

位相特異点の生成・死滅過程と非平衡相転移 —ホインの微分方程式の応用—

筑波大学・システム情報系 金野秀敏

Hidetoshi Konno

Faculty of Information and Systems, University of Tsukuba

1 はじめに

位相特異点とは位相が定義できない空間座標を表わし、位相の空間勾配の積分を用いて次式で定義される:

$$m_{top} \equiv \frac{1}{2\pi} \oint \nabla \phi(r, t) \cdot d\vec{\ell} = \pm 1. \quad (1)$$

上記の量はトポロジ電荷 (topological charge) とも呼ばれている。位相特異点が出現する簡単な空間 1 次元の物理モデルのひとつに複素 Ginzburg-Landau 方程式 (CGLE) がある [1].

$$\frac{\partial}{\partial t} A(x, t) = A + (1 + ic_1) \nabla^2 A - (1 + ic_2) |A|^2 A. \quad (2)$$

この CGLE にはソリトン (soliton) 解, ホール (hole) 解, ショック (shock) 解, 変調振幅波 (modulated amplitude wave, MAW) など様々な解が存在することが知られている [1] が, 位相特異点に関係しているのはホール解である。空間 1 次元の CGLE の場合ホール解は (x, t) の 2 次元空間で考えれば上記 (1) 式のように定義される位相特異点と同様な数学的な処理で特異点を探索することができる。

空間 1 次元の CGLE ではモデル中の 2 つのパラメータ (c_1, c_2) に依存して様々な時間空間変動を示す領域が出現することがわかっている [1]. このうちで振幅乱流 (amplitude turbulence) と呼ばれる領域では, 上記の様々な型の非線形素励起が相互作用を繰り返しており, 欠陥が乱れの発生に重要な役割を果たしている。欠陥乱流 (defect turbulence) と呼ばれているこの領域での非線形素励起を分別せずに「全てホール」とみなして統計をとると「サブ・ポアソン統計」 (sub-Poisson statistics) となり, 素励起数のゆらぎの分散と平均値の比が 1 より小さくなる $\sigma_n^2 / \langle n \rangle < 1$ ことがわかった [2]. 一方, 欠陥, ホール, 変調振幅波を区別して統計解析を実施すると各非線形素励起はポアソン統計 $\sigma_n^2 / \langle n \rangle = 1$ となることを発見した [2]. また, 各素励起 (MAW, hole, defect) の寿命分布はべき状の裾を持っていることがわかった [2]. ホール, 欠陥, MAW の各「非線形素励起数」の定常分布が何れもポアソン分布になる事実を拘束条件として使って, 素励起数の確率密度関数 $p(n, t)$ に関し非定常型の生成・死滅のマスター方程式

$$\frac{d}{dt} p(n, t) = \nu(t) [p(n-1, t) - p(n, t)] + \mu(t) [p(n+1, t) - p(n, t)] \quad (3)$$

を設定し, 時間に依存する生成率 $\nu(t)$ 及び死滅率 $\mu(t)$ の関数形を数値実験に整合するように調整することで長期記憶効果を有する寿命分布を同定することに成功した [2].

空間 1 次元のホールや欠陥などの素励起は空間 2 次元系では回転らせん波に対応している。空間 1 次元の振幅乱流領域と空間 2 次元の振幅乱流領域は物理状態として同等であると考えられている。しかし, 空間 1 次元の位相特異点には右巻きと左巻きの区別が無いが, 空間 2 次元では区別があり, (1) 式の正負の符号に対応する状態が区別される。しかも, この右巻きと左巻きの特異点が衝突して対消滅を起こすことが重要である。空間次元の違いは明確であり, 空間 2 次元の CGLE の特異点ダイナミクスのマルコフ過程を基礎としたマスター方程式による定常分布の解析は Gil ら [3] によって提唱され, その後多くの研究者により様々なシステムでの解析にも利用されてきた。

近年, 特異点の生成・死滅過程が非平衡系のダイナミクスに重要な役割を果たしていることは以下に列記する系の解析でも指摘されている。

- (1) 心臓不整脈や心室細動時の電氣的時空変動 (2011) [4, 5, 6]
- (2) プラチナ表面上での一酸化炭素の酸化反応 (2006) [7]
- (3) 傾斜のある系でのレイリー・ベナール対流の欠陥のダイナミクス (2004) [8]
- (4) 回転シリンダー中でのレイリー・ベナール対流の欠陥のダイナミクス (2003) [9]
- (5) てんかん脳波 (1998) [10, 11]
- (6) アメーバーなどの大変形 (2013) [12]
- (7) Directional Percolation (DP) と非平衡相転移 (2009) [13]
- (8) 量子乱流 (2013) [14]

本報では上記のような特異点ダイナミクスの「多面的な統計的諸特性」を多くの非平衡系で数理解析が厳密に実行できるようにするには様々な理論的な課題が存在することを述べる。また、現在までのところ上記の空間 1 次元 CGLE の解析からどの程度の拡張ができていているかを空間 2 次元及び空間 3 次元のモデルを取り上げて報告する。

2 特異点ダイナミクスの確率過程モデルの問題点

2.1 空間 2 次元系の例

心筋膜の心室細動状態のダイナミクスは回転らせん波の分裂や融合を伴う複雑な時空変動で特徴付けられる。我々は空間 2 次元の Aliev-Panfilov モデル [4] や Beeler-Reuter モデル [5,6] 等を用いて特異点数の確率過程や興奮領域と抑制領域の競合的ダイナミクスを predator-prey 変数の確率過程等を通じた統計数理解析を実行してきた。特異点の生成死滅過程はハイパーガンマ過程でよく記述でき [5,6], predator-prey のダイナミクスも特異点の生成死滅過程と相補的な情報を与えることを明らかにしてきた。

事象の発生や粒子などの生成死滅過程を記述する代表的な方法は生成率や死滅率をパラメータに含む (3) 式に示したようなマスター方程式であろう。右巻きと左巻きの特異点を区別しなければ、位相特異点の生成死滅過程の相互作用の描像は以下に列記する素過程 (R1, 及び R2) で記述できるだろう。これは一般化された Reggeon Field Theory (RFT) [15], あるいは Schrögl model [16] と呼ばれているモデルに等しい：

$$0 \xrightarrow{k_1} 2X \quad (\text{pair breaking}) ; 2X \xrightarrow{k_2} 0 \quad (\text{pair merging}) ; X \xrightarrow{k_3} 2X \quad (\text{wave break}) ; \quad (R1)$$

$$2X \xrightarrow{k_4} X \quad (\text{wave merge}) ; 0 \xrightarrow{k_5} X \quad (\text{birth}) ; X \xrightarrow{k_6} 0 \quad (\text{death and loss}) . \quad (R2)$$

マスター方程式によるマルコフ過程を基礎とした記述では上記の非線形相互作用を全て考慮すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = & k_1 [P(X-2, t) - P(X, t)] + k_2 [(X+1)XP(X+1, t) - X(X-1)P(X, t)] \\ & + k_3 [(X-1)P(X-1, t) - XP(X, t)] + k_4 [(X+2)(X+1)P(X+2, t) - X(X-1)P(X, t)] \\ & + k_5 [P(X-1, t) - P(X, t)] + k_6 [(X+1)P(X+1, t) - XP(X, t)] \end{aligned} \quad (4)$$

が支配方程式となる。しかし、これまでの数理解析ではこれを厳密に解析することは出来ていない。そこで、閉じた形のモーメントの連立方程式に変換する方法や漸近展開を用いてフォッカー・プランク方程式で近似する方法などが多用されている。

上記の反応の素過程 (R1, R2) から直接ランジュバン方程式を現象論的に構成し、この生成・死滅過程を近似すると、特異点数 x は次式で表現される：

$$\frac{d}{dt} x = c + ax - bx^2 + F_a(t) , \quad (5)$$

ここで、揺動力は正規白色雑音であると仮定する：

$$\langle F_a(t) \rangle = 0, \langle F_a(t) F_a(t') \rangle = 2D_a \delta(t - t') . \quad (6)$$

上記のランジュバン方程式に対応するフォッカー・プランク方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [(c + ax - bx^2)P(x, t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} [P(x, t)] \quad (7)$$

定常分布 $P_s(x)$ は容易に計算でき次式で与えられる：

$$P_s(x) = P_0 \exp \left(\frac{c}{D}x + \frac{a}{2D}x^2 - \frac{b}{3D}x^3 \right). \quad (8)$$

しかし、空間 2 次元の Aliev-Panfilov モデル [4] や Beeler-Reuter モデル [5, 6] のシミュレーションデータの解析で示されたように、相乗性雑音が印加された次のようなランジュバン方程式 [17] がデータ特性をよく説明する：

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^m + xF(t), \quad (9)$$

ここで、 a, b 及び m は定数、 $F(t)$ は平均ゼロの正規白色雑音である：

$$\langle F(t) \rangle = 0, \langle F(t)F(t') \rangle = 2D\delta(t - t'). \quad (10)$$

(9) 式のランジュバン方程式に対応するフォッカー・プランク方程式は次式で表現される：

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [(ax - bx^m)P(x, t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 P(x, t)]. \quad (11)$$

定常分布は次式 (パイパーガンマ分布) で与えられる：

$$P_{HG}(x) = \frac{\alpha\beta^{\frac{\gamma}{\alpha}}}{\Gamma(\frac{\gamma}{\alpha})} x^{\gamma-1} \exp(-\beta x^{\alpha}), \quad (12)$$

ここで α, β 及び γ は実数のパラメータ $\Gamma(z)$ はガンマ関数である。ランジュバン方程式 (9) のパラメータと定常分布 (12) のパラメータとの関係は次式で与えられる：

$$\alpha = m - 1, \beta = \frac{b}{D(m-1)} \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{a}{D}. \quad (13)$$

この定常分布は 2 次元系の数値シミュレーションデータ [4,5,6] の特異点数分布を非常に良く再現可能であり、相乗性雑音の影響であることも確認出来ている。しかし、全てのパラメータの異なる領域での「らせん波乱流」の数値計算例を説明出来るわけではない。また、特異点数分布の数値データを再現するようにモデルのパラメータを決定することは出来るが、対応するフォッカー・プランク方程式から特異点の寿命分布が冪状の厚い裾を持つ場合には特異点分布と寿命分布を同時に説明することは出来ない。白金 (Pt) 単結晶表面での一酸化炭素の酸化反応の実験では、心室細動時と対応すると考えられる空間依存の数値モデルと異なるモデルが採用されているが、類似の「らせん波乱流」状態が観察されている。また、特異点数のゆらぎのパワースペクトル密度には $f^{-1.5}$ のべき則が観察されており [7]、長期記憶効果の存在が示唆される。

即ち、RTF [15]、あるいは Schrögl model [16] の相互作用スキームが妥当である場合であっても、下記のような記憶関数型の記憶項を考慮し、相乗性雑音を導入する必要があるように見受けられる事例は多い：

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^m + xF(t) - \int_{-\infty}^t \Phi(t - t') \dot{x}(t') dt'. \quad (14)$$

このランジュバン方程式 (14) の直接数値シミュレーションは可能であるが、厚い裾を持つ特異点数のゆらぎのパワースペクトルを精度良く求めることは容易でない。

(4) 式のマスター方程式に記憶関数型の記憶項を導入することは形式的には可能であるが、その後の解析に困難が生じ特異点数分布や寿命分布の詳細評価にまで至らないことは理解できよう。また、(3) 式のような非定常型のマスター方程式を導入することも可能であるが表式が特異点数や寿命分布の解析表現を得るのが難しく、数値実験データからパラメータを推定することにも成功していない。

確率過程の数理解析: 枠組みの拡大

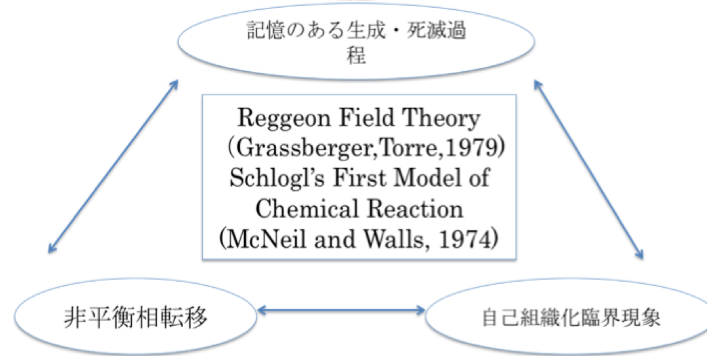


図 1: 一般化 Reggeon Field Theory [15, 16] の非線形素過程に基づく理論的な数理解析の枠組みの拡大

2.2 空間 3 次元系の例

近年, 空間 3 次元の心筋モデルの数値シミュレーションが盛んに行われるようになってきた [18, 19, 20, 23, 24]. 心臓表面の特異点ダイナミクスや特異点フィラメントのダイナミクスの動画からそれらの特異点の統計的性質を観察すると, 2 次元と 3 次元ではその特性は大きく異なることが分かって来た: (A) 空間 2 次元系では前回は報告したように, 右巻きと左巻きの特異点が存在しそれらが対消滅を起こす. この非線形相互作用が非線形項 n^2 の出現理由である. (B) しかし, 3 次元では心臓表面に出現する特異点数が少なく, 対消滅の確率が小さくなるので生成率 $c(n)$ や死滅率 $a(n)$ は特異点数の線形関数で近似できる [18, 19]:

$$c(n) = c_1 n + c_0 \text{ and } a(n) = a_1 n + a_0. \quad (15)$$

このとき, 特異点数 n となる確率 $p(n, t)$ は次のマスター方程式に従うはずである:

$$\frac{d}{dt} p(n, t) = [c_1(n-1) + c_0]p(n-1, t) + [a_1(n+1) + a_0]p(n+1, t) - [(c_1 + a_1)n + (c_0 + a_0)]p(n, t). \quad (16)$$

この記憶効果は考慮されていないモデルで特異点数の定常分布を計算し, 確率密度関数 $p(n, t)$ の定常状態の分布形状を同定する研究は行われている. Clayton [20] は 3 変数の簡単化されたイオンチャネルを基礎としたモデルを用い, 3 次元のシミュレーションを実行して特異点のフィラメントと心臓表面の特異点のダイナミクスを調べた. その結果, 生成率や死亡率は

$$c(n) = c_1 n \quad a(n) = a_1 n \quad \text{and} \quad c_1 \sim a_1 \quad (17)$$

と評価された. しかし, この生成率/死亡率を持つマルコフモデル (16) では彼らの数値実験の結果の全てを矛盾なく説明出来ない [20]. 記憶のある確率過程の数理解析の理論的枠組みの拡大が必要になる.

2.3 確率過程の数理解析の枠組みの拡大

「まえがき」にも述べた一般化 Schrögl モデル [16] の相互作用 (反応) の素過程は, 素粒子の相互作用のモデルとして知られている一般化された Reggeon Field Theory (RFT) [15] の素過程と同じである. 最近, 生成・死滅過程が内在する様々な非平衡解放系の非平衡相転移を RFT の素過程との対応で議論できることが注目されている [13]. 複雑系における自己組織化臨界現象との対応も興味深い. すなわち, 一般化された RFT では通常の生成死滅過程の考察だけでなく相転移近傍でのシステムの動的特性を問題にする. 少なくともこのモデルの範囲内で相転移近傍の特性を解析的に明らかにすることが出来るようにすることを目指して研究を行っている.

3 記憶のある線形の生成死滅過程

3.1 モデル

本報では2章で紹介した一般化されたRFTに対応するマスター方程式に非整数階の時間微分を用いて記憶効果を導入し、さらに非線形過程を全て無視したモデルを考えよう:

$${}_0D_t^\alpha p_\alpha(n, t) = [\lambda(n-1) + \nu]p_\alpha(n-1, t) + [\mu(n+1) + \epsilon]p_\alpha(n-1, t) - [(\lambda + \mu)n + (\nu + \epsilon)]p_\alpha(n, t). \quad (18)$$

これを用いて2.3章で紹介したClayton [20] が3変数の単純化したイオンチャネルモデル(3V-SIM)から取り出した3次元のスクロール波のダイナミクスを考察する. 上式のマスター方程式のモデルで非整数階の微分の係数は $0 < \alpha \leq 1$ であり, λ, μ, ν 及び ϵ は正値の定数である. また, 微分演算子 ${}_0D_t^\alpha$ はCaputo型の非整数階微分を表わし, 次式で定義される:

$${}_0D_t^\alpha f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} D_\tau f(\tau) d\tau, \quad (19)$$

ここで $D_t = \frac{d}{dt}$ は通常の微分である. 初期条件は $p_\alpha(n, 0) = \delta_{n, n_0}$ と設定した.

3.2 母関数の従う方程式

母関数を次式で定義する:

$$g_\alpha(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_\alpha(n, t). \quad (20)$$

上記のマスター方程式より, この母関数 $g_\alpha(z, t)$ の従う方程式は次のように導かれる:

$${}_0D_t^\alpha g_\alpha(z, t) = [\lambda z(z-1) + \mu(1-z)] \frac{\partial}{\partial z} g_\alpha(z, t) + \left[\nu(z-1) + \epsilon \left(\frac{1}{z} - 1 \right) \right] g_\alpha(z, t). \quad (21)$$

初期条件より, $g_\alpha(z, 0) = z^{n_0}$ となる. この方程式から不均一項を消去するために,

$$g_\alpha(z, t) = z^{-\frac{\epsilon}{\mu}} (\lambda z - \mu)^{-\frac{\nu}{\mu} + \frac{\epsilon}{\mu}} G_\alpha(z, t), \quad (22)$$

と置けば次式を得る:

$${}_0D_t^\alpha G_\alpha(z, t) = [\lambda z(z-1) + \mu(1-z)] \frac{\partial}{\partial z} G_\alpha(z, t). \quad (23)$$

初期条件より $g_\alpha(z, 0) = z^{n_0}$ なので, $G_\alpha(z, 0)$ は次式を満たす:

$$G_\alpha(z, 0) = z^{n_0 + \frac{\epsilon}{\mu}} (\lambda z - \mu)^{\frac{\nu}{\mu} - \frac{\epsilon}{\mu}}. \quad (24)$$

ラプラス変換した場合の上式の解は次式で与えられる:

$$G_\alpha[z, s] = -s^{\alpha-1} \left(\frac{\lambda z - \mu}{z-1} \right)^{\frac{\epsilon}{\mu-\lambda}} \int_0^z w^{n_0 + \frac{\epsilon}{\mu}} (w-1)^{\frac{\epsilon}{\mu-\lambda}-1} (\lambda w - \mu)^{\frac{\nu}{\mu} - \frac{\epsilon}{\mu} - \frac{\epsilon}{\mu-\lambda}-1} dw. \quad (25)$$

3.3 母関数の積分表示

(23) 式のラプラス変換を行い確率母関数 $u \equiv g_\alpha[z, s]$ は一般ホイン関数 $GH(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon; z)$ [22] に従うことが示される.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left[\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-a} \right] \frac{du}{dx} + \frac{\alpha\beta x - q}{x(x-1)(x-a)} u = 0, \quad (26)$$

しかし、母関数の積分表示を得ることが出来なければフラクショナル一般生成死滅過程に伴う各種の統計を求めるのは容易でないからである。ここでは、(25) を変数変換して次の積分表示が得られたので示しておく：

$$g_\alpha[z, s] = s^{\alpha-1} \frac{z^{n_0+1}}{\lambda z - \mu} \int_0^1 dx (1-x)^{n_0+\frac{\epsilon}{\mu}} (1-xz)^{-n_0-\frac{\epsilon}{\mu}} \times \left[1 - \frac{(\lambda-\mu)xz}{\lambda z - \mu} \right]^{\frac{\epsilon}{\mu}-\frac{\epsilon}{\mu}+\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu}-1}. \quad (27)$$

我々が知る限り、ホインの一般関数の明瞭な（閉じた形での）積分表示は報告された例がない。

もし臨界条件 $\lambda = \nu$ 及び $\nu = \epsilon = 0$ が初期条件 $n_0 = 1$ と共に付加されたとすると、上記ラプラス領域での表式 $g_\alpha[z, s]$ は時間領域での表式 $g_\alpha(z, t)$ で書くことができる：

$$g_\alpha(z, t) = 1 - (1-z) \int_0^\infty \exp(-w) E_\alpha(-w\lambda(1-z)t^\alpha) dw. \quad (28)$$

この表式 $g_\alpha(z, t)$ は Clayton の数値実験臨界点での 3 次元スクロール波の結果と比較される。[20]

4 平均と分散の表式

4.1 臨界条件がついていないとき

$g_\alpha[z, s]$ を使えばモーメントの値を簡単に評価することができる： $\langle n[s] \rangle = g'_\alpha[z, s] \Big|_{z=1}$, $\langle n[s]^2 \rangle = g''_\alpha[z, s] \Big|_{z=1} + g'_\alpha[z, s] \Big|_{z=1}$. 実際、平均の時間発展は初期値 n_0 に依存する項と n_0 に独立で $M_1(1, T)$ に依存する項の和となる：

$$\langle n(T) \rangle = E_\alpha \left((\lambda - \mu) T^\alpha \right) n_0 + \frac{\nu - \epsilon}{\lambda - \mu} M_1(1, T), \quad (29)$$

ここで、

$$E_\alpha(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\alpha m + 1)} \quad (30)$$

は Mittag-Leffler 関数であり、

$$M_1(1, T) = E_\alpha \left((\lambda - \mu) T^\alpha \right) - 1, \quad (31)$$

は $\alpha \rightarrow 1$ の極限では次式で与えられる関数である： $M_1(1, T) \rightarrow e^{(\lambda-\mu)T} - 1$.

同様に、時間依存分散は n_0 に依存する項と依存しない項の和で書ける。このように分散は定常部分と非定常部分がある。

$$\begin{aligned} \sigma_n(T)^2 &= \left(n_0 + \frac{\nu - \epsilon}{\lambda - \mu} \right)^2 \times M_2(2, T) + \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} \right) \left\{ n_0 + \frac{1}{2} \frac{\nu + \epsilon}{\lambda + \mu} + \frac{1}{2} \frac{\nu - \epsilon}{\lambda - \mu} \right\} \times M_2(1, T) \\ &+ \frac{\nu + \epsilon}{2(\lambda - \mu)} \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{(\lambda - \mu)(\nu + \epsilon)} \right) \times M_1(1, T), \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、

$$M_2(1, T) = E_\alpha \left(2(\lambda - \mu) T^\alpha \right) - E_\alpha \left((\lambda - \mu) T^\alpha \right) \quad (33)$$

及び

$$M_2(2, T) = E_\alpha \left(2(\lambda - \mu) T^\alpha \right) - E_\alpha^2 \left((\lambda - \mu) T^\alpha \right). \quad (34)$$

分散の表式は非線形発展モード $M_1(1, T)$, $M_2(1, T)$ 及び $M_2(2, T)$ で表現されるが、Mittag-Leffler 関数で、極限 $\alpha \rightarrow 1$ では、 $M_2(1, T) \rightarrow e^{(\lambda-\mu)T} (e^{(\lambda-\mu)T} - 1)$ 及び $M_2(2, T) \rightarrow 0$ を得る。(32) 式では n_0^2 依存性のある第 1 項目が現れる。これは FGDP に於ける長期記憶効果の特別な結果である。この n_0^2 依存性は $\alpha \rightarrow 1$ の極限

で消失する。このように、モーメントは Mittag-Leffler 関数で表現される。すなわち、それらは T^α の非線形関数となり、単一のスケール関数では表現出来ない (“多重フラクタル” 性を持つ)。

4つのパラメータ λ, μ, ν 及び ϵ に依存して、定常状態や非定常状態が現れることに注意する。 $\mu - \lambda > 0$ 及び $\nu - \epsilon > 0$ なら、 $T \rightarrow \infty$ のとき、定常状態の平均と分散は次式で与えられる：

$$\langle n(\infty) \rangle = \frac{\nu - \epsilon}{\mu - \lambda} \quad (35)$$

and

$$\sigma_n^2(\infty) = \frac{\nu + \epsilon}{2(\mu - \lambda)} \left\{ 1 + \frac{\lambda + \mu}{(\mu - \lambda)} \frac{\nu - \epsilon}{(\nu + \epsilon)} \right\}. \quad (36)$$

平均 (29) と 分散 (32) は Mittag-Leffler 関数を用いて表現される。Mittag-Leffler 関数の漸近的振舞い、(i) $E_\alpha(-z) \approx 1 - z/\Gamma(1 + \alpha)$, $z \ll 1$; (ii) $E_\alpha(-z) \approx \exp(-z/\Gamma(1 + \alpha))$, $z \leq 1$ and (iii) $E_\alpha(-z) \approx z^{-1}/\Gamma(1 + \alpha)$, $z \gg 1$ に注意すると、(29),(32) 式の生成死滅過程の多重フラクタル性の起源を推定することは可能である。

4.2 臨界点近傍のとき

冪状則は (29) 及び (32) 式で Mittag-Leffler 関数の漸近的な性質を考えると現れることを指摘したが、べき状態 T^α は下記に示すように臨界条件が実現されている時にも現れる。

$\lambda = \mu$ 及び $\nu = \epsilon$ のとき、平均及び分散は次のように表される：

$$\langle n(T) \rangle = n_0 \text{ 及び } \sigma_n^2(T) = \frac{2(\lambda n_0 + \nu)T^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}. \quad (37)$$

この場合、平均は一定の値となるが、分散は非整数冪 T^α となる。ここで、分散は初期値 n_0 に依存することに注意する。

$\lambda = \mu, \nu \neq 0$ 及び $\epsilon = 0$ のとき、平均及び分散は次のようになる：

$$\langle n(T) \rangle = n_0 + \frac{\nu T^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \text{ 及び } \sigma_n^2(T) = \frac{(2n_0\lambda + \nu)T^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \left(\frac{2(\lambda + \nu)\nu}{\Gamma(1 + 2\alpha)} - \frac{\nu^2}{\Gamma(1 + \alpha)^2} \right) T^{2\alpha}. \quad (38)$$

この場合、平均も分散も非整数冪となっている。分散は2種類のスケール関数からなる、 T^α and $T^{2\alpha}$ 。注意すべきは分散が初期値 n_0 に依存することである。さらに、非線形部分の第2項目 $T^{2\alpha}$ は $\alpha \rightarrow 1$ の極限でも消失しない。

When $\lambda = \mu$ and $\nu = \epsilon = 0$,

$$\langle n(T) \rangle = n_0 \text{ 及び } \sigma_n^2(T) = \frac{2\lambda n_0}{\Gamma(1 + \alpha)} T^\alpha. \quad (39)$$

興味深いことに、この場合は臨界 Galton-Watson 過程の非整数版に等しい。パラメータの組 ($\lambda = \mu$ and $\nu = \epsilon = 0$) は Orsingher and Polito [21] の論文の $n_0 = 1$ に対応する。今の場合には記憶がある $\alpha \neq 1$ ので Clayton による心室細動のモデルとしての 3D スクロール波の数値シミュレーション [20] と関係している。

4.3 3D スクロール波の数値実験

Davidson 達は [18, 19] (i) 振幅乱流の状態や (ii) 負のフィラメント張力状態状態の統計的性質を研究した。彼らは3次元の複素ギンズブルグ・ランダウ方程式 (CGLE) の振幅乱流状態の生成死滅率は $c(n) = c_0$ and $a(n) = a_2 n^2$ であることを報告している [19]。また、3次元の CGLE や3次元のバークレーモデルの「負のフィラメント張力状態 (negative filament tension)」では生成率や死滅率は線形: $c(n) = c_0 + c_1 n$ and $a(n) = a_0 + a_1 n$ であることを報告している [18, 19]。位相特異点数の確率密度関数に関する限り、マルコフモデルによる記述が数値実験の特性をよく捉えている。3D CGLE における振幅乱流における欠陥乱流の表面上の統計法則 [20] は2次元の欠陥乱流特性と同様であると報告されている。

さて、Clayton による3次元スクロール波の記憶効果について考えてみよう [20]。彼は空間3次元の3変数の単純化イオンチャネルモデルを用いた数値シミュレーションで、生成率が $c(n) = c_1 n$ であり、死滅率及び漏れ率は

$a(n) = a_1 n$ であることを報告している [20]. この生成率 $c(n)$ 及び死滅率 $a(n)$ は臨界 Galton-Watson 過程 [25] $\lambda \sim \mu$ and $\nu = \epsilon = 0$ (viz., $a_1 \sim c_1$ and $c_0 = a_0 = 0$) である. これが正しいとすれば定常状態は実現されていない. 記憶効果の存在を仮定して, 平均値の時間発展の様子を説明することを試みる (Fig.5b in Ref. 20).

(28) 式から寿命分布は次のように評価される $f_\alpha(t) = \frac{d}{dt}p_\alpha(0, t)$:

$$f_\alpha(t) = t^{\alpha-1} \int_0^\infty \exp(-w) \lambda w E_{\alpha, \alpha}(-\lambda w t^\alpha) dw \quad (\lambda = \mu) \quad (40)$$

ここで, 一般化された Mittag-Leffler 関数は次式で定義されるものである: $E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{z^m}{\Gamma(\alpha m + \beta)}$.

Clayton [20] による数値計算結果の寿命分布 (文献 [20], Fig.6) は指数分布のようにみえるが, 我々が再プロットしてみると $f_\alpha(t)$ は冪状のテイル ($\sim t^{-3/2}$) とピーク構造 (文献 [20], Fig. 6d) を持つことがわかる. 臨界 Galton-Watson 過程 [25] で $\alpha = 1$ のマルコフの場合, t の大きなところで

$$f_1(t) = \lambda/(1 + \lambda t)^2 \sim t^{-2} \quad (41)$$

のような冪則が出ることになる. データから傾きを見積もると t の大きなところで

$$\alpha \sim 1/2 \quad \text{and} \quad f_{1/2}(t) = dp_{1/2}(0, t)/dt \sim t^{-3/2} \quad (42)$$

となる. これは (28) 式から導かれる絶滅確率

$$p_{1/2}(0, t) = 1 - (2/\sqrt{\pi}) \int_0^\infty dy \exp(-y^2)/(1 + 2\lambda\sqrt{t}y) \quad (43)$$

からわかる. Clayton の数値実験からは記憶効果が存在することが示唆される. メモリーの存在は以下に示す事実からも示唆される.

$\nu = \epsilon = 0$ 及び $\lambda > \mu$ のとき, 平均値は次のようになる: $\langle n(T) \rangle = n_0 E_\alpha((\lambda - \mu)T^\alpha)$. これは (29) 式よりわかる. 即ち, 指数関数的な増大が示唆される. このような消滅確率や平均値は Clayton の数値実験に対応しない.

しかし, もし ν が正值の小さな値であるなら, $\epsilon = 0$ and $\lambda = \mu$, 平均値は $T \rightarrow \infty$ で $\alpha \sim 0.5$ のとき収束する: $\langle n(T) \rangle = n_0 + \frac{\nu T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$. $\alpha \neq 0.5$ のとき Clayton の数値実験に対応する. [20] すなわち, 我々はシステムが臨界点に近いが厳密に臨界点直上にはないと考えている ($\lambda = \mu$ and $\nu > 0$ (小さな正の値) で $\epsilon = 0$) $0 < \alpha < 1$. 位相特異点数の分散や寿命分布の詳細な検討は必要であるが我々の考えが妥当と思われる. Clayton の論文の Fig.8 [20] は長い PS の運動の軌跡が描かれている. これはまた心室細動が「多重ウェーブレットメカニズム」によって維持されていることをも示唆する. Pathmanathan と Gray [23], 及び ten Tusscher ら [24] は 3D 数値計算及び実際の心臓において特異点数が少ないことを示唆している. 補足資料のビデオ (Fig.4 and Fig.5 in Ref. 23) からメモリーの存在は示唆される (フィラメントは分裂しそして縮小し, その分裂したフィラメントが再結合する).

5 まとめ

本報では一般化 Reggeon Theory の非線形素励起の相互作用の素過程において, 対消滅が無視出来る線形のフラクショナル微分を有する一般化生成死滅過程のマスター方程式の確率母関数が, 一般ホインの微分方程式に従うことを示し, 3次元のスクロール波に付随したフィラメントのダイナミクスや位相特異点のダイナミクスがこの枠組みで解析可能であることを報告した. 寿命分布のべき状態は長期記憶場合にも出現するが, 臨界条件が満足される場合にも現れる. Clayton の 3次元スクロール波のダイナミクスの場合, 臨界条件が付加されているだけでなく, 記憶効果も複合していることが予想される.

ここでは, 畳み込み型の記憶効果を使って解析を試みたが, 空間 1 次元の CGLE の振幅乱流領域の複雑なダイナミクスを非定常型のマスター方程式で解析したが, フラクショナル微分を有する一般化生成死滅過程のマスター方程式の確率母関数が, 合流型ホインの微分方程式で書く事ができ, 時間の大きな領域の冪則は同定することができることも分かっている.

一般化 Reggeon Field Theory の素過程を対消滅に付随した非線形効果を陽に取り入れた場合の生成死滅過程の厳密な取り扱いを行うのは今後の課題である.

謝辞

本研究は科学研究費補助金 (JSPS, 挑戦的萌芽研究, 課題番号 15K11993) の援助を受けている.

参考文献

- [1] L. Kramer, I. Aranson, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 99 (2002).
- [2] Y. Uchiyama and H. Konno, *Phys. Lett. A*, **378**, 1350 (2014).
- [3] L. Gil, J. Lega and J. L. Meunier, *Phys. Rev. A*, **41**, 1138 (1990).
- [4] R. Harada and H. Konno, *Asia-Pacific Reviews*, **12**, 208 (2011).
- [5] A. Suzuki and H. Konno, *AIP Advances*, **1**, 032103 (2011).
- [6] H. Konno and A. Suzuki, *Int. J. of Mech., Indust. Sci. and Eng.*, **7**, 32 (2013).
- [7] C. Beta, A. S. Mikhailov, H. H. Rotermund and G. Ertl, *Europhys. Lett.*, **75**, 868 (2006).
- [8] C. Huepe, H. Riecke, K. Daniels and E. Bodenschatz, *Chaos*, **14**, 864 (2004).
- [9] Y.-N. Young and H. Riecke, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 134502 (2003).
- [10] W. J. Freeman, *Neural Networks*, **21**, 257 (2008).
- [11] W. J. Freeman, *Neural Networks*, **22**, 491 (2009).
- [12] D. Takeuchi, S. Ishihara, T. Oonuki, Mai-Honda-Kitahara, K. Kaneko and S. Sawai, *PNAS*, **110**, 5016 (2013).
- [13] K. A. Takeuchi, M. Kuroda, H. Chate and M. Sano, *Phys. Rev. E*, **80**, 051116 (2009).
- [14] M. Tsubota, M. Kobayashi and H. Takeuchi, *Phys. Rep.*, **522**, 191 (2013).
- [15] P. Grassberger and A. De La Torre, *Ann. Phys.*, **122**, 373 (1979).
- [16] K. J. McNeil and D. F. Walls, *J. Sm. Phys.* **10**, 439 (1974).
- [17] H. Konno and P. S. Lomdahl, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **73**, 573 (2004).
- [18] J. Davidsen, M. Zhan and R. Kapral, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 208302 (2008).
- [19] J. C. Reid, H. Chate and J. Davidsen, *Europhysics Letters*, **94**, 68003 (2011).
- [20] R. H. Clayton, *Physica D*, **238**, 951 (2009).
- [21] E. Orsingher and F. Polito, *Bernoulli*, **17**, 114 (2011).
- [22] A. Ronveaux (Ed.), *Heun's Differential Equations*, Oxford University Press, Oxford (1995).
- [23] P. Pathmanathan and R. A. Gray, *BioMed Research International*, **2015**, 720575 (2015).
- [24] K. H. W. J. ten Tusscher, et al., *Exp. Physiol.*, **94**, 553 (2009).
- [25] T. Harris, *The Theory of Branching Processes*, Springer-Verlag, Berlin (1963).