

Banach Function Algebra の real parts について。

早大 理工 田 中 純 一

§ 1. 序

A_0 を disk algebra, 即ち 複素平面の単位円周上で定義された, 複素数値連続関数で, その内部に analytic に拡張できるものの全体, とすると $f \in A_0$ に対して f の実数部分, $\operatorname{Re} f$ は単位円板上で連続, 円板上では harmonic conjugate をもつ harmonic function となっている。一般の function algebra に関しても $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f; f \in A\}$ は harmonic conjugate をもつ, harmonic function の族としての抽象性をもつ。そのような所から $\operatorname{Re} A$ に関する多くの研究がなされているが, ここでは特に Hoffman-Werner の定理, Werner の定理から派生したことを論じ, いくつかの定理の拡張を試みる。尚この報告を記すにあたり, 多くの助言をして下さった 和田淳蔵先生に感謝致します。

§ 2. closed 性に関する定理について。

A を compact Hausdorff 空間 X 上の function algebra とするとき $\operatorname{Re} A$ が $C_R(X)$ で closed とすれば $A = C(X)$ となる。この Hoffman-Wermer の定理はよく知っている。この定理は function algebra に関して二方向へ拡張された。一つは essential set との関連性を考えた方向で、Glickesberg-Wada([9],[14]) による、次の定理である。

定理 W_1 A を X 上の function algebra とする。今 $C(X)$ の closed subspace N , closed ideal I が $A + \bar{I} \supset N \supset I$ となっているとする。この時 $N + \bar{I}$ が closed とすれば $I = \bar{I}$ となる。

定理 W_2 A, X , を定理 W_1 と同様とする。 A の closed subspace N , closed ideal I があり、 $N \cap I$ が A の ideal, となったとする。この時 $N + \bar{I}$ が closed とすれば、 $N \cap I = \overline{N \cap I}$ 。

定理 W_3 A, X , を定理 W_1 と同様とする。 A の closed ideal I, J が $I + \bar{J}$ が closed となったとすると $I \cap J = \overline{I \cap J}$ 。これらの定理は X が metric という条件下で類似の結果が Glickesberg によって得られている。

もう一つの方向は、interpolation set との関連性を考えたもので Sidney-Stout, Bernard, ([13][2]) による。

定理 S-S A を X 上の function algebra とする。 $X \supset E$

を closed set とうるとき $\operatorname{Re} A \cup E$ が $\operatorname{Re} E$ で closed となれば E は A の interpolation set である。

定理 B₁ A を X 上の Banach function algebra とする。 $\operatorname{Re} A$ が uniformly closed となれば $A = C(X)$ 。

定理 B₁ は明かには 定理 S-S の拡張となつてゐるが、又調和解析へのいくつかの応用がなされた。

最近, Sackel [17] によつて これらの拡張となつてゐる、次の定理 S₁ - S₃ が得られた。

定理 S₁ X を locally compact Hausdorff space, A を $C_0(X)$ 内の Banach algebra, I を A の closed subalgebra とする。今次の仮定をみたしてゐるとする。

$$I \cdot A_R \subset I, \quad [\operatorname{Re} I] \subset A + \bar{A},$$

このとき $[I] = \overline{[I]}$ となる。とくに $A \cap \bar{A}$ が A で closed となれば I は uniformly closed となる。ただし A_R は A にふくまれる実数値函数の全体, $[\]$ は uniform closure。

定理 S₂ 記号, 及び A, X を定理 S₁ と同様とする。 A の subalgebra I で、次の仮定をみたすものがあつたとする。

$$I \cdot A_R \subset I, \quad [\operatorname{Re} I] \subset A + \bar{A} \quad A \subset [I]$$

このとき A は uniformly closed となり $A = \bar{A}$ となる。

定理 S₃ X, A, I を定理 S₁ のものとする。

$$I \cdot A_R \subset I, \quad [\operatorname{Re} I] \subset A + \bar{I}$$

が成立しているとするれば, I は uniformly closed で $I = \bar{I}$ となる。

これが一定 closed 性に関する主なものの経過である。又 Hoffman-Werner の定理の直接の拡張として, Arenson [1] によるものがあるが, 次にこの結果を一般の Banach function algebra の場合に拡張し, それに帰着させて おのづかの定理を証明する。Arenson の結果の証明はまだ示されていない。

次の記号を導入する。今 X を compact Hausdorff space, $A \subseteq C(X)$ の subalgebra とする。 $X \ni x, y$ に対して,

$$(1) \quad d(x, y) = \sup \{ |f(x)| ; f(y) = 0, f \in A, \|f\|_{\infty} \leq 1 \}.$$

又 $X \supset F$ なる subset に対して F の直径, $D_A(F)$ を

$$(2) \quad D_A(F) = \sup \{ d(x, y) ; x, y \in F \}$$

明らかに $0 \leq d(x, y), D_A(F) \leq 1$ となっている。又 $K(A)$ は A による Šilov 分解, $[\]$ は uniform closure, とする。

定理 1 $A_2 \subseteq C(X)$ に含まれる Banach algebra で A_1 を A_2 の subalgebra とする。今 $[R_A A_1] \subset R_A A_2$ が成立しているならば $1 > \exists C \geq 0$ なる定数があり,

$$(*) \quad D_{A_1}(K) \leq C \quad \forall K \in K(A_2) \quad \text{となる。}$$

逆に $(*)$ が成立しているとするれば $[R_A A_1] \subset R_A [A_2]$ となる。

系 2 定理 1 と同様の仮定が成立し, さらに $K(A_2)$ が有限

とすれば $DA_1(K)=0$, 即ち $A_1|K \subset \{\text{constants}\}$ が任意の K に対して成立する。特に A_2 が antisymmetric ならば $A_1 = \{\text{constants}\}$ or $\{0\}$ となる。

定理の証明に入る前に次の補題を述べる。

補題3. 任意の正の数 ϵ に対して, 適当な $\delta > 0$, と多項式 P とが存在して, P は開円板 $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1 + \delta\}$ を $|Re z| < 1$ の中へ移し $P(0)=0$ $Im P(i) > \delta$ とできる。

証明は略, c.f. Burkholder [7]

定理1の証明> 以後 $\|\cdot\|_{A_2}$ は A_2 の norm, $\|\cdot\|_{\infty}$ は一般 norm とする。今 $Re A_2 \ni u$, に対して

$$N(u) = \inf \{ \|f\|_{A_2}; f \in A_2, Re f = u \}$$

という norm をあたえたと $Re A_2$ は Banach space となる。

$A_2 \ni f$ に対して $Re f = u$ とおくと

$$\|u\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{A_2}$$

が成立することより $\|u\|_{\infty} \leq N(u)$ となつてゐる。仮定より

$[Re A_1] \subset Re A_2$ 又 $\|u\|_{\infty} \leq N(u)$ ($u \in [Re A_1]$) が closed graph theorem を用いて, $[Re A_1]$ 上では $\|\cdot\|_{\infty}$ と $N(\cdot)$ の二つの norm が同値となる。即ち次が成立する。

$$(P) \left[\begin{array}{l} \exists k > 0 \text{ なる定数が定まり} \\ \|u\| \leq N(u) \leq k \|u\|_{\infty} \quad \forall u \in [Re A_1] \end{array} \right.$$

次に $\lambda = 2k+3$ とおいて補題3による多項式 P , $\delta > 0$, を定

めておく。←----- (A)

定理の結論を否定して $\forall \delta > 0$ に対して $\exists K_\delta \in K(A_2)$ があり $D_{A_1}(K_\delta) > 1 - \delta$ と仮定する。この仮定より $D_{A_1}(K_\delta)$ の定義(2)から $A_1 \ni \exists g$ で $\|g\|_\infty \leq 1$, $K_\delta \ni \exists x_1, \exists x_2$ に対して, $g(x_1) = 0$, $|g(x_2)| > 1 - \delta$ となる g が存在する。次に (A) における ε に対して $1 - (1 + \varepsilon/2)^{-1} > \delta$ なる δ を定めておき, これによって得られる g に対して $\tilde{g} = g/g(x_2)$ とする。

$\tilde{g}$ は次の性質をもつ。

$$\tilde{g} \in A_1, \quad \|\tilde{g}\|_\infty \leq \varepsilon/2 + 1, \quad \tilde{g}(x_1) = 0, \quad \tilde{g}(x_2) = 1$$

今 (A) における P に対して $f = P \circ \tilde{g}$ とおくと f は 次の性質をもつ。

$f \in A_1$, $\|\operatorname{Re} f\|_\infty \leq K$, $\operatorname{Im} f(x_2) > 2K + 3$, $f(x_1) = 0$
 $\operatorname{Re} f$ に対して (P) を適用すれば $C_R(X) \ni \exists v$ に対して, $\operatorname{Re} f + i v \in A$, 及び次の式をみたすようにできる。

$$\|\operatorname{Re} f + i v\|_\infty \leq (K+1) \|\operatorname{Re} f\|_\infty \leq K+1.$$

ここで $F = -i(f - (\operatorname{Re} f + i v))$ とおくと F は A_2 に入り, 実数値をとる。だから F は K_δ 上で定数となっているはずである。一方 $f(x_1) = 0$ より $F(x_1) = -v(x_1)$ から

$$(1) \quad |F(x_1)| = |v(x_1)| \leq \|v\|_\infty \leq \|\operatorname{Re} f + i v\|_\infty \leq K+1.$$

$$(2) \quad |F(x_2)| = |\operatorname{Im} f(x_2)| - |v(x_2)| \geq (2K+3) - |v(x_2)| \\ \geq (2K+3) - (K+1) = K+2.$$

$K \ni x_1, x_2$ だが f は K に non constant となり, 不合理となる。

この定理の逆は少し長いので概略を示すにとどめる。

$X(A_2)$ と $K(A_2)$ の分解は一致するとはかぎらないが, $K(A_2)$ の方が細かい。だから A_2 をはじめから *uniformly closed* と考えてもよい。

次の二つの補題が示される。

補題4 $K(A_2) \supset \{K_\alpha\}$, $X \supset E, F$ なる *closed set* に対し
次のことが成立しているとする。

$$E \subset \bigcup_\alpha K_\alpha, \quad E \cap K_\alpha \neq \emptyset \quad (\forall \alpha), \quad \bigcup_\alpha K_\alpha \cap F = \emptyset.$$

このとき $A_2 \subset R$ で次の性質をみたすものがある。

$$0 \leq f \leq 1, \quad f=1 \text{ on } \bigcup_\alpha K_\alpha, \quad f=0 \text{ on } F.$$

補題5 $v \in C_R(X)$ に対し次のことが示される

$$\inf \{ \|v + g\|_\infty; g \in A_2 \} = \sup \left\{ \frac{|v(x) - v(y)|}{2}; x, y \in K, K \in \{K_\alpha\} \right\}$$

これら二つの補題と, 函数論の初等的な定理から, R_{A_1} 上で $\|\cdot\|_\infty$ と $N(\cdot)$ が同値となることが示される。だから R_{A_2} が $N(\cdot)$ で Banach space となっていることから示される。

次に定理 S_1 の証明を考へしめる。次の補題が Glicksberg [8] による Bishop の定理の証明とはほとんど同様に示される。

補題6 $C(X)$ 内の *uniformly closed subspace* I と, $C(X) \supset S$

について $I \subset I$ となっているとする。 $\tilde{K}(S)$ を S による, maximal antisymmetric 分解とすれば, $C(X) \ni f$ が $\tilde{K}(S) \ni k$ について $f|_k \in I|_k$ となるとき $f \in I$ となる。

〈定理 S_1 の証明〉 X を compact 空間, A を $C(X)$ 内の Banach sub-algebra と考えてもよい。

$[\operatorname{Re} I] \subset \operatorname{Re} A$ より $D_I(K) \leq c$, ($0 \leq c < 1$) が全ての K について成立する。次に $I \cdot A \subset I$ という性質, 及び $K(A) \ni K$ は p -set で そのおのものの peak set は peaking function を A_R にとるようにできる。このことより $D_I(K) > 0$ となり得ないことが示され, $I|_K \subset \{\text{constants}\}$ となり 補題 6 を $[I]$ に適用すれば $[I] = \overline{[I]}$ となる。

後半を示すのに I が A で closed, となることが必要だが前半には必要としないこともわかる。

次に定理 B_{e1} の証明を考えてみる。 $A \cdot A_R \subset A$ はつねに成立することから 前と同様にして $A|_K \subset \{\text{constants}\}$ がでる。一方, A は Banach function algebra より一点を分離しているから $K(A) \ni \forall K$ は一点, つまり A_R が X 上の点を分離している。このことより Hoffman-Wermer の定理はただちにで, $\operatorname{Re} A \subset \operatorname{Re} [A] \subset [\operatorname{Re} A] = \operatorname{Re} A$ より $[A] = C(X)$ となる。だから [2] の後半と同様に 次の補題を用いて示される。

補題 B_2 E, F , が実 or 複素 normed linear space, で

$E \subset F$, $E \subset F$ (bounded) となる。 $\tilde{E} = l_\infty(V, E)$ 又 $\tilde{F} = l_\infty(V, F)$ とおく。このとき $\tilde{E} \subset \tilde{F}$ となるが E が完備で $\tilde{E}$ が $\tilde{F}$ で dense となれば $E = F$ となる。

§ 3. ring 性に関する定理について。

Werner [18] は次の定理を示した。

定理1 A を X 上の function algebra とする。このとき $\text{Re } A$ が ring となれば $A = C(X)$ となる。

ring 性に関する定理は closed 性に比べると少ないが、最近, Bernard によっていくつかの結果が得られた。又 ring 性と closed 性の関係についても詳しくは知られていない。ここでは Bernard による結果の紹介と function algebra に関する定理を考える。まず ultraseparating の定義をあげる。

定義 A を $C(X)$ 内の real or complex normed linear space とする。又 $A \xrightarrow{c} C(X)$ (bounded) とする。 A が ultraseparating とは $\tilde{A} = l_\infty(V, A) \subset l_\infty(V, C(X)) = C(V \times X)$ となることから、 $\tilde{A}$ が $\overline{V \times X}$ の二点を分離するときをいう。 $\overline{V \times X}$ は Stone-Cech の compact 化。

ultraseparating に関する次の性質が知られている。

補題 A が X 上の function algebra で Dirichlet となれば A は ultraseparating となる。

このことを用いて Bernard [4] は次のように Wermer の定理を一般の Banach function algebra の場合へ拡張した。

定理 Be₃ A を X 上の Banach function algebra で ultra-separating とする。 $\text{Re} A$ が ring となれば $A = C(X)$ 。

前の補題と Stone-Weierstrass の定理より、ただちに 定理 1 が示される。次にこの定理の略証を示す。次の補題が示される。

補題 Be₄ A, B を $C(X)$ 内の Banach algebra で A は ultra-separating, $1 \in A \subset B$, $B = \overline{B}$ とすれば $B = C(X)$ 。

<定理 Be の証明> $B = \text{Re} A + i \text{Re} A$ とおく。 $\text{Re} A \ni u$ に対して $N(u) = \inf \{ \|f\|_A; f \in A, \text{Re} f = u \}$ という norm を与え B 内の $u + i v$ に対して $N(u + i v) = N(u) + V(v)$ とする。そして $\|u + i v\|_B = \sup_{\theta} N(e^{i\theta}(u + i v))$ とすれば 補題 Be から $B = C(X)$ が示され $\text{Re} A = \text{Re} B = C_R(X)$ となることより $A = C(X)$ となる。

次に証明なしに 定理 Be₃ の拡張を示す。これはあとでいくつかの応用を生む。

定義 X を位相空間, $A \subset C(X)$, $S \subset \mathbb{R}$ とする。 φ を S から $\mathbb{R}$ への函数とするとき,

(1) φ が operates in A とは $A \ni f$ で $f(x) \in S$ となるものに対して $\varphi \circ f \in A$ となること。

(2) A が normed space のとき φ が operates boundedly in A とは $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists M(\varepsilon) > 0$ が定まり, $A \ni f$ で $f(x) \in S$ $\|f\|_A \leq \varepsilon$ となるものに対して $\varphi \circ f \in A$ $\|\varphi \circ f\|_A \leq M(\varepsilon)$ となること。

定理 B_{6.5} (Bernard [5]) A を X 上の function algebra とする。今 non-affine continuous function が $(\mathbb{R}A, V)$ に operates boundedly となれば $A = (X)$ 。

定理 1 は t^2 となっている特別な場合である。

次に function algebra の場合の §2 の定理 W₁ - W₃ と類似の形に ring 性の定理の拡張ができることを示す。ultraseparating とよく似た仮定を入れて一般の Banach function algebra の場合にも拡張できるが、ただ uniformly closed を仮定する。

定理 2 A を X 上の function algebra とする。(separates points という仮定はのぞける。) $A \supset I$ を closed ideal とする。このとき $A \supset N$ なる closed subspace があり ($V \supset I$)。 $N + I$ が ring となれば $I = \bar{I}$ となる。

定理 3 I, J を A の closed ideal とすれば $I + \bar{J}$ が ring となるとき $I \cap J = \overline{I \cap J}$ となる。

いずれも Wermer の定理の拡張となっている。

<定理 2 の証明> M を V によって generate される closed

subalgebra とする, $M \supset N \ni 1$ と仮定してよい。 K を M の maximal antisymmetric set とすれば $I|_K, M|_K$ は $C(K)$ で uniformly closed となる。又 $(N+I)|_K$ も ring となるから N の実数値函数全体 $(N|_K + I|_K) \cap R \in \text{ring}$ となる。

簡単な計算から $(N|_K + I|_K) \cap R = R + \text{Re } I|_K$ だから $\text{Re}(I+1)|_K$ は ring となっている。このことより Wermer の定理から $\text{Re}(I|_K + 1)$ は uniformly closed となり定理 1 の系 2 から $I|_K \subset \{\text{constants}\}$ となる。だから Bishop の定理から $I = \bar{I}$ となる。

定理 3 の証明も A の maximal antisymmetric set に対して同様のことを行うとよい。この定理から function algebra に関する essential set との関連性が, Wada [15] と同様に示される。

§ 4. $\text{Re } A$ に関するその他の定理について。

さしごとに, closed 性や ring 性を用いて得られるいくつかの結果を列挙しておく。

定理 Be₆ (Bernard [3]) $A, B \in C(X)$ 内の Banach algebra とし $A \subset B$, $\text{Re } A = \text{Re } B$ を仮定する。今次の (H₁) (H₂) のいずれかをみたせば $A = B$ となる。

(H₁) B は uniformly closed。

(H₂) A は uniformly closed. $B \cap \bar{B}$ は closed in B 。

定理 Be₇ (Bernard [5]) A を function algebra とする。 $\operatorname{Re} A$ が lattice となれば $A = C(X)$ となる。

この定理は Wilken の問に答えたもので n 次の interpolation set に関する定理と関連する。

定理 Du (Dufresnoy [11]) E, F を interpolation set とする。 $E \cup F$ が peak set とすれば、 $A|_{(E \cup F)}$ は self adjoint ぐ、 $\operatorname{Re} A|_{(E \cup F)}$ は lattice となる。

又最近 disk algebra の real parts に関して O'Connell は次の定理を示した。証明は disk algebra そのものの性質を多数用いているが、ある程度一般化できると思う。

定理 O (O'Connell [19]) $P = \{ |z| = 1 \}$ とおく。今 A_0 を disk algebra とするとき ある function algebra B が $\operatorname{Re} A_0 \subset \operatorname{Re} B$ となれば P から Γ への絶対連続な値相合同型が存在して、

$B = A(\Sigma) = \{ f(\Sigma); f \in A \}$ と書ける。逆に Σ が Γ に属する Γ から Γ 上への値相合同型で $\lim_{\Sigma} (e^{it}) \neq 0$ が全この実で成立すれば $\operatorname{Re} A(\Sigma) = \operatorname{Re} A$ となる。

(注意) E. L. Anenson による [1] の新しい証明が発表された。これによって 92 定理 1 の逆の証明は少し意味がうまれる。しかしこの結果を ideal に応用してやることは気がついていないようだ。 c.f. Siberian Math. J. Vol 13 (1973) 831,

REFERENCE

- [1] E. L. Arenson ; Certain properties of algebras of continuous functions, Dokl. Acad. Nauk SSSR 171 (1966) 767-769, Soviet math Dokl 7 (1966) 1522-1524.
- [2] A. Bernard ; Une caractérisation de $C(X)$ parmi les algèbres de Banach, C. R. Acad. Sc. Paris 267 (1968) A 634-635
- [3] ——— ; Comparaison d'algèbres de fonctions à l'aide des parties réelles de leurs éléments, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 270 (1970) A 29 - A 32.
- [4] ——— ; Algèbres ultraséparantes de fonctions, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 270 (1970) A 818 - A 819.
- [5] ——— ; Fonctions qui opèrent sur $\text{Re } A$ C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A-B 271 (1970) A 1120 - 1121
- [6] ——— ; Espace des parties réelles des éléments d'une algèbre de Banach de fonctions, J. Functional Analysis 10 (1972) 387-409.
- [7] R. B. Burkel ; Characterization of $C(X)$ among its subalgebras, Lecture note in Pure and applied maths. Marcel Dekker (1972)
- [8] I. Glicksberg ; Measure orthogonal to algebras and sets of antisymmetry Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) 415-435.
- [9] ——— ; On two consequences of a theorem of Hoffman

- Wermer, Math. Scand. 23 (1968) 188-192.
- [10] ———; Recent result on Function algebras, Amer. Math. Soc. Providence Rhode Island (1971)
- [11] A. Dufresnoy; Parties réelles de certains quotients d'algèbres uniformes, C. R. Acad. Sci. Paris (to appear)
- [12] K. Hoffman and J. Wermer; A characterization of CO , Pacific J. Math. 12 (1962) 941-944
- [13] S. J. Sidney and E. L. Stout; A note on interpolation, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968) 380-382
- [14] J. Wada; On a theorem of I. Glicksberg, Proc. Japan Acad. 48 (1972) 227-230.
- [15] ———; Function algebra における実数部分の空間に, といふ。早大教育紀要 20 (1971) 29-35
- [16] ———; Abstract harmonic function と integral representation, 京大数理解析師講究録 61 (1968)
- [17] S. Saeki; On Banach Algebras of Continuous Functions. (Preprint)
- [18] J. Wermer; the space of real parts of a function algebras pacific, J. Math 13 (1963) 1423-1426
- [19] J. M. F. Oconnell; Real parts of uniform algebras, Pacific J. Math. 46 (1973) 235-247.