

自由討論

LIBRARY PROGRAM のテストについて — 数理解析研究所での実験報告と討論 —

1. 平方根 (占部 実)

$x = \text{SQRT}(a)$ により, $\sqrt{a}$ の近似値がえられたとする. x^2 と a とを比較し, 差を d とする.

$$x^2 - a = d, \quad a = x^2 - d = x^2 \left(1 - \frac{d}{a+d} \right)$$

$$\frac{d}{a+d} = e \quad \text{とおく.} \quad e < 1 \quad \text{のはずである.}$$

$$\sqrt{a} = x(1-e)^{1/2} = x \left(1 - \frac{1}{2}e - \dots \right)$$

である. 相対誤差 r とすると

$$\begin{aligned} r &= \frac{x - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{x}{\sqrt{a}} - 1 = (1-e)^{-1/2} - 1 \\ &= \frac{1}{2}e + \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{16}e^3 + \dots \end{aligned}$$

である. $\sqrt{a} = \frac{x}{1+r}$ であり, 絶対誤差は

$$e = x - \sqrt{a} = \frac{xr}{1+r} \quad \text{となる.}$$

これで見えるように、誤差 d が小さくても、 d/a (きり) が小さくなければ、 $\sqrt{a}$ が正しく求められていないといえる。

数理解析研究所の TOSBAC-3400 について、次の検査をした。

	single	double
$2^{-28} (2^{-28}) 2^{-18}$	時間 3 分 51 秒	21 分 6 秒
$2^{-18} (2^{-18}) 2^{-10}$	Max ϵ 2×10^{-11}	4×10^{-22}
$2^{-10} (2^{-10}) 1.0$	Max ϵ 1.2×10^{-11}	2.1×10^{-22}
$1.0 (2^{-6}) 2^7$	(x $\div$ (1/2) ϵ に注意)	
$2^7 (2^{-2}) 2^{14}$		

なお Newton 近似

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

で計算した場合、 x_n が $\sqrt{a}$ に近づくと、丸めの誤差などで振動をおこすことがある、 x_{n+1} が x_n よりも $\sqrt{a}$ の真値に近いとは、必ずしも断言できない。

2. 指数関数 (三井斌友)

EXP, DEXP について、つぎのよう検査をした。

$$\text{ALOG}(\text{EXP}(X) - X), \quad \text{DLOG}(\text{DEXP}(X) - X)$$

のテスト。single について、0.0(0.01)1.0 では最大誤差

0.65×10^{-10} , $0.0(1.0) 100.0$ では 0.93×10^{-9} (最大誤差は α の大きい方で生じている)

このテストはもちろん $\text{ALOG}(\text{DL}\bar{\text{O}}\text{G})$ のほうのテストができていなければ意味はうすい。DEXP の方は、誤差が大きく $0.0(0.01)1.0$ で最大誤差 0.10×10^{-19} を生じている。これは多項式近似 (Taylor 展開?) によっているらしい。EXP のほうは有理函数近似によっている。倍長数による除法の困難をさけたらしい。

$e^a = x_0$ とし、近似値 ε $x = \text{EXP}(a)$, $x = x_0 + \varepsilon$ とし

$$\delta = \log x - a \text{ とおくと, } \delta = \log \frac{x_0 + \varepsilon}{x_0} \doteq \frac{\varepsilon}{x_0}.$$

である。

その他 $e^x \cdot e^{-x} = 1$, $e^{2x} \cdot e^{-x} = e^x$ のテストもしてみた。—— しかもし負の x については, $e^x = 1/e^{|x|}$ としているが、このテストは意味がうすい。

討論: 刻み幅を 0.01 , 0.1 ととるのは 2 進法の計算機では、まずいのではないか。

e^x はたぶん 2^{cx} ($c = \log_2 e$) として指数部を別に求め、仮数部を近似式で計算している。したがって指数部のかかりめ——近似式のつかいめ——あたりの検査が入念に必要であろう。

Overflow, Underflow はどうか？ — TOSBAC-3400 は指数部が広いので、 ± 150 くらいまでできる。

3. 三角関数 (森 正武)

現在まだ十分でないが、 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ のテストはしてみた。しかしこれだけでは、 $\sin x$, $\cos x$ の一方が 0 に近い所はテストにひっかかず、不完全である。

$|x|$ が大きいとき、正確な値がだせないのはやむをえない。

4. 全般的な討論と意見 (要点のみ)

- ・差分をとるテストは有用と思われる。
- ・ルーキンテスト用の原表 (特定の値の点での詳しい値の表) を整備する必要がある。
- ・Double のプログラムには、いろいろ問題が多い。
- ・ $\sin$, $\cos$ の $\pi/2$ の整数倍近くの値については、アメリカでもこの頃問題にされてきている。けっして日本のメーカーが怠慢だったわけではない。
- ・個人用のミニ・コンピュータの活用が有用なのではないか。

(一松 信 記)

自由討論の資料として追加

ライブラリ・ルーチンのテストに関するメモ

話の材料として羅列したもの:

- $y = \sqrt{x}$ について, $y^2 - x$ をしらただけでよいか?
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ のテストの意味
- なぜ $\log(1+x)$ あるいは $\frac{\log(1+x)}{x}$ を標準函数にしないのか? ———— じつせい
 $x \neq 0.0$ のとき, $\text{ALOG}(1.0+x)$ は 0.0 にされる.
- SIN , COS は周期を 1 とした形 ($\sin(2\pi x)$, $\cos(2\pi x)$) を標準にすべきではないか?
- 検査をしない低精度の高速サブルーチンの提唱.
- 倍長計算サブルーチンとそのテストについて.
- ライブラリはどこまでユーザに対して不親切であるべきか?
- 計算センターとメーカーとの関係.
- マニュアルの up-to-dating.