

Ideal of saturation の問題について

神大 教養 角田 譲

κ は regular uncountable cardinal かつ I は κ の
 κ -complete non-principal ideal かつ、かつ
 I は次の条件を満足する $\mathcal{P}(\kappa)$ の proper subset かつ。

- (i) $\forall \xi < \kappa$ に對し $\{\xi\} \in I$,
- (ii) $A \subseteq \kappa, A \subseteq B \in I \rightarrow A \in I$,
- (iii) $A \in I, B \in I \rightarrow A \cup B \in I$,
- (iv) $\langle A_\xi : \xi < \zeta \rangle, \zeta < \kappa, A_\xi \in I (\forall \xi < \zeta)$
 $\rightarrow \bigcup_{\xi < \zeta} A_\xi \in I$.

Example 1. κ の subset A が κ に對し unbounded
 2-あるとは、 $\forall \xi < \kappa$ に對し $\xi < \zeta$ なる $\zeta \in A$ が存在
 する事 2-ある。 $A \subseteq \kappa$ が unbounded 2-ある時、 A は、 κ
 に對し bounded 2-あるとしない。 κ の bounded subsets
 の全体は、 κ の κ -complete non-principal ideal

である。実際これは、 $\frac{\kappa}{\aleph_1}$ の κ の κ -complete non-principal ideal である。

Example 2. κ の subset K を κ に $\aleph_1$ 2 closed 2-ideal である。任意の limit ordinal $\alpha < \kappa$ に対して、 $\alpha \cap K$ を、 α に $\aleph_1$ 2 unbounded 2-ideal である。任意の $\alpha \in K$ である $\aleph_1$ 2-ideal。 κ の subset S を stationary 2-ideal である。任意の κ の closed unbounded set K に対して、 $K \cap S \neq \emptyset$ である $\aleph_1$ 2-ideal。 κ の non-stationary set の全体は、 κ の $\aleph_1$ の κ -complete non-principal ideal である。

Example 3. κ を ineffable cardinal 2-ideal である。次の条件を満足する $\aleph_1$ 2-ideal である。(Jensen)

$A_\alpha \subseteq \alpha$ を満足する任意の sequence $\langle A_\alpha; \alpha < \kappa \rangle$ に対して、 $\{\alpha < \kappa; \alpha \cap K = A_\alpha\}$ を stationary set である κ の subset K を存在する。

κ を ineffable cardinal である。 κ の subset B を ineffable 2-ideal である。任意の sequence $\langle A_\alpha; \alpha \in B \rangle$ に対して、 $\{\alpha \in B; \alpha \cap A = A_\alpha\}$ を stationary である κ の subset A を存在する $\aleph_1$ 2-ideal。 κ の non-ineffable subsets の全体は、 κ -complete non-principal ideal である。

$I \subseteq \kappa$ の $\aleph_1$ の κ -complete non-principal ideal である。

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(K)$ を, I -disjoint 2-族 とは, $(\exists \mathcal{I})$ である,
 $A, B \in \mathcal{F}$ に対して, $A \cap B \in I$ か, 成立しないことを示す.

δ を, cardinal とする. I を, δ -saturated 2-族 と
 は, 任意の I -disjoint family $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(K) - I$ に対して
 常に, $|I| < \delta$ であることを示す.

I を, 2-saturated の時, I は prime κ -complete non-
 principal ideal とする.

Ideal + saturation の問題は, $\kappa < \aleph_1$ は, Tarski [] 等によ
 り研究されたが, post-Cohen により, Solovay,
 Kunen, Paris, Baumgartner 等により, 2種の, 結果が
 得られた. 最近, Prikry, Tschichowski により, singular
 cardinal problem と関連した結果が, 得られた.

(しかし, 今, 問題は, 依然として, 未解決である).

"non-stationary set の全体は κ の $\aleph_1$ の κ -complete
 non-principal ideal は, κ -saturated 2-族 であるか?"

Solovay は, non-stationary set の全体は $\aleph_1$ の ideal
 が, nowhere κ -saturated, であることを示した. $(\exists \mathcal{I})$ stationary
 set の κ 個の disjoint な stationary set の分割を
 示す証明 (Solovay []).

Solovay の上の結果は, 次の 2つの lemma から, 示される.

役割を果す (2.11.3).

Lemma 1. $S \subseteq \kappa$, I の stationary set である時,

$S = \{\alpha < \kappa : \alpha \text{ は } S\text{-stationary}\}$ は stationary set である.

Lemma 2. I は normal κ -saturated ideal (on κ) である時, $S \subseteq \kappa$ stationary set である時, $\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ は } S\text{-stationary}\}$ は I -measure one である.

2.2. Lemma 1, Lemma 2 2.9 (1) の定義 1.2 を用いて.

$S \subseteq \kappa$, ordinals α の class である時, ordinal α は S -stationary である (2.2.1) である. (i), $\text{cf}(\alpha) > \omega$, (ii), α は S の α に関する stationary set. α は S である.

κ の I は κ -complete non-principal ideal である. normal である (2.2.1) である. $I \subseteq \kappa$, $A \subseteq \kappa$, $A \notin I$, $f: A \rightarrow \kappa$, $f(\alpha) < \alpha$, $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$ に対して, $\bigcap_{\alpha \in A} f(\alpha) \notin I$ である. $\kappa < \kappa$ である. I は κ である.

Namba [] によって, Solovay の結果を用いて, 先に掲げた問題について, 次の部分の解答を得る.

Theorem. κ は κ -saturated normal ideal である時, κ の I は non-stationary set である. I は κ である.

は K^+ -saturated である。

先に掲げた問題の答えは、approach 17. ideal 全体 $\mathcal{P}$ に対して代数的構造に着目することである。①を以後、 K 上、non-stationary set 全体 $\mathcal{P}$ 、 $\mathcal{P}$ は normal ideal、 $1 \in$ improper ideal、i.e., $1 = P(K) \in \mathcal{P}$ 、①を $\mathcal{P}$ 上の ideal 全体 $\mathcal{P}$ 、集合 $\mathcal{P}$ 上の $\mathcal{P}$ -ideal。 $I, J \in \mathcal{P}$ に対して、 $I \leq J$ は、 $I \subseteq J$ を意味する。よって、 $\langle \mathcal{P}; \leq \rangle$ は、順序集合である。実際、pseudo-Boolean algebra である。 $\mathcal{P}$ 上に次のように $I \wedge J, I \vee J$ を次のように定義する。 $I \wedge J = I \cap J$, $I \vee J = \{A \cup B; A \in I, B \in J\}$.

$$I \wedge J = I \cap J$$

$$I \vee J = \{A \cup B; A \in I, B \in J\}$$

pseudo-complement に対しては、 $I \Rightarrow J \in \mathcal{P}$ 、次のように定義する。

$$I \Rightarrow J = \{A \in K; I \leq J \cup A\}$$

$$\text{例. } J \cup A = \{B \in K; A \cap B \in J\} \text{ である。}$$

これに、 $-I$ は、 $I \Rightarrow 0$ を定義する。 I の、 $\mathcal{P}$ の dense element, である。 $-I = 0$ になる必要十分条件は、 $I \leq 0 \cup A$ なる stationary set A の存在である。

よって、 $\mathcal{P}_{K^+}$ は、 K 上の normal ideals 全体である。

例. $1 \in \mathcal{P}$ は、improper ideal $1 \in \mathcal{P}$ である。

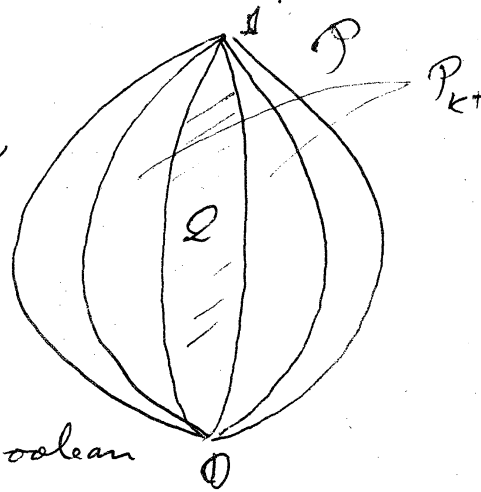
4.11. P_{k+} is a subalgebra of $\mathcal{P}$.

次に, $\mathcal{O} \cap A$ は $\mathcal{P}$ の ideal かつ $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{O} \cap A$ かつ, $\mathcal{P}$ は $\mathcal{Q}$ の subalgebra である. 従って, $\mathcal{Q}$ は $[\mathcal{A}]$ 上の $\mathcal{O} \cap (-A)$ を含む $\mathcal{P}$ の quotient algebra $\mathcal{P}(\mathcal{O})/\mathcal{O}$ の ideal である. 故に $[\mathcal{A}]$ は, $A \subseteq \kappa$ の equivalence class modulo $\mathcal{O}$ を含む.

4.12. $\mathcal{P}$ は infinite join, meet を持つ.

$(I_\lambda : \lambda \in \Lambda) \subseteq \mathcal{I}_\lambda \in \mathcal{P}$ かつ,

1) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \in \mathcal{P}$ である.



4.13. $\mathcal{P}$ is complete pseudo-Boolean algebra of κ . 4.14. infinite join $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, infinite meet $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ は $\mathcal{P}$ の元である. 1) 4.15. $\mathcal{P}_{k+}$ は

complete pseudo-Boolean algebra である. 4.16.

infinite join $\bigvee_{\lambda \in \Lambda}^{k+} I_\lambda$ は $\mathcal{P}$ の元である. (infinite meet $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda}^{k+} I_\lambda$ は $\mathcal{P}$ の元である). 故に, $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \leq \bigvee_{\lambda \in \Lambda}^{k+} I_\lambda$ である.

4.17. $\mathcal{P}$ の regular element $a \in \mathcal{P}$ は, $\mathcal{R}$ である. ($\mathcal{P}$ の regular element である. $-- I = I$ である.)

$I \Rightarrow J$ に対し $J \in \mathcal{P}_{K+}$ 2- $\mathcal{A}$ である。 $I \Rightarrow J \in \mathcal{P}_{K+}$ と
 なる I, J . $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}_{K+}$ 2- $\mathcal{A}$ である。 $\mathcal{Q}$ は
 Boolean 2- $\mathcal{A}$ の $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ 2- $\mathcal{A}$ $\mathcal{R}$ 一般に $\mathcal{P}$ の
 subalgebra である。 $\mathcal{R}$ は $\cap$ operation による 2
 Boolean algebra である。

$$I \vee^* J = \neg \neg (I \vee J)$$

$$I \wedge^* J = I \wedge J$$

$$\neg I = \neg \neg I$$

$\mathcal{R}$ は 2. complete Boolean algebra である。 実際 $\mathcal{R}$ は
 2. minimal completion である。 $\mathcal{R}$ は infinite join,
 meet による。

$$\bigvee_{t \in T}^* I_t = \neg \neg \bigvee_{t \in T} I_t.$$

$$\bigwedge_{t \in T}^* I_t = \bigwedge_{t \in T} I_t$$

2- $\mathcal{A}$ である。

$\langle I_t : t \in T \rangle \in \mathcal{P}_{K+}$, $t \in T$ なる I_t である。

Lemma 3. $A \in \bigvee_{t \in T}^{K+} I_t$ になるための必要十分条件は,
 2. 条件を満足する $T_0 \subseteq T$ と $(A_t)_{t \in T_0}$ が存在すること
 である。

$$i) |T_0| \leq \kappa$$

$$ii) (\forall t \in T_0) (A_t \in I_t)$$

$$ii) (\forall t \in T - T_0) (A_t = \emptyset)$$

$$iv) \bigcap A = \bigvee_{t \in T}^* (\bigcap A_t)$$

$$(12) \quad \bigcap A = \bigcap (-A) \quad 2-\text{ex}$$

Theorem. (2) (a) - (d) is, (1) (1) 2-ex

(a) $\mathcal{Q}$ is κ^+ -saturated 2-ex

$$(b) \quad \mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\kappa^+}$$

(c) $\mathcal{P}_{\kappa^+}$ is dense element is, 1 is 2-ex, $\mathcal{P}_{\kappa^+}$ is κ^+ -saturated 2-ex, $I \in \mathcal{P}_{\kappa^+}$ is normal ideal (proper) $\times$ 1 2-ex, $I \leq \bigcap A$ is stationary set A is 2-ex.

(d) $\mathcal{P}_{\kappa^+}$ is Boolean algebra $\times$ 2-ex.

(Proof). (a) $\Leftrightarrow$ (b) is obvious. $\mathcal{Q}$ is κ^+ -saturated $\times$ 2-ex. $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\kappa^+}$ is, $I \in \mathcal{P}_{\kappa^+}$ is, $I \leq \bigcap A$ is stationary set A is 2-ex. $I \neq \bigcap A$ is 2-ex. $\mathcal{F}$ is maximal family $\times$ 2-ex.

$$i) A \notin \mathcal{Q}, A \in I, (\forall A \in \mathcal{F})$$

$$ii) \mathcal{F} \text{ is } \mathcal{Q}\text{-disjoint}$$

$\mathcal{F}$ is 2-ex. Zorn's lemma is 2-ex.

$\mathcal{Q}$ is κ^+ -saturated 2-ex is 2-ex. $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ is 2-ex. $(A_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ is $\mathcal{F}$ enumeration $\times$ 2-ex. $I = \{\alpha < \kappa; (\forall \beta < \alpha) (\alpha \notin A_\beta)\}$ is 2-ex, I is normal 2-ex is 2-ex, A is I -measure one

を持つ。しかし、仮定により、 $I \neq \mathbb{Q}1A$ である。ゆえに、

$I \supsetneq \mathbb{Q}1A$ であるから、 $B \in I$, $B \notin \mathbb{Q}1A$ なる B が存在する。

ゆえに、 $B \cap A \in I$, $B \cap A \notin \mathbb{Q}$ である。 $\mathcal{F}$ の maximality に

より、 $B \cap A \cap A_\beta \notin \mathbb{Q}$ なる $\beta < \kappa$ が存在する。

$A \cap A_\beta \subseteq \{\alpha < \kappa; \alpha \leq \beta\}$ であるから、 $A \cap A_\beta$ は $\mathbb{Q}$ -measure zero である。ゆえに、 $B \cap A \cap A_\beta \notin \mathbb{Q}$ になる。

逆に、 $\mathbb{Q}$ の κ^+ -saturated であること仮定する。この時、

$A_\beta \cap A_\gamma \in \mathbb{Q}$, $\beta < \gamma < \kappa^+$ なる $\{A_\beta; \beta < \kappa^+\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa) - \mathbb{Q}$ が存在する。 $J = \bigvee_{\beta < \kappa^+}^{\kappa^+} (\mathbb{Q}1A_\beta)$ とおく。しかし、

$\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\kappa^+}$ であるから、 $J = \mathbb{Q}1A$ なる $A \subseteq \kappa$ が存在する。

Lemma 3. により、 $T \subseteq \kappa^+$ と、 $(B_\beta)_{\beta < \kappa^+}$ が存在する

$$i) |T| \leq \kappa,$$

$$ii) B_\beta \in \mathbb{Q}1A_\beta, \quad \forall \beta < \kappa^+.$$

$$iii) D_\beta = \emptyset, \quad \forall \beta \in \kappa^+ - T$$

$$iv) \mathbb{Q}1A = \bigvee_{\beta < \kappa^+}^* (\mathbb{Q}1B_\beta).$$

$|T| \leq \kappa$ であるから、 $\beta \in \kappa^+ - T$ なる β が存在する。 $\mathbb{Q}1A_\beta$

$\leq J = \mathbb{Q}1A$ であるから、 $\mathbb{Q}1A_\beta = \bigvee_{\beta < \kappa^+}^* (\mathbb{Q}1B_\beta) \wedge (\mathbb{Q}1A_\beta)$

$\beta \in \kappa^+ - T$ に対しては、 $\mathbb{Q}1B_\beta = \emptyset$ 、ゆえに、 $(\mathbb{Q}1B_\beta) \wedge$

$(\mathbb{Q}1A_\beta) = \emptyset$ 。 $\beta \in T$ に対しては、 $\beta \neq \gamma$ であるから、

$(\mathbb{Q}1B_\beta) \wedge (\mathbb{Q}1A_\beta) \leq (\mathbb{Q}1A_\beta) \wedge (\mathbb{Q}1A_\beta) = \emptyset$ 。ゆえに、

$(\mathbb{Q}1B_\beta) \wedge (\mathbb{Q}1A_\beta) = \emptyset, \quad \forall \beta < \kappa^+$ である。

"Non-stationary sets on κ , a normal ideal $\mathcal{I}$, κ^+ -saturated $\mathcal{I}$ is a regular uncountable cardinal κ の存在する. $\mathcal{I}^+$ の存在 $\mathcal{I}$ であるか?"

上問題に答 (2), 又, 事は知られてゐる.

定理 (Kunen) successor cardinal κ 上 $\mathcal{I}$ に, κ^+ -saturated non-trivial ideal $\mathcal{I}$ の存在 $\mathcal{I}$ は: $\mathcal{I}^+$ の存在 $\mathcal{I}$ である.

上の定理に於て, 問題は: limit cardinal の時に於て $\mathcal{I}$ の存在 $\mathcal{I}$ であるか. 又, large cardinal $\mathcal{I}$ は: limit cardinal の時に問題である.