$L = \{v + Av \mid v \in T_{x_1}(R_1)\} \subset T_{\hat{x}}(\hat{R})$$

は、 $H_{\hat{x}}$ -不変 Legendre 部分空間である。

すなわち、 $\hat{x} = (x_1, x_2)$ を通る $\hat{R}$ の解 S で (*) を満にすものの存在には、 H_{x_1} と H_{x_2} が symplectic 同値なることが、必要条件であり、そうであるとき、(2) の L は、解の $\hat{x}$ での初期条件を与えている。

5. $\hat{R}$ の特異点における局所可解性

この節では 4. で得た単独方程式 $\hat{R}$ の特異点での局所可解性についての結果を述べる。証明は、それぞれの文献をあてられたい。

存在定理は、考える範疇によつて様相が異なる。まず、形式中級数解について、次がある。これは、3. にあける座標を適当に取り直して、解の 3 次以上の Taylor 展開の係数を見て行けばよい。

定理 5 ([L] Chap IV §2 p156)

$R \in J'(M, \mathbb{R})$ の単独方程式として、 x をその特異点とする。 $T_x(R)$ の H_x -不変 Legendre 部分空間 L に対して、

$H_x|_L$ の固有値 $\{\lambda_i\}$ が

$$(*) \quad \sum m_i \lambda_i \neq 1 \quad \text{for } \forall m_i \in \{0, 1, 2, \dots\} \text{ s.t. } \sum m_i \geq 3$$

を満たす時、形式解 S で、 $T_x(S) = L$ なるものが、唯一つ 存在する。

C^∞ -解について、次がある。証明には、ベクトル場の特異点における標準形についての K. T. Cheng の結果が用いられる。

定理 6 ([L] Chap V §1 p169)

$R \in J'(M, \mathbb{R})$ の単独方程式として、 x をその特異点とする。 $T_x(R)$ の H_x -不変 Legendre 部分空間 L に対して、

$H_x|_L$ の固有値が $(*)$ を満たす時、 C^∞ -解 S で、 $T_x(S) = L$

なるものが存在する。

我々が求めるのは、方程式の退化した点での解であるから、定理 5 は、解析的解の存在（収束性）を意味しない。複素解析的範疇での解の収束性については、次の preprint を参照されたい：

S. M. Webster : A normal form for a singular first order partial differential equation. University of Minnesota Mathematics Report 85-114

上記定理と、命題 3、補題 4 とを組み合わせると、単独方程式 R とその特異点 x に対して、Hessian H_x の固有値が (*) を満たせば、 R は π -diffeo. で、3. で考察した標準形に移ることがわかる。また、命題 1 とより、包含系 R は、特異点 x において、 H_x の固有値が (*) を満たせば、接触変換によって、標準形に移ることが結論される。