

回転球面上における減衰性 2 次元乱流の非線形発展

九大・総理工 崎 恵典 (Yoshinori SAKI)

杉原裕司 (Yuji SUGIHARA)

本地弘之 (Hiroyuki HONJI)

1. はじめに

減衰性の平面 2 次元乱流の時間発展は、コヒーレントな渦の出現とそれらの融合および相互移流によって特徴づけられる。コヒーレント渦が乱流場を支配するステージにおいては、系の運動エネルギーは保存し、渦に関係するその他の物理量（エンストロフィー、渦の個数、渦の平均半径等）が代数的に時間発展する。Carnevale ら¹⁾はエネルギー E と渦の中心渦度の平均値 ω_a を不変量として、これらの物理量のスケーリング則を導いた。その後岩山と岡本²⁾は Carnevale らのスケーリング則を再考察し、Carnevale らが不変量として用いた E という量は系の全エネルギーではなく、エネルギー密度の別の表式 $-\omega\psi/2$ をコヒーレント渦の領域で積分したものであり、それがコヒーレント渦と等価な渦糸系のハミルトニアンであることを指摘した。そして、スケーリングにハミルトニアンの不変性を用いたことが Carnevale らの理論の成功の理由であると結論づけた。

本研究の目的は、平面 2 次元乱流で得られたこれらの知見を球面上の減衰性 2 次元乱流へ応用し、回転の効果が生ずる系にどのような影響を及ぼすかについて調べることである。回転球面 2 次元系では場の回転の効果がエネルギーの逆カスケードを抑制することが知られている³⁾が、本研究では特に渦領域で積分された諸量に注目することによって逆カスケードの抑制が効く特徴的な波数スケールのロスビー数依存性について検討する。

2. コヒーレント渦系における Carnevale らのスケーリング則

減衰性の平面 2 次元乱流において、コヒーレント渦が系を支配するステージを考える。Carnevale らはこれらの渦を特徴づける物理量を用いて次元解析を行い、それらの時間発展のスケーリング則を導いている。彼らの理論によれば、系の全運動エネルギーは次式のように与えられる^{1),2)}。

$$E \sim N \omega_a^2 R_a^4 \quad (1)$$

ここで、 N は渦の個数、 ω_a は渦の中心渦度の平均値、 R_a は渦の平均半径である。 E と ω_a が保存量であることを考慮すると、渦の個数が

$$N(t) \sim N(t_0)(t/t_0)^{-\xi}$$

に従って振る舞う場合、渦の平均半径 R_a の時間発展として

$$R_a(t) \sim R_a(t_0)(t/t_0)^{\xi/4}$$

が導かれる。全エントロピーに関しても、同様に

$$Z \sim N\omega_a^2 R_a^2,$$

$$Z(t) \sim Z(t_0)(t/t_0)^{-\xi/2}$$

が導かれる。スケーリング指数 ξ は多くの研究から $\xi = 0.7 \sim 0.75$ であることが知られている。岩山と岡本は、(1) 式は系の全エネルギーではなくエネルギーの別の表式 $-\omega\psi/2$ を渦領域において積分した量

$$H \equiv - \int \int_{D_v} \frac{\omega\psi}{2} dx dy \quad (2)$$

であるとし、 H がコヒーレント渦と等価な渦糸系のハミルトニアンに相当すると指摘した。

3. 数値モデルと解析方法

経度 λ 、緯度 ϕ 、 $\mu = \sin \phi$ の球面座標系 (λ, μ) において、渦度 $\omega(\lambda, \mu)$ は次のようなバロトロピック渦度方程式に支配される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \frac{1}{a^2} J[\psi, \omega] + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = (-1)^{p+1} \nu'_{2p} \left\{ \Delta^p + \left(\frac{-2}{a^2} \right)^p \right\} \omega \quad (3)$$

ここで、 $\psi(\lambda, \mu)$ は流れ関数、 a は惑星半径、 Ω は惑星自転の角速度である。また右辺は超粘性による散逸を表現しており、 ν'_{2p} は超粘性係数、 p は超粘性指数を示す。レイリー型の項は、角運動量の保存を考慮する際に必要となる項である。また、 $\Delta (\sim \nabla^2)$ は球面上のラプラシアン、 $J(A, B)$ は球面上のヤコビアンである。数値実験では、惑星半径 a と代表速度スケール U を用いて基礎方程式を規格化し、超粘性指数として $p = 2$ を用いた。以下、諸量は全て無次元量を示す。球面調和関数展開に基づいたスペクトル法³⁾により数値積分を行った。切断波数 85 の三角切断を採用し、経度方向に 256 個、緯度方向に 128 個の

格子点を用いた。超粘性係数 ν_4 を選定するために予備的に計算を行った。20無次元時間後に切断波数85付近でエネルギーが大きく蓄積しないような最大の ν_4 を調べた結果、Yoden and Yamada³⁾が用いた $\nu_4 = 1.0 \times 10^{-6}$ が妥当であったので本実験でもその値を用いた。

本研究では回転系の乱流場において初期に存在するコヒーレントな渦に着目し、それらの渦内で積分された統計量の振る舞いを調べることから、乱流場の中から精度良く渦領域を特定することが非常に重要な問題である。Weiss⁴⁾は2次元の運動方程式から渦度勾配 $\nabla\omega$ を支配する方程式を導き、ある仮定のもとで $\nabla\omega$ の挙動はストレステンソル A の行列式の正負によって双曲型と楕円型とに分けられることを示した。平面2次元場の $\nabla\omega$ は以下の方程式によって支配される^{4),5)}。

$$\frac{d\nabla\omega}{dt} = -A \cdot \nabla\omega, \quad (4)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

A の固有値 λ は、

$$\det(A - \lambda I) = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \lambda^2 = 0,$$

$$\lambda = \pm \left\{ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\}^{1/2} = \pm (-\det A)^{1/2}$$

のように表される。いま、流体粒子の運動に沿うストレステンソル A の時間変化は、渦度勾配 $\nabla\omega$ の時間変化に対して無視し得るほど小さいと仮定する。この仮定の下で、(4)式は次のような解を持つ。

$$\nabla\omega \sim C \exp\{\pm(-\det A)^{1/2} t\}$$

従って流体粒子の運動に沿う $\nabla\omega$ の挙動は、1) $\det A > 0$ の場合に振動し、2) $\det A < 0$ の時に指数関数的に変動する。またこのことは、 $-\det A$ が流線関数 ψ のGaussian曲率と等しく、Gaussian曲率が負であるような領域では粒子の軌道が安定であることからわかる。回転球面上に先述のWeissの方法を適用する。Weissの方法では、非回転系の場合には渦度保存則から渦度シアーについての式を導き、その式に現れるストレステンソルの行列式の正負で安定領域を判定した。回転系の場合にも絶対渦度の保存則から絶対渦度シアーについての式を導けば同じストレステンソルが現れ、非回転系の場合と同様その行列式の正

負で安定な渦領域を判定することが可能である。絶対渦度 ω_A の勾配ベクトル $\nabla\omega_A$ は次の方程式に支配される。

$$\frac{d\nabla\omega_A}{dt} = -A \cdot \nabla\omega_A, \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\mu} - \frac{\tan\phi}{\cos\phi} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} & \frac{1}{\cos^2\phi} \frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} - \sin\phi \frac{\partial\psi}{\partial\mu} \\ -\cos^2\phi \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} + \sin\phi \frac{\partial\psi}{\partial\mu} & \frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\mu} + \frac{\tan\phi}{\cos\phi} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \end{bmatrix}$$

平面2次元場での議論と同様の仮定のもとで、渦領域と乱流領域を峻別するパラメータとして $\det A$ を用いる：

$$\det A = -\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\mu} + \frac{\tan\phi}{\cos\phi} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2 - \left(\cos^2\phi \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} - \sin\phi \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right) \times \left(-\frac{1}{\cos^2\phi} \frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} + \sin\phi \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)$$

本研究では Weiss の方法に基づいて、 $\det A > 0$ の領域をコヒーレント渦領域と定義する。

単位面積当たりの全運動エネルギー E および全エントロピー Z は次式で表される。

$$E(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |\nabla\psi|^2 d\lambda d\mu, \quad (6)$$

$$Z(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |\Delta\psi|^2 d\lambda d\mu. \quad (7)$$

コヒーレント渦領域内で積分された統計量については、上式の積分領域に $\det A > 0$ の制約条件を加えた式により定義する。

初期条件として与えるエネルギースペクトル、総積分時間、ロスビー数 $R(\equiv U/(2a\Omega))$ を変化させて、表1に示す条件の実験を行った。初期流線関数の展開係数が表中のエネルギースペクトルを満たしながら、ランダムな大きさと位相を持つように設定した。回転球面上では緯度によって回転の効果が異なるため物理量の時間発展は初期条件に大きく依存すると考えられるので、3つの独立な初期流線関数波形を用い、得られた物理量のアンサンブル平均をとって議論することにした。パラメータを変更してもそれら3つの初期波形については同一のものをを用いた。

4. 数値実験結果および考察

非回転系においては、球面2次元系に対しても Carnevale らのスケーリング理論がそのまま適用できることが期待される。彼らの理論によれば、渦の個数が

$$N(t) \sim N(t_0)(t/t_0)^{-\xi}$$

に従って減少していくとき、渦領域の平均面積 $A_a(t)$ および渦領域内エンストロフィー Z_a は次式のように振る舞う。

$$A_a(t) \sim A_a(t_0)(t/t_0)^{\xi/2}$$

$$Z_a(t) \sim Z_a(t_0)(t/t_0)^{-\xi/2}$$

上式より、渦領域の総面積 $A(\sim NA_a)$ と領域内エンストロフィー Z_a の時間変化率を規定すべき指数は等しく、すなわち A と Z_a の比は不変でなければならない。図 1 に、L40INF の実験結果に Weiss の方法を適用した場合の Z_a と A の比の時間発展を示す。渦の融合が活発である $t = 5 \sim 20$ にかけてその比が不変に保たれていることがわかる。このことにより、非回転の球面上での 2 次元乱流は Carnevale らのスケーリング則に従って振る舞うことがわかる。

図 2 に、回転系の実験 (L20R.1) において Weiss の方法により渦領域積分した物理量の時間発展を示す。 E_a は渦領域内運動エネルギー、 Z_a は渦領域内エンストロフィーであり、諸量は単位面積当たりのものであることに注意する。非回転の場合との大きな違いは E_a の減少の割合が小さくなっていることである。渦同士が融合する際、渦が強く引き延ばされて周辺部の運動エネルギーの大きい部分が渦領域から除外されるものと考えられるので、領域内運動エネルギーの減少の抑制は、回転の効果で渦同士の融合を制限することを示唆する。また、非回転系の場合に Carnevale らのスケーリング則の不変量として重要な役割を果たした $-\frac{\omega\psi}{2}$ は、回転系の場合でも不変量となることがわかる。しかしながら回転系の場合には、渦中心の平均渦度 ω_a が不変という前提が成り立たないため、同様のスケーリング則を導くことはできない。

渦領域についての各物理量の時間変化がロスビー数にどのように依存するかを図 3 ～ 5 に示す。渦領域面積 (図 3) および渦領域内運動エネルギー (図 4) は、ロスビー数の減少と共に変化が緩やかになることがわかる。これは、回転数が増してロスビー数が減少するとこれらの渦の活発な融合、すなわち逆カスケードが抑制されるためである。図 5 に示すように、 $-\frac{\omega\psi}{2}$ についてはロスビー数に依存せずほぼ保存量とみなせる。渦領域内だけで定義できる物理量の内、このような性質を示すのは $-\frac{\omega\psi}{2}$ だけであり、回転系での渦の挙動を考える上で重要であると思われる。

物理空間においてコヒーレント渦領域内で積分して求めた各種の物理量は、時間発展において非回転時の挙動からドラスティックに乖離する。乖離する時刻に系で卓越してい

る波数スケールはその回転系を特徴づけるスケールであると考えられる。そこで、数値実験によって得られたこのスケールと Rhines スケールとを比較検討する。回転の効果が効く臨界的な波数スケールを次式のようにエネルギーピーク波数として定義する。

$$n_c \equiv \frac{\sum_n n E(n)}{\sum_n E(n)}$$

渦領域面積 A および非回転系でのスケーリング則成立の目安であった Z_a/A の 2 つの指標を用いて、それぞれ非回転の挙動から乖離した時刻を推定してエネルギーピーク波数を算定した。前者は渦の活発な融合の指標であり、後者は回転の効果によるスケーリング則からの乖離の指標である。以下の議論では両者の平均値を使用した。

ロスビー数 R に対する乖離時のピーク波数の平均値 n_c と Rhines の波数スケール n_β との比較を図 6 に示す。Rhines スケールとはロスビー波の位相速度と流体粒子の速度とが同程度の大きさになるようなスケールと定義され、球面上では次式で表される。

$$\frac{U}{a \cos \phi} = \frac{2\Omega}{n_\beta(n_\beta + 1)}$$

$$n_\beta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4 \cos \phi}{R} + 1} - 1 \right)$$

ただし、比較には $\phi = 0^\circ$ での Rhines スケールを用いている。この図より、乱流場の時間発展が非回転の挙動から乖離し始める特徴的な全波数スケールは Rhines スケールよりも大きな値をとり、そのロスビー数依存性は概ね Rhines スケールのそれと同じであることがわかる。

5. おわりに

回転球面上の減衰性 2 次元乱流において、コヒーレント渦領域内で積分された物理量の時間発展を調べ、そのロスビー数依存性を検討した。また、回転の効果によって Carnevale らのスケーリング則が破綻する臨界的な波数スケールを調べた。その波数スケールのロスビー数依存性は、Rhines スケールのそれによって概ね説明できる。

参考文献

- 1) G.F. Carnevale, J.C. McWilliams, Y. Pomeau, J.B. Weiss and W.R. Young:

Evolution of Vortex Statistics in Two-Dimensional Turbulence, Phys.Rev.Lett.,
Vol.66, 2735 (1991).

- 2) 岩山隆寛 ・ 岡本壽夫 : 2次元減衰性乱流におけるスケーリング理論の再考察と数値シミュレーション, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ.(Inform Sci.), Vol.17, 20 (1996).
- 3) S. Yoden and M. Yamada: A Numerical Experiment on Two-Dimensional Decaying Turbulence on a Rotating Sphere, J. Atmos. Sci., Vol.50, No.4, 631 (1993).
- 4) J. Weiss: The Dynamics of Enstrophy Transfer in Two-Dimensional Hydrodynamics, Physica , D48, 273 (1991).
- 5) C. Basdevant and T. Philipovitch: On the Validity of the "Weiss Criterion" in Two-Dimensional Turbulence, Physica , D73, 17 (1994).

表1 回転球面上における数値実験のパラメータ

CASE	ロスビー数 R	エネルギースペクトル	総積分時間
L40INF	∞	$E(n) \propto n^5 e^{-n/2}$	40
L40R.25	0.25		
L20INF	∞	$E(n) \propto n^5 e^{-n/2}$	20
L20R2	2		
L20R1	1		
L20R.5	0.5		
L20R.25	0.25		
L20R.1	0.1		
L20R.025	0.025		
H20INF	∞	$E(n) \propto n^7 e^{-n/2}$	20
H20R.25	0.25		
H20R.1	0.1		

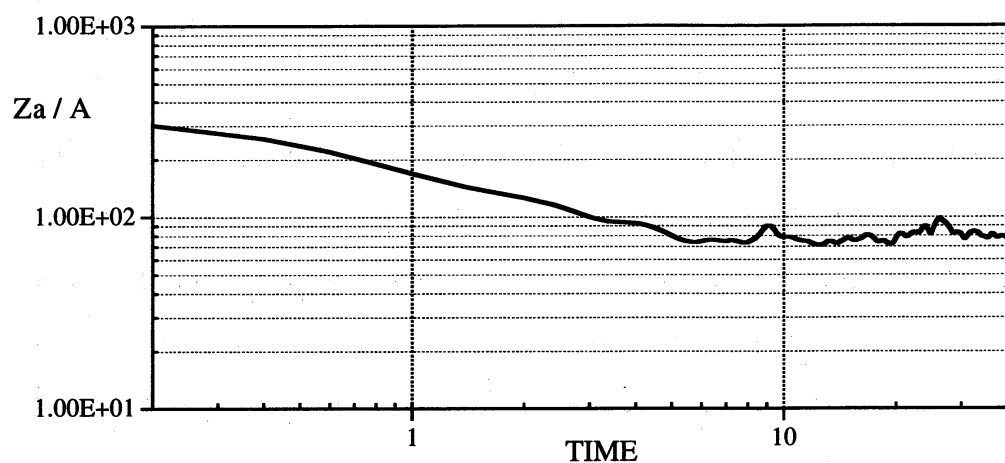


図1 渦領域の面積と領域内エンストロフィーの比 (L40INF)

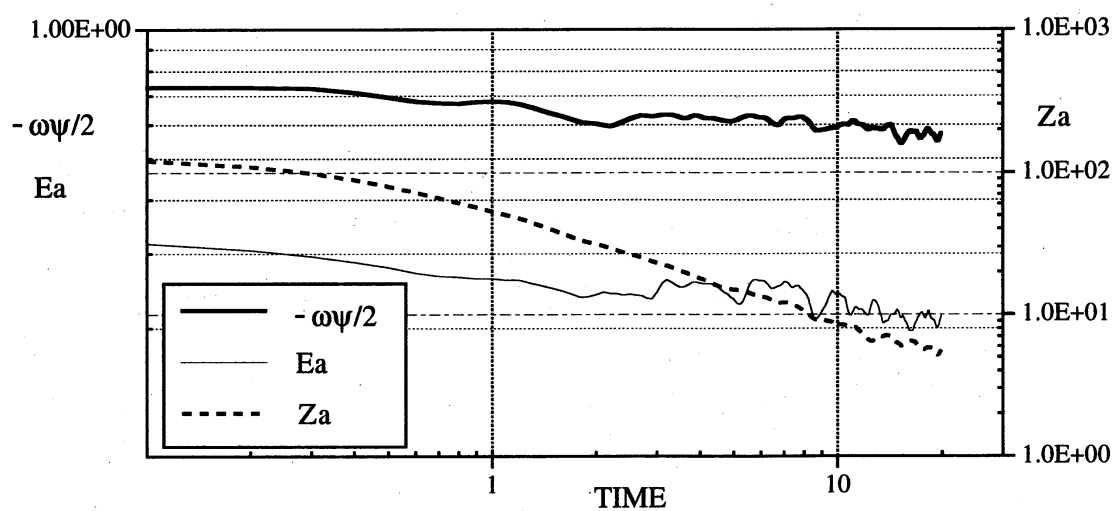


図2 回転系における渦領域内で積分された物理量の時間発展 (L20R.1)

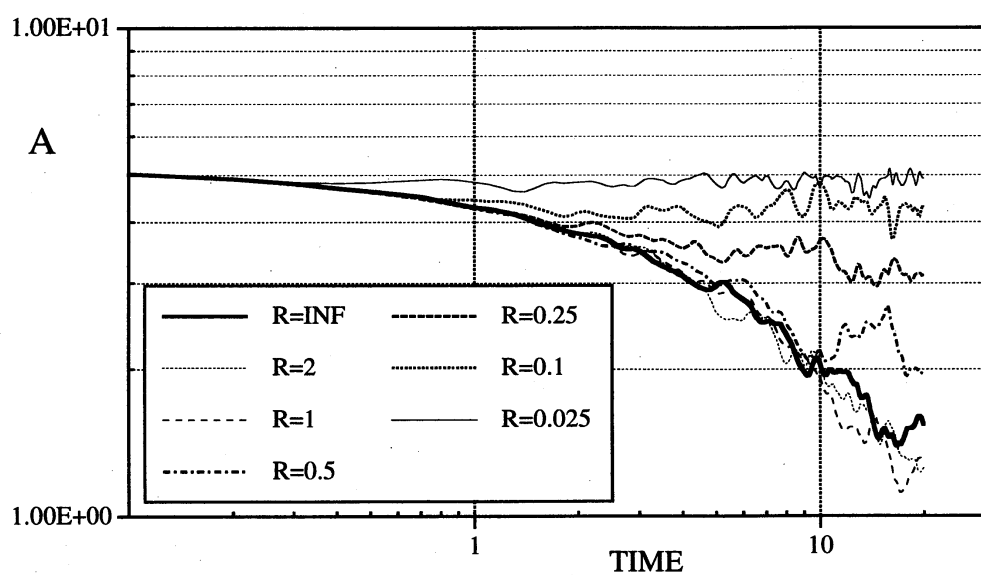


図3 渦領域面積の時間発展のロスビー数依存性

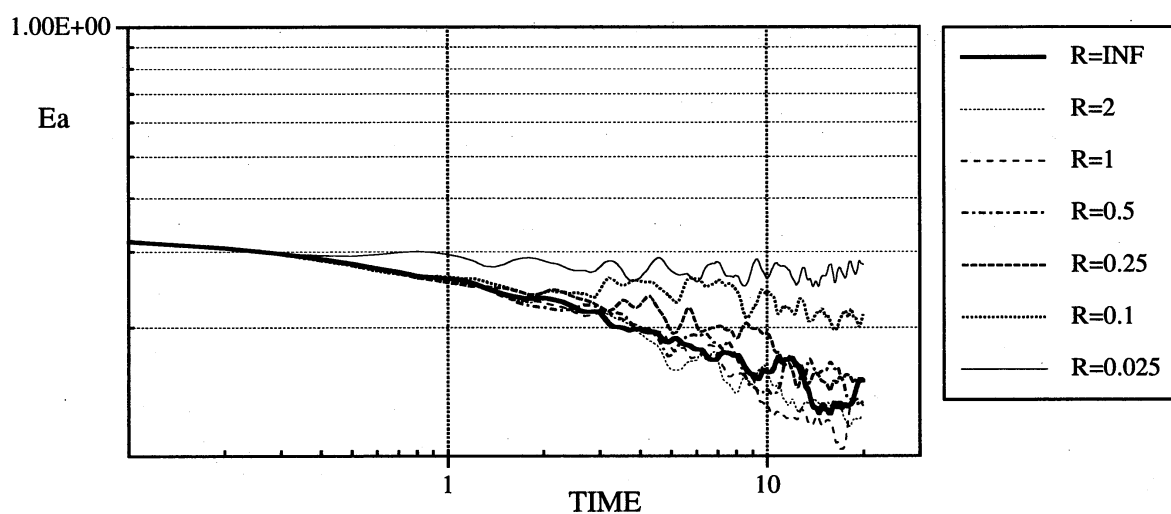


図4 渦領域内運動エネルギーの時間発展のロスビー数依存性

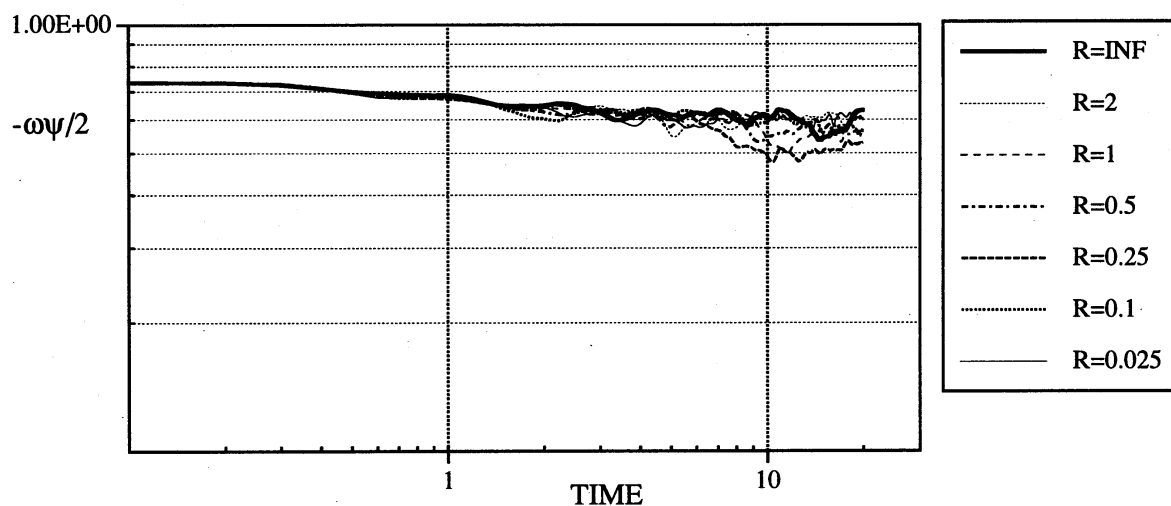


図5 渦領域で積分された $-\omega\psi/2$ の時間発展のロスビー数依存性

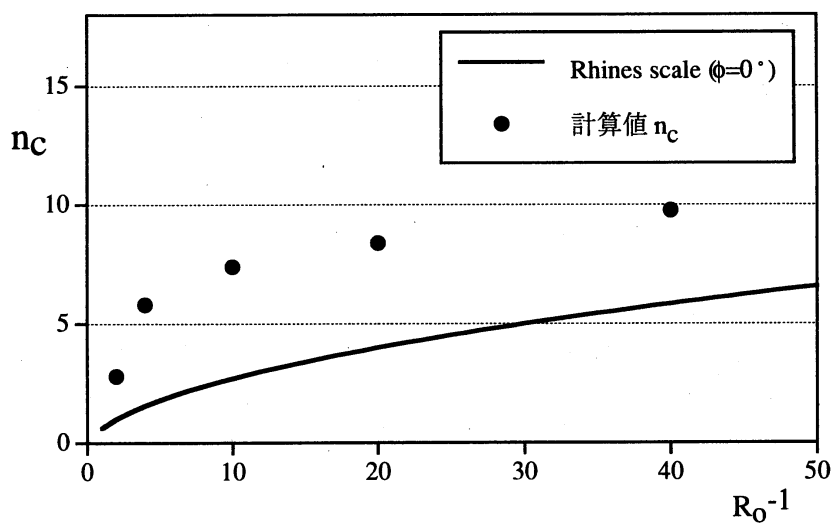


図6 乖離点での n_c とRhinesの波数スケールとの比較