

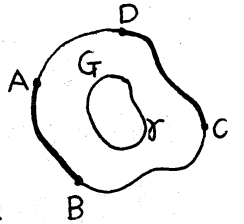
面の動きと挙動空間

京都工繊大 米谷文男

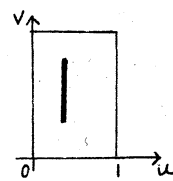
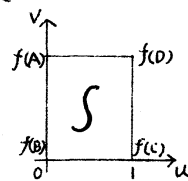
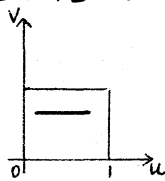
リーマン面がパラメーターに応じて動くときその上の基本的な量がどのように動くかを知ることは興味ある問題である。Ahlfors [1] は種数 g のコンパクトなリーマン面の Teichmüller 空間にリーマンの周期行列の各要素がその空間の点に関して解析関数となるように解析構造を導入し、このような解析構造は一意的であることを示した。これに対して楠氏は“擬等角写像とリーマン面”の研究集会(1979年6月)[8]において $\text{class } 0$ の開リーマン面の Teichmüller 空間上リーマンの周期行列の各要素が Bers coordinate に関して Fréchet 微分可能すなわち正則であることを示した。一方柴氏は実数体上の挙動空間の概念を用いて開リーマン面上の理論を種々展開している。ここでは柴氏とは異なる複素数体上の挙動空間に着目し、上記の問題が任意の開リーマン面でも扱われ得ることを示す。概していえば任意の開リーマン面

をとりその上で Beltrami の微分がパラメータ z に関して解析的に変化するときこの Beltrami の微分によって与えられる解析構造をもつ面は z と共に動く。そこでこれらの面上挙動空間によって定義される境界挙動をもつ規格化された才一種正則微分に関するリーマンの周期行列の各要素が z に関して解析的に動くことを報告する。

1. コンパクトな面上の理論を開リーマン面に拡張するに際し関数又は微分の境界挙動を制限することが有効な方法となる。最初に我々が必要とする境界挙動を示唆する次の問題を考える。右図のような二重連結領域 G において γ を縫い合わせる。縫い合わされて得られた単連結領域において弧 $\widehat{AB}$ から $\widehat{CD}$ に至る曲線族の極値的長さを最大(小)にするように γ を縫い合わせよ。



これは次の様にも考えられる。 G 上の等角写像 $f = u + iV$ ($u = 0$ on $\widehat{AB}$, $= 1$ on $\widehat{CD}$, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ on $\widehat{AD}$, $\widehat{BD}$, $V(B) = 0$, γ は $u=1$ に写る) を満足する写像のうちで $u(A)$ を最小(大)にせよ。これは容易に推量されるように水平(垂直)截線に写す等角写像が極値関数となる。



2. 任意の開リーマン面 R 上で上記に対応するものとして次の事実がある。 R 上 2 乗可積分な複素微分の作る空間 Γ , Γ_h , Γ_{hse} , Γ_{ase} , Γ_{hm} , Γ_{eo} 等の記号は Ahlfors Sario [3] に従うものとする。 $\{A_j, B_j\}$ を R 上の標準ホモロジー基底 ($\text{mod } \partial R$) とし、次の性質を満たすとする。(i) 各 A_j, B_j は解析的な単純閉曲線 (ii) $A_i \times B_j = \delta_{ij}$, $A_i \times A_j = B_i \times B_j = 0$ 但し各 A_j と B_j のみが一点で交わり A_j は B_j を右から左に横切るものとする。さて R 上に正規微分と呼ばれる次の条件を満足する正則微分 ω_{A_j} が存在する。(楠 [7])

$$(i) \quad \omega_{A_j} \in \Gamma_{ase} \quad (ii) \quad \int_{A_i} \omega_{A_j} = \delta_{ij}$$

$$(iii) \quad \text{Im } \omega_{A_j} = \omega_j + \omega_0, \quad \omega_j \in \Gamma_{hm}, \quad \omega_0 \in \Gamma_{eo}$$

条件 (iii) は上記の水平截線への写像に対応していると考えられ次の極値性をもつ。

$$\text{命題 1. } \|\omega_{A_j}\| = \inf \{\|\varphi_j\|; \varphi_j \in \Gamma_{ase}, \int_{A_i} \varphi_j = \delta_{ij}\}$$

(ノルム $\|\cdot\|$ はヒルベルト空間 Γ におけるものである。)

3. 次に有限個の解析曲線 γ によって囲まれた種数有限の開リーマン面 R_0 において γ を縫い合わせて R_0 をコンパクトな面に埋めこむことを考える。各境界成分 γ_i の近傍 V_i と媒介変数 z_i を固定し

$$V_i = \{P \in R_0; \gamma_i < z_i(P) < 1\} \quad Y_i = \{P \in \overline{R_0}; |z_i(P)| = 1\}$$

とする。そして $\omega \in \Gamma_{ase}$ を各 V_i 上次のように書く。

$$\omega = C_0^i(\omega) d \log |z_i| + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^i(\omega) d \frac{z_i^n + \bar{z}_i^n}{2} + d_n^i(\omega) d \left(\frac{z_i^n - \bar{z}_i^n}{2} \right)$$

面 R_0 の標準ホモロジー基底 ($\text{mod } \partial R_0$) $\{A_j, B_j\}$ に対応して実数列 $\{a_j, b_j\}$, $a_j \neq 0$ を固定し、次の微分の族を考える。

$$\Gamma_{E, \{z_i\}} = \left\{ \omega \in \Gamma_{ase} ; \begin{array}{l} \text{(i) } a_j \int_{A_j} \omega = b_j \int_{B_j} \omega \text{ for } \forall j \\ \text{(ii) } d_n^i(\omega) = d_{-n}^i(\omega) \end{array} \right\}$$

これは明らかに Γ_{ase} の部分空間であるが更に次がいえる。

命題 2. $\Gamma_{E, \{z_i\}}$ に属する微分の共役微分が作る空間 $\Gamma_{E, \{z_i\}}^*$ は Γ_E の Γ_a における直交補空間である。即ち $\Gamma_{E, \{z_i\}} + \Gamma_{E, \{z_i\}}^* = \Gamma_a$ 。

有理型微分 φ が $\Gamma_{E, \{z_i\}}$ -挙動を持つことを φ がある境界近傍において $\varphi = \omega + \omega_0$, $\omega \in \Gamma_{E, \{z_i\}}$, $\omega_0 \in \Gamma_{e0}$ と表わされることと定義すれば、

命題 3. R_0 上の有理型微分 φ が $\Gamma_{E, \{z_i\}}$ -挙動を持つことと、各 V_i 上 $\varphi = d \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n^i \left(z_i^n + \frac{1}{\bar{z}_i^n} \right) \right\}$ と表わされることは同値である。

この命題によつて $\Gamma_{E, \{z_i\}}$ -挙動をもつ有理型微分は γ_i を z_i と $\bar{z}_i$ で縫い合わせたコンパクトな面 R_E 上の有理型微分とみなしてよい。又逆にコンパクトな面 R_S があって R_0 がその

有限個の截線を除いた所に埋め込まれていると考えられる時、 R_S から決まる局所変数 z_i をとれば R_S 上の有理型微分は R_0 上の $\Gamma_{E, \{z_i\}}$ -挙動をもつ有理型微分と同一視される。

系 R_0 上の有理型関数 f, g に対し df, dg が $\Gamma_{E, \{z_i\}}$ -挙動をもつならば $d(f \cdot g)$ も $\Gamma_{E, \{z_i\}}$ -挙動をもつ。特に df^n も $\Gamma_{E, \{z_i\}}$ -挙動をもつ。

4. 再び任意のリーマン面 R 上に考察をうつす。今 R 上に $\Gamma_{E, \{z_i\}}$ と同じ性質を持つ微分の空間を考えれば、コンパクトな面上の理論が開リーマン面においても展開できるのではないかと期待される。

命題 4. 任意のリーマン面上任意に与えられた実数列 $\{a_i, b_i\}$ ($a_i \neq 0$) に対して次の条件を満足する微分の空間 Γ_X が存在する。(i) $\Gamma_X \subset \Gamma_{hse}$ (ii) $\Gamma_X + \Gamma_X^* = \Gamma_A$ (iii) $\Gamma_X = \overline{\Gamma_X}$
(iv) $a_i \int_{A_i} \omega = b_i \int_{B_i} \omega, \omega \in \Gamma_X \text{ for } \forall i$

このような空間 Γ_X を (X, a_i, b_i) -挙動空間又は単に挙動空間と呼び、有理型微分 φ が Γ_X -挙動をもつことを適当な境界近傍 V , $\omega \in \Gamma_X, \omega_0 \in \Gamma_{eo}$ が存在して V 上 $\varphi = \omega + \omega_0$ なることと定義する。

さて $\{G_n\} \in \{A_j, B_j\}$ に介した標準近似列とする。又 Γ_{se} の元 ω を $R-U(A_j \cup B_j)$ 上の関数 W によって $dW = \omega$ のように表わす。

補題 1. 挙動空間 Γ_x の任意の微分 $\omega_1 = dW_1, \omega_2$ に対

して
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial G_n} W_1 \bar{W}_2 = 0$$

証明 条件 (i), (iv) に注意して

$$\begin{aligned} (\omega_1, \omega_2^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\int_{\partial G_n} W_1 \bar{W}_2 + \sum_{G_n} \left[\int_{A_i} W_1 \int_{B_i} \bar{W}_2 - \int_{B_i} W_1 \int_{A_i} \bar{W}_2 \right] \right\} \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial G_n} W_1 \bar{W}_2 \end{aligned}$$

ところで条件 (ii) から $(\omega_1, \omega_2^*) = 0$ となり結論を得る。

更に ω_1 が正則ならば $\omega_1 = i\omega_1^*$ であるから次を得る。

命題 5. 挙動空間 Γ_x に属する正則微分は 0 に限る。

又上と同様にして次を得る。

補題 2. $df_0 \in \Gamma'_{e0}, \sigma \in \Gamma'_c$ に対して
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial G_n} f_0 \bar{\sigma} = 0$$

$$dS \in \Gamma'_{se}, \sigma_0 \in \Gamma'_{e0} \text{ に対して } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial G_n} S \bar{\sigma}_0 = 0$$

これを用いて

命題 6. Γ_x -挙動を持つ有理型微分 $\varphi_1 = d\Phi_1, \varphi_2$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial G_n} \Phi_1 \bar{\varphi}_2 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial G_n} \Phi_1 \varphi_2 = 0.$$

ここで Γ_X -挙動をもつ 1 種正則微分の存在を示す。

命題 7. Γ_X -挙動をもつ *trivial* でない正則微分が存在し次のように規格化すればその微分 $\varphi_{j,x}(\varphi'_{j,x})$ は唯一である。

$$a_i \int_{A_i} \varphi_{j,x} = b_i \int_{B_i} \varphi_{j,x} - a_i \delta_{ij} \quad \text{for } \forall i$$

$$(a_i \int_{A_i} \varphi'_{j,x} = b_i \int_{B_i} \varphi'_{j,x} - b_i \delta_{ij} \quad \text{for } \forall i)$$

証明 サイクル B_j の左側で 1 右側で 0 として境界近傍で 0 をとる $R - B_j$ 上の C^∞ 関数を f_j とすれば $\int_{A_i} df_j = \delta_{ij}$, $\int_{B_i} df_j = 0$ となる。 df_j を $\Gamma = \Gamma_X + \Gamma_X^* + \Gamma_{e_0} + \Gamma_{e_0}^*$ によつて直交分解して

$$df_j = \sigma_j + \tau_j^* + \sigma_0 \quad \sigma_j, \tau_j \in \Gamma_X \quad \sigma_0 \in \Gamma_{e_0}$$

と表わせば ある境界近傍 V 上 $df_j = 0$ だから V 上で $\tau_j^* = -(\sigma_j + \sigma_0)$ となる。従つて $\tau_j^* - i\tau_j$ は Γ_X -挙動をもつ。又、

$$\begin{aligned} a_i \int_{A_i} \tau_j^* &= a_i \int_{A_i} (df_j - \sigma_j - \sigma_0) = -a_i \delta_{ij} - a_i \int_{A_i} \sigma_j \\ &= -a_i \delta_{ij} - b_i \int_{B_i} \sigma_j = b_i \int_{B_i} \tau_j^* - a_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$a_i \int_{A_i} i\tau_j = b_i \int_{B_i} i\tau_j$$

であるから、 $\varphi_{j,x} = \tau_j^* - i\tau_j$ は条件を満足する。

一意性は命題 5 から得られる。 $(\varphi'_{j,x})$ についても同様である。

この証明内の $(\sigma_j + \tau_j^*)^*$ は Γ_X の B_j に対する周期再生微分

$$(\omega, (\sigma_j + \tau_j^*)^*) = \int_{B_j} \omega \quad \text{for } \forall \omega \in \Gamma_X$$

であり $\|\sigma_j + \tau_j^*\|^2$ は B_j にホモロークな曲線族の極値的長さ $\lambda(B_j)$ に等しい (cf. [7])。又、命題 1 を考慮して

$$0 < \|\omega_{A_j}\|^2 \leq \|\varphi_{j,x}\|^2 = 2\|\tau_j\|^2 \leq 2\lambda(B_j) < \infty$$

を得る。有限個の解析曲線によって囲まれた種数有限のリーマン面においては、 $\int \omega_{A_j}$ は各境界成分を正確に水平截線に写し、これによって定まる媒介変数から作られる $\Gamma_{E,\{z_i\}}$ を Γ_{x_0} とすれば $\omega_{A_j} = \varphi_{j,x_0}$ となる。一般のリーマン面において

$$\|\varphi_{j,x_1}\| = \sup \{ \|\varphi_{j,x}\| : \Gamma_x \text{ は } (x, a_i, b_i)\text{-挙動空間} \}$$

$$\|\varphi_{j,x_0}\| = \inf \{ \|\varphi_{j,x}\| : \Gamma_x \text{ は } (x, a_i, b_i)\text{-挙動空間} \}$$

となる挙動空間 $\Gamma_{x_1}, \Gamma_{x_0}$ は存在するだろうか。又このような Γ_{x_0} の中から $\Gamma_{E,\{z_i\}}$ に関し命題3系に示されたように微分が Γ_x -挙動をもつ有理型関数の族で積によって閉じているものが存在しているであろうか。挙動空間 $\Gamma_{x_1}, \Gamma_{x_0}$ の存在を仮定し、 $\Gamma_p = \{ \omega \in \Gamma_{\text{hsc}} ; a_i \int_{A_i} \omega = b_i \int_{B_i} \omega \}$ とおけば任意の (x, a_i, b_i) -挙動空間 Γ_x は Γ_p に含まれ次を得る。

命題 8. $\|\varphi_{j,x_1}\| = \sup \{ \|\varphi_{j,x}\| ; \Gamma_x \text{ は } (x, -a_i, b_i)\text{-挙動空間} \}$

$$\Rightarrow -1 \leq y_1 \leq 1 \text{ s.t. } \Gamma_{x_1}^* \cap \Gamma_p \ni \omega \text{ に対し } i y_1 \int_{B_i} \omega^* = \int_{B_i} \omega$$

$$\|\varphi_{j,x_0}\| = \inf \{ \|\varphi_{j,x}\| ; \Gamma_x \text{ は } (x, -a_i, b_i)\text{-挙動空間} \}$$

$$\Rightarrow -1 \leq y_0 \leq 1 \text{ s.t. } \Gamma_{x_0}^* \cap \Gamma_p \ni \forall \omega \text{ に対し } i \int_{B_i} \omega^* = y_0 \int_{B_i} \omega$$

$$\text{又は } \int_{B_i} \omega^* = 0$$

次に命題6と挙動空間の定義を用いて内積 $(\varphi_{i,x}, \overline{\varphi_{j,x}}^*)$, $(\varphi_{j,x}, \varphi_{j,x})$ を計算すれば

命題 9. $\int_{B_i} \varphi_{j,x} = \int_{B_j} \varphi_{i,x}$, $\|\varphi_{j,x}\|^2 = 2 \operatorname{Im} \int_{B_j} \varphi_{j,x}$

ここで $\int_{B_i} \varphi_{j,x} = t_{ij}(x)$ とおく。

今前記 R_0 上で与えられた媒介変数 x がパラメータ t と共に動くとし、それに応じて $\Gamma_{x(t)} \varphi_{j,x}$ も t と共に動くとする。そこで t_{ij} を変数 t の関数と考える。 R_0 上に Γ_{x_0} は存在するから $\operatorname{Im} t_{jj}$ はここで最小値をとり、どのようなパラメータ t をと、ても t_{ij} はこの点で t に関し正則に動くことはない。

才1種正則微分と同様に

命題 10. 任意のリーマン面上に次のように規格化された Γ_x -挙動をもつ才2種、才3種の有理型微分 $\varphi_{p,n,x}$ ($n \geq 1$)

$\varphi_{p,q,x}$ が一意に存在する。

$\varphi_{p,n,x}$ は p にのみ特異性 $d(\frac{1}{q^n})$ (q は p の周りの局所変数) をもち

$$a_i \int_{A_i} \varphi_{p,n,x} = b_i \int_{B_i} \varphi_{p,n,x} \quad \text{for } \forall i$$

$\varphi_{p,q,x}$ は p, q にのみ特異性 $\frac{d\zeta}{\zeta}, -\frac{d\eta}{\eta}$ (η は q の周りの局所変数) をもち

$$a_i \int_{A_i} \varphi_{p,q,x} = b_i \int_{B_i} \varphi_{p,q,x} \quad \text{for } \forall i$$

又 $\Phi_j^x(\rho, t) = \int_t^\rho \varphi_{j,x}$, $\Phi_{p,n}^x(\rho, t) = \int_t^\rho \varphi_{p,n,x}$, $\Phi_{p,q}^x(\rho, t) = \int_t^\rho \varphi_{p,q,x}$
(p, q, ρ, t は $U(A_j \cup B_j)$ 上にないとし、積分路は $R - U(A_j \cup B_j)$ で
とるものとする。)とおけば、これらは $R - U(A_j \cup B_j)$ 上の有理

型関数となり、更に次の関係がある。

命題 11. (1) $\int_{B_j} \varphi_{p,q,x} = 2\pi i \int_q^p \varphi_{j,x} = 2\pi i \Phi_j^x(p, q)$
 (2) $\int_{B_j} \varphi_{p,n,x} = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} \Phi_j^x(\zeta, t) \Big|_{\zeta=0}$
 (3) $\Phi_{p,q}^x(\rho, t) = \Phi_{\rho,t}^x(p, q)$
 (4) $\frac{d^n}{d\eta^n} \Phi_{p,n}^x(\eta, t) \Big|_{\eta=0} = \frac{d^n}{d\zeta^n} \Phi_{\zeta,n}^x(\zeta, t) \Big|_{\zeta=0}$
 (5) $\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} \Phi_{\rho,t}^x(\zeta, q) \Big|_{\zeta=0} = \Phi_{p,n}^x(\rho, t) = \int_t^\rho \varphi_{p,n,x}$

以上の Γ_x -挙動をもつオ1種、オ2種、オ3種の有理型微分を用いて、任意のリーマン面上で Riemann-Roch, Abel の定理を定式化することができる。

δ_p, δ_q を $\mathbb{R}$ 上の互に素で有限な整因子とし因子 δ_p/δ_q を δ と書く。このような δ に関し次の複素ベクトル空間を考える。

$$S(X; 1/\delta) = \left\{ f; \begin{array}{l} \text{(i) } df \text{ は } \Gamma_x\text{-挙動をもつ有理型微分。} \\ \text{(ii) } f \text{ は一価有理型関数} \\ \text{(iii) } f \text{ の因子は } 1/\delta \text{ の倍元である。} \end{array} \right\}$$

$$M(X; 1/\delta_p) = \left\{ f; \begin{array}{l} \text{(i) } df \text{ は } \Gamma_x\text{-挙動をもつ有理型微分で} \\ a_i \int_{A_i} df = b_i \int_{B_i} df \text{ for } \forall_i \text{ を満足する。} \\ \text{(ii) } f \text{ の因子は } 1/\delta_p \text{ の倍元である。} \end{array} \right\}$$

$$D(X; \delta) = \left\{ \varphi; \begin{array}{l} \text{(i) } \varphi \text{ は } \Gamma_x\text{-挙動をもつ有理型微分。} \\ \text{(ii) } \varphi \text{ の因子は } \delta \text{ の倍元である。} \end{array} \right\}$$

$$D(X; 1/\delta_q) = \left\{ \varphi; \begin{array}{l} \text{(i) } \varphi \text{ は } \Gamma_x\text{-挙動をもつ有理型微分。} \\ \text{(ii) } \varphi \text{ の因子は } 1/\delta_q \text{ の倍元である。} \end{array} \right\}$$

(但し $\delta_p \neq 1$ ならば $M(X; 1/\delta_p)$ の 2 元 f_1, f_2 は $f_1 - f_2$ が定数のとき同一視する。)

命題 12. (Riemann-Roch Theorem)

$$\dim S(X; 1/\delta) = \deg \delta_p + 1 + \min(\delta_g, 1) - \dim \frac{D(X; 1/\delta_g)}{D(X; \delta)}$$

特に R の種数 g が有限ならば

$$\dim S(X; 1/\delta) = \dim D(X; \delta) + \deg \delta - g + 1$$

因子 δ の次数が 0 のとき $\delta = P_1 \cdots P_m / Q_1 \cdots Q_n$ と表わし

命題 13. (Abel's Theorem)

δ を因子とする有理型関数 f で $d \log f$ が R_X -挙動をもち

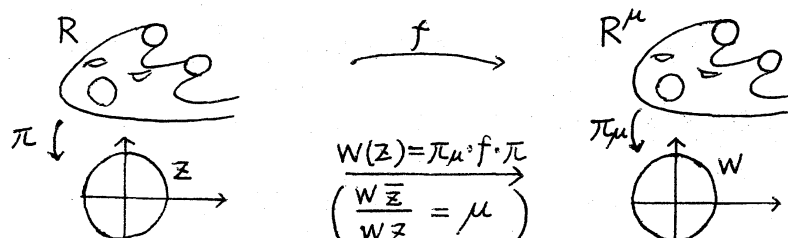
$$a_i \int_{A_i} d \log f = b_i \int_{B_i} d \log f \quad \text{for } \forall i$$

を満足する関数が存在するための必要十分条件は、

1 チェイン $\gamma, \partial \gamma = \sum_{i=1}^n P_i - Q_i$ があり、 $\int_{\gamma} \varphi_{j,x}, \int_{\gamma} \varphi'_{j,x}$ がすべて整数となることである。(但し $\varphi_{j,x}, \varphi'_{j,x}$ は命題 7 で与えられた γ 1 種正則微分である。)

注 これらの Riemann-Roch, Abel の定理をある種の制限の下に δ が無限因子である場合にも定式化することができ。

5. 任意の開リーマン面 R 上で Beltrami の微分 $\mu \frac{d\bar{z}}{dz}$ ($\mu \in C^2, |\mu| \leq k < 1$) を考え $ds = |dz + \mu d\bar{z}|$ によって等角構造が導入されたリーマン面を R^μ とする。



上の図式において $\mu \in C^2$ とすれば、 $f \in C^2$ (cf. [4]) となり R 上の調和微分 ω (i.e. $\omega \in \Gamma_h(R)$) は R^μ 上の閉微分とみなせるから、直交分解 $\Gamma_c(R^\mu) = \Gamma_h(R^\mu) + \Gamma_{e0}(R^\mu)$ によて

$$\omega = \omega^\mu + \omega_0^\mu, \quad \omega^\mu \in \Gamma_h(R^\mu), \quad \omega_0^\mu \in \Gamma_{e0}(R^\mu)$$

と表現される。又明らかに

$\int_{A_j} \omega = \int_{A_j} \omega^\mu$ for $\forall A_j$, $\int_{B_j} \omega = \int_{B_j} \omega^\mu$ for $\forall B_j$ である。今 $\Gamma_h(R)$ から $\Gamma_h(R^\mu)$ への写像 L を $L(\omega) = \omega^\mu$ によて定義する。このとき $L(0) = 0$, $L(\omega_1 + \omega_2) = L(\omega_1) + L(\omega_2)$, $L(\bar{\omega}) = \overline{L(\omega)}$ は明らかである。又 $\Gamma_h(R^\mu)$ から $\Gamma_h(R)$ への写像 L_μ を同様にして定義すれば

$$L_\mu \circ L(\omega) - \omega = L_\mu(\omega^\mu) - \omega = L_\mu(\omega - \omega_0^\mu) - \omega = 0$$

によて、 $L_\mu \circ L(\omega) = \omega$ 同様に $L \circ L_\mu(\omega') = \omega'$ が示される。従て L が $\Gamma_h(R^\mu)$ の上への写像であることを知る。

さて $\Gamma_x(R)$ を R 上の (x, a_i, b_i) -挙動空間として、

$$\Gamma_x^\mu = \{ \omega^\mu \in \Gamma_h(R^\mu); \omega \in \Gamma_x(R) \}$$

とおく。明らかに $\Gamma_x^\mu \subset \Gamma_{\text{ase}}(R^\mu)$ であり、次の補題に注意したい。

補題 3. 挙動空間 $\Gamma_x(R)$ の任意の 2 元 ω_1, ω_2 に対して

$$(L(\omega_1)^*, L(\omega_2^*))_{R^\mu} = (\omega_1, \omega_2)_R$$

(但し、 $(,)_{R^\mu}$ は R^μ 上の $(,)_R$ は R 上のデリクレの内積を表わす。)

証明 補題 1, 2, そして挙動空間の条件 iv に留意して

$$\begin{aligned} (\omega_1^\mu, (\omega_2^*)^{\mu*})_{R^\mu} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\int_{\partial G_n} W_1^\mu \overline{(\omega_2^*)^\mu} + \sum_{G_n} \left[\int_{A_i} \omega_1^\mu \int_{B_i} \overline{(\omega_2^*)^\mu} - \int_{B_i} \omega_1^\mu \int_{A_i} \overline{(\omega_2^*)^\mu} \right] \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\int_{\partial G_n} (W_1 - (W_1)_0^\mu) \overline{(\omega_2^* - (\omega_2^*)_0^\mu)} + \sum_{G_n} \left[\int_{A_i} \omega_1 \int_{B_i} \overline{\omega_2^*} - \int_{B_i} \omega_1 \int_{A_i} \overline{\omega_2^*} \right] \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\int_{\partial G_n} W_1 \overline{\omega_2^*} + \sum_{G_n} \left[\int_{A_i} \omega_1 \int_{B_i} \overline{\omega_2^*} - \int_{B_i} \omega_1 \int_{A_i} \overline{\omega_2^*} \right] \right\} \\ &= (\omega_1, \omega_2^{**})_R \quad (\alpha W_1 = \omega_1, \alpha (W_1)_0^\mu = (\omega_1)_0^\mu) \end{aligned}$$

即ち $(\omega_1^{\mu*}, (\omega_2^*)^\mu)_{R^\mu} = (\omega_1, \omega_2)_R$ となり結論を得る。

又上の証明と同様にして

$$\begin{aligned} (\omega_1^\mu, \omega_2^{\mu*}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\int_{\partial G_n} W_1^\mu \overline{\omega_2^\mu} + \sum_{G_n} \left[\int_{A_i} \omega_1^\mu \int_{B_i} \overline{\omega_2^\mu} - \int_{B_i} \omega_1^\mu \int_{A_i} \overline{\omega_2^\mu} \right] \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\int_{\partial G_n} (W_1 - (W_1)_0^\mu) \overline{(\omega_2 - (\omega_2)_0^\mu)} = 0 \end{aligned}$$

従って Γ_x^μ と $\Gamma_x^{\mu*}$ は直交する。次に $\tilde{\omega} \in \Gamma_x(R^\mu)$ を

$\Gamma_x^\mu + \Gamma_x^{\mu*}$ に直交する微分とし、更に $L_\mu(\tilde{\omega}) \in \Gamma_x(R)$ を

$$L_\mu(\tilde{\omega}) = \omega_1 + \omega_2^*, \quad \omega_1, \omega_2 \in \Gamma_x(R)$$

と表現する。補題 3 と $\tilde{\omega} = L \circ L_\mu(\tilde{\omega}) = L(\omega_1) + L(\omega_2^*)$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} 0 &= (\tilde{\omega}, L(\omega_2)^*) = (L(\omega_1) + L(\omega_2^*), L(\omega_2)^*) \\ &= (L(\omega_2^*), L(\omega_2)^*) = (\omega_2, \omega_2) \end{aligned}$$

これは $\tilde{\omega} = L(\omega_1)$ であることを示し、 $(\tilde{\omega}, L(\omega_1)) = 0$ から結局 $\tilde{\omega} = 0$ となる。以上により次の命題を得る。

命題 14. $\Gamma_{x^\mu} + \Gamma_{x^\mu}^* = \Gamma_n(R^\mu)$

Γ_{x^μ} は R^μ 上の一つの挙動空間である。

6. ここで Rauch [6], Ahlfors [1] の Hadamard variation の方法により、周期行列の各要素の解析性に関する問題を扱うことができる。微分 φ_{j,x^μ} を命題 7 に与えられたような R^μ 上の Γ_{x^μ} -挙動をもつ 1 種正則微分とすれば

$$a_i \int_{A_i} (\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x}) = b_i \int_{B_i} (\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x}) \quad \text{for } \forall i$$

であるから

$$\begin{aligned} &(\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x}, (\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x})^*)_R \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ - \int_{\partial G_n} (\Phi_j^{x^\mu} - \Phi_j^x) \overline{(\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x})} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{G_n} \left[\int_{A_i} (\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x}) \overline{(\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x})} - \int_{B_i} (\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x}) \overline{(\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x})} \right] \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

又一方

$$\begin{aligned} &(\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x}, (\varphi_{j,x^\mu} - \varphi_{j,x})^*)_R \\ &= - \iint_R \left\{ \left| \frac{d\Phi_j^{x^\mu}}{dW} \cdot W_z - \frac{d\Phi_j^x}{dW} \right|^2 - \left| \frac{d\Phi_j^{x^\mu}}{dW} \cdot W_{\bar{z}} \right|^2 \right\} dz d\bar{z} \end{aligned}$$

となり、次の補題を得る。

補題 4. $\iint_R |(\Phi_j^{x''})_w W_z - (\Phi_j^x)_z|^2 dz d\bar{z} = \iint_R |(\Phi_j^{x''})_w \mu W_z|^2 dz d\bar{z}$
 $(W_{\bar{z}}/W_z = \mu)$

又、この補題と

$$(\varphi_{j,x''} - \varphi_{j,x}, \varphi_{j,x''} - \varphi_{j,x}) \\
= i \iint_R \left\{ \left| \frac{d\Phi_j^{x''}}{dw} W_z - \frac{d\Phi_j^x}{dz} \right|^2 + \left| \frac{d\Phi_j^{x''}}{dw} W_{\bar{z}} \right|^2 \right\} dz d\bar{z}$$

を用いて次を得る。

命題 15. $|\mu| \leq k < 1 \Rightarrow \|\varphi_{j,x''} - \varphi_{j,x}\| \leq \frac{k}{1-k} \|\varphi_{j,x}\|$

今、 $\mu(z, 0) \frac{d\bar{z}}{dz} = 0$ として $\mu(z, t) \frac{d\bar{z}}{dz}$ は t を固定すれば $|\mu(z, t)| \leq k < 1$ の C^2 -Beltrami の微分となり、 z を固定すれば t に関し解析的であるとする。又 $\mu_t(z, t)$ は z, t に関し有界連続であるとする。 $\mu(z, t)$ による Riemann 面 $R^{\mu(z, t)}$ は t をパラメーターとして動く。

命題 6. 挙動空間の条件 IV から

$$(\varphi_{j,x^{\mu(z,t)}}, \overline{(\varphi_{j,x^{\mu(z,t)}} - \varphi_{j,x^{\mu(z,t)}})^*})_{R^{\mu(z,t)}} \\
= \int_{B_i} \varphi_{j,x^{\mu(z,t)}} - \int_{B_i} \varphi_{j,x^{\mu(z,t)}}$$

を得、

$$t_{ij}(\mu) = t_{ij}(\mu(z, t)) = \int_{B_i} \varphi_{j,x^{\mu(z,t)}}$$

と おいて 次を得る。

命題 16. $t_{ij}(\mu)_t = \iint_{R^\mu} (\Phi_i^x)_z (\Phi_j^x)_z \mu_t dz d\bar{z}$
 即ち $t_{ij}(\mu)$ は t に関して正則である。

注 μ に関する仮定を弱めて議論すれば、例えば複素平面上 2 葉に被覆された種数無限のリーマン面において、無限に多くの分岐点が正則に動くとき上記のように規格化された 1 種正則微分の同期行列の各要素も正則に動くことが導かれるのではないかと思われる。

反-挙動をもつ 2 種 3 種の有理型微分についても同様のことが成立する。

補題 5. Beltrami の微分 μ の台は P, Q を含むある領域 V と交わらないとし、 $\Phi_{P,n}^{x^\mu}$ と $\Phi_{P,n}^x$, $\Phi_{P,Q}^{x^\mu}$ と $\Phi_{P,Q}^x$ はそれぞれ同じ特異性をもつとする。このとき

$$\begin{aligned} \iint_R |(\Phi_{P,n}^{x^\mu})_w W_z - (\Phi_{P,n}^{x^\mu})_z|^2 dz d\bar{z} &= \iint_R |(\Phi_{P,n}^{x^\mu})_w \mu W_z|^2 dz d\bar{z} \\ \iint_R |(\Phi_{P,Q}^{x^\mu})_w W_z - (\Phi_{P,Q}^{x^\mu})_z|^2 dz d\bar{z} &= \iint_R |(\Phi_{P,Q}^{x^\mu})_w \mu W_z|^2 dz d\bar{z} \end{aligned}$$

命題 17. 補題 5 と同じ仮定の下に、 $|\mu| \leq k < 1$ ならば

$$\begin{aligned} \|\varphi_{P,n,x^\mu} - \varphi_{P,n,x}\| &\leq \frac{k}{1-k} \|\varphi_{P,n,x}\|_{R-V} \\ \|\varphi_{P,Q,x^\mu} - \varphi_{P,Q,x}\| &\leq \frac{k}{1-k} \|\varphi_{P,Q,x}\|_{R-V} \end{aligned}$$

$$S_{j,p,n}(\mu) = S_{j,p,n}(\mu(z,t)) = \int_{B_j} \varphi_{p,n} \chi^{\mu(z,t)}$$

$$R_{j,p,q}(\mu) = R_{j,p,q}(\mu(z,t)) = \int_{B_j} \varphi_{p,q} \chi^{\mu(z,t)}$$

とおけば、

$$S_{j,p,n}(\mu(z,t')) - S_{j,p,n}(\mu(z,t)) = -(\varphi_j, \chi^{\mu(z,t)}, \overline{(\varphi_{p,n} \chi^{\mu(z,t')} - \varphi_{p,n} \chi^{\mu(z,t)})}^*)$$

$$R_{j,p,q}(\mu(z,t')) - R_{j,p,q}(\mu(z,t)) = -(\varphi_j, \chi^{\mu(z,t)}, \overline{(\varphi_{p,q} \chi^{\mu(z,t')} - \varphi_{p,q} \chi^{\mu(z,t)})}^*)$$

を得る。そこで

命題 18. Beltrami の微分 $\mu(z,t)$ の台は p, q を含む領域 V と交わらないとする。そのとき

$$S_{j,p,n}(\mu)_t = \iint_{R^\mu} (\Phi_i^{\chi^\mu})_{\bar{z}} (\Phi_{p,n}^{\chi^\mu})_{\bar{z}} \mu_t \, dz \, d\bar{z}$$

$$R_{j,p,q}(\mu)_t = \iint_{R^\mu} (\Phi_i^{\chi^\mu})_{\bar{z}} (\Phi_{p,q}^{\chi^\mu})_{\bar{z}} \mu_t \, dz \, d\bar{z}$$

命題 11 によつて

$$S_{j,p,n}(\mu(z,t)) = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{d\xi^n} \Phi_j^{\chi^\mu}(\xi, t) \Big|_{\xi=0}$$

$$R_{j,p,q}(\mu(z,t)) = 2\pi i \int_q^p \varphi_{j,\chi^\mu(z,t)}$$

であるから μ の台には含まれない点における $\Phi_j^{\chi^{\mu(z,t)}}$ の Taylor 展開の係数は t に関して解析的であることが導かれる。

参 照 文 献

- [1] Ahlfors, L.V. : The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces, Analytic Function, Princeton 1960, p.45-66 .
- [2] _____ : Lecture on Quasiconformal mappings, Van Nostrand, Princeton 1966 .
- [3] Ahlfors, L.V. & Sario L. : Riemann surfaces, Princeton 1960 .
- [4] Bers, L. : Riemann Surfaces. New York Uni. 1957-1958 .
- [5] Earle, C.J. : Teichmüller Theory, Discrete Groups and Automorphic Functions, Academic Press, 1977, p.143-162 .
- [6] Rauch, H.E. : Weierstrass Points, Branch Points, and Moduli of Riemann Surfaces, Commu. of pure and app. Math., 1959, p.543-560 .
- [7] Kusunoki, Y. : Riemann surfaces and conformal mappings, Asakura, 1973 .
- [8] _____ : Variation of period matrices for quasiconformal deformations, Seminar Reports, Res. Inst. Math Sci. (to appear) .