

Noncausal 確率積分の L^2 -理論 (I)

富山大・理 関口 健 (Takeshi Sekiguchi)

秋田大・教育 塩田 安信 (Yasunobu Shiota)

本稿では noncausal 確率積分についてのロシア学派の研究 (L^2 -理論) の解説およびこれらの研究と小川氏による non-causal 確率積分の関連について述べる。

§1. 準備.

1. $(X, \mathcal{X}, \mu)$ を $L^2(X)$ が separable な measure space とし, W を $\mathcal{X}$ 上の Gaussian random measure で $E[\{W(dx)\}^2] = \mu(dx)$ なるものとする。即ち,
 - i) $\{W(A); A \in \mathcal{X}\}$ は ある probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の Gaussian random system,
 - ii) $\forall A \in \mathcal{X}$ に対し $E[W(A)] = 0$, $E[\{W(A)\}^2] = \mu(A)$,
 - iii) $A, B \in \mathcal{X}$ が $A \cap B = \phi$ ならば $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$.

2. normalized Hermite polynomials :

$$H_p(x) = (-1)^p \frac{1}{\sqrt{p!}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^p}{dx^p} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R}.$$

性質.

- 1) $e^{-\lambda^2 + \sqrt{2}\lambda x} = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \sqrt{\frac{2^p}{p!}} H_p(x),$
- 2) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_p(x) H_q(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} 1, & p=q \\ 0, & p \neq q \end{cases},$
- 3) $H_p(x) H_q(x) = \sqrt{p! q!} \sum_{j=0}^{p \wedge q} \left\{ \sqrt{(p+q-2j)!} / j! (p-j)! (q-j)! \right\} H_{p+q-2j}(x).$

3. multiple Wiener integrals. $\{\varphi_n\}$ を CONS in $L^2(X)$ とする.

1) (Cameron-Martin) $\left\{ \prod_{j=1}^R H_{p_j} \left(\int \varphi_{n_j}(x) W(dx) \right); (n_1, \dots, n_R), \right.$

$(p_1, \dots, p_R), \sum_{j=1}^R p_j = P, P = 0, 1, 2, \dots \left. \right\}$ は CONS in $L^2(\Omega)$.

2) $\hat{L}^2(X^P) = \left\{ \hat{f}(x_1, \dots, x_P) = \frac{1}{P!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_P} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(P)}); f \in L^2(X^P) \right\}$

と置く。このとき,

$$\left\{ \sqrt{\frac{P!}{p_1! \dots p_R!}} \varphi_{n_1}^{\otimes p_1} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \varphi_{n_R}^{\otimes p_R} (x_1, \dots, x_P); \right. \\ \left. (n_1, \dots, n_R), (p_1, \dots, p_R), \sum_{j=1}^R p_j = P, P = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

は CONS in $\hat{L}^2(X^P)$. ここで $\hat{\otimes}$ は tensor 積を表す。

3) operator を

$$\frac{1}{P!} \int \dots \int \sqrt{\frac{P!}{p_1! \dots p_R!}} \varphi_{n_1}^{\otimes p_1} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \varphi_{n_R}^{\otimes p_R} (x_1, \dots, x_P) \\ = H_{p_1} \left(\int \varphi_{n_1}(x) W(dx) \right) \cdot \dots \cdot H_{p_R} \left(\int \varphi_{n_R}(x) W(dx) \right)$$

で定めるとこの operator は $\hat{L}^2(X^P)$ から $L^2(\Omega)$ への operator として拡張

される。これを P 次 multiple Wiener integral と呼ぶ。

$$\int \dots \int f(x_1, \dots, x_P) W(dx_1) \dots W(dx_P), \quad f \in \hat{L}^2(X^P)$$

で表す。

4. multiple Wiener integrals の性質.

$\mathcal{H}(\Omega) = L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}_p(\Omega) = p$ 次 multiple Wiener integral 全体,

ただし $\mathcal{H}_0(\Omega) = \mathbb{R}$

とおく。以下の 2 つは良く知られている:

1) (Ito - Wiener 展開) $\mathcal{H}(\Omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_p(\Omega)$.

2) (Fubini 型公式) $f(x_1, \dots, x_R, y_1, \dots, y_P) \in L^2(X^{R+P})$, $g(x_1, \dots, x_R, y_1, \dots, y_P) \in L^2(X^{R+P})$ とすると

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int \left[\frac{1}{(P+Q)!} \sum_{\sigma} \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_R, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(P)}) g(x_1, \dots, x_R, y_{\sigma(P+1)}, \dots, y_{\sigma(P+Q)}) \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_R) \right] W(dy_1) \cdots W(dy_{P+Q}) \\ &= \int \cdots \int \left[\int \cdots \int \frac{1}{(P+Q)!} \sum_{\sigma} f(x_1, \dots, x_R, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(P)}) g(x_1, \dots, x_R, y_{\sigma(P+1)}, \dots, y_{\sigma(P+Q)}) W(dy_1) \cdots W(dy_{P+Q}) \right] \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_R). \end{aligned}$$

3) (積公式) $f \in \widehat{L}^2(X^P)$, $g \in \widehat{L}^2(X^Q)$ とすると

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_P) W(dx_1) \cdots W(dx_P) \cdot \int \cdots \int g(x_1, \dots, x_Q) W(dx_1) \cdots W(dx_Q) \\ &= \sum \frac{P! Q!}{j! (P-j)! (Q-j)!} \int \cdots \int \left[\int \cdots \int f(x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_{P-j}) \cdot g(x_1, \dots, x_j, y_{P-j+1}, \dots, y_{P+Q-j}) W(dy_1) \cdots W(dy_{P+Q-j}) \right] \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_j). \end{aligned}$$

§2. Stochastic derivatives.

1. $R = 0, 1, 2, \dots$ 12 $\forall \mathbb{Z}$

$$\mathcal{H}(X^R \times \Omega) = L^2(X^R \times \Omega),$$

$$\mathcal{H}_p(X^R \times \Omega) = \left\{ \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_R; y_1, \dots, y_p) W(dy_1) \cdots W(dy_p); \right.$$

$$\left. f \in L^2(X^{R+P}), f(x_1, \dots, x_R; \cdot) \in \widehat{L}^2(X^P) \right\},$$

$$\mathcal{H}_{finite}(X^R \times \Omega) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^n \oplus \mathcal{H}_p(X^R \times \Omega)$$

とおく。ただし $X^0 \times \Omega = \Omega$ と考える。Ito-Wiener 展開より

$$\mathcal{H}(X^R \times \Omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_p(X^R \times \Omega).$$

以後、この展開を次のように表やす: $F \in \mathcal{H}(X^R \times \Omega)$ に対して

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_R) &= \sum_{p=0}^{\infty} F_p(x_1, \dots, x_R) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \int \cdots \int f_p(x_1, \dots, x_R; y_1, \dots, y_p) W(dy_1) \cdots W(dy_p). \end{aligned}$$

G も同様に表わされておけるとすると, $\mathcal{H}(X^R \times \Omega)$ における内積は

$$\begin{aligned} (F, G)_{\mathcal{H}(X^R \times \Omega)} &= \sum_{p=0}^{\infty} E \left[\int \cdots \int F_p(x_1, \dots, x_R) G_p(x_1, \dots, x_R) \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_R) \right] \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} p! \int \cdots \int f_p(x_1, \dots, x_R; y_1, \dots, y_p) g_p(x_1, \dots, x_R; y_1, \dots, y_p) \\ &\quad \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_R) \mu(dy_1) \cdots \mu(dy_p) \end{aligned}$$

となる。

2. Stochastic derivatives. $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ とする。μ-a.e. x に対して級数

$$\sum_{p=1}^{\infty} p \int \cdots \int f_p(x, y_1, \dots, y_{p-1}) W(dy_1) \cdots W(dy_{p-1})$$

が $\mathcal{H}(\Omega)$ で収束するとき, これを F の stochastic derivative といい

$\mathcal{D}F$ あるいは $[\mathcal{D}F](x)$ と表やす。 $\mathcal{D}$ が linear なことは明らか。

また, $F(x_1, \dots, x_R) \in \mathcal{H}(X^R \times \Omega)$ とすると μ^R -a.e. $(x_1, \dots, x_R)$ に対して

$F(x_1, \dots, x_R) \in \mathcal{H}(\Omega)$ であり, $\mathcal{D}F$ が定義可能となる。さらに

高階の stochastic derivative も

$$\mathcal{D}^j F = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{j-1} F) \quad (\mathcal{D}^0 F = F)$$

により定義できる(もちろん右辺が意味をもつときのみ)。このとき

$\mathcal{D}^j F$ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} & [\mathcal{D}^j F](x_1, \dots, x_R; x_{R+1}, \dots, x_{R+j}) \\ &= \sum_{p=j}^{\infty} \frac{p!}{(p-j)!} \int \dots \int \mathcal{F}_p(x_1, \dots, x_R; x_{R+1}, \dots, x_{R+j}, y_1, \dots, y_{p-j}) \\ & \quad W(dy_1) \dots W(dy_{p-j}). \end{aligned}$$

3. $\ell = 0, 1, 2, \dots$ に対し

$$\mathcal{H}^{(\ell)}(X^R \times \Omega) = \{F \in \mathcal{H}(X^R \times \Omega) : \mathcal{D}^j F \text{ が定義され,}$$

$$\mathcal{D}^j F \in \mathcal{H}(X^{R+j} \times \Omega), j = 0, 1, \dots, \ell\},$$

$$\mathcal{H}^{(\infty)}(X^R \times \Omega) = \bigcap_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(\ell)}(X^R \times \Omega).$$

とおく。 $\mathcal{H}^{(\ell)}(X^R \times \Omega)$ は内積

$$\begin{aligned} (F, G)_{\mathcal{H}^{(\ell)}(X^R \times \Omega)} &= \sum_{j=0}^{\ell} (\mathcal{D}^j F, \mathcal{D}^j G)_{\mathcal{H}(X^{R+j} \times \Omega)} \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{p=j}^{\infty} \frac{p!}{(p-j)!} E\left[\int \dots \int F_p G_p \mu(dx_1) \dots \mu(dx_R)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{p=j}^{\infty} \frac{p!}{(p-j)!} p! \int \dots \int \mathcal{F}_p \mathcal{G}_p \mu(dx_1) \dots \mu(dx_R) \mu(dy_1) \dots \mu(dy_p) \end{aligned}$$

で Hilbert space となる (complete は Σ とは次の Prop. による)。

この内積から導かれる norm を $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{(\ell)}(X^R \times \Omega)}$ で表わす。

4. Prop. $F \in \mathcal{H}(X^R \times \Omega)$, $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(1)}(X^R \times \Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$) とする。

$F^{(n)} \rightarrow F$ in $\mathcal{H}(X^R \times \Omega)$ ($n \rightarrow \infty$) および $\exists G \in \mathcal{H}(X^{R+1} \times \Omega)$;

$\mathcal{D}F^{(n)} \rightarrow G$ in $\mathcal{H}(X^{R+1} \times \Omega)$ ($n \rightarrow \infty$) とする。このとき, $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X^R \times \Omega)$

$\mathcal{D}F = G$ および $F^{(n)} \rightarrow F$ in $\mathcal{H}^{(1)}(X^R \times \Omega)$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ。

Proof. は Ito-Wiener 展開による。

5. Notations.

$$P = (P_1, \dots, P_m), |P| = P_1 + \dots + P_m, P! = P_1! \dots P_m!$$

$$t = (t_1, \dots, t_m)$$

$$\varphi = \{\varphi_n\} : \text{CONS in } L^2(X)$$

$$\varphi^{\otimes P}(x_1, \dots, x_{|P|}) = \varphi_1^{\otimes P_1} \otimes \dots \otimes \varphi_m^{\otimes P_m}(x_1, \dots, x_{|P|})$$

$$\Phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ として}$$

$$\Phi(\int \varphi dW) = \Phi(\int \varphi_1(x_1) W(dx_1), \dots, \int \varphi_m(x_m) W(dx_m)).$$

6. Prop. 1) $\Phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ を高々 m 項式の order とすると

$$\Phi(\int \varphi dW) = \sum_P \frac{1}{P!} \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(-t) \frac{\partial |P|}{\partial t^P} e^{-\frac{(t,t)}{2}} dt.$$

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int \dots \int \varphi^{\otimes P}(x_1, \dots, x_{|P|}) W(dx_1) \dots W(dx_{|P|}).$$

2) $\Phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ および $\frac{\partial}{\partial t_i} \Phi, i=1, \dots, m$, が高々 m 項式の order とする。このとき $\Phi(\int \varphi dW) \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathcal{D}\Phi(\int \varphi dW)](x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial t_i} \Phi(\int \varphi dW) \cdot \varphi_i(x).$$

Proof. 1) Ito-Wiener 展開したときの係数を, Hermite m 項式の性質を用いて計算する。2) 1) と 4. Prop. による。

7. $\mathcal{H}^{(1)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)$ の dense sets.

Prop. 1) $\{\Phi(\int \varphi dW); \Phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ は } m \text{ 項式}, m=1, 2, \dots\}$

は dense in $\mathcal{H}^{(l)}(\Omega)$ ($l=0, 1, 2, \dots$).

2) 1) で $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ としてよい。

3) $\{\psi(x_1, \dots, x_R) \Phi(\int \varphi dW); \psi \in L^2(X^R) \text{ は bounded}, \Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m), m=1, 2, \dots\}$ の linear span は dense in $\mathcal{H}^{(l)}(X^R \times \Omega)$.

Proof. 1) 任意の $F \in \mathcal{H}^{(l)}(\Omega)$ に対して Hermite 多項式を使うことにより $\mathcal{H}^{(l)}(\Omega)$ における近似列が構成できる。2) Φ を多項式とすると $\Phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ で $\Phi_n(\int \varphi dW) \rightarrow \Phi(\int \varphi dW)$ in $\mathcal{H}^{(l)}(\Omega)$ とするものが取れる。3) 明らか。

8. Prop. $\Phi: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ および $\frac{\partial}{\partial t_j} \Phi, j=1, \dots, r$ は bounded とし, $F^{(j)} \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega), j=1, \dots, r$ とする。このとき $\Phi(F^{(1)}, \dots, F^{(r)}) \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathcal{D}\Phi(F^{(1)}, \dots, F^{(r)})](x) = \sum_{j=1}^r \frac{\partial}{\partial t_j} \Phi(F^{(1)}, \dots, F^{(r)}) \cdot [\mathcal{D}F^{(j)}](x).$$

Proof. 7. Prop. 2), 6. Prop. 2) および 4. Prop. 12) による。

Cor. 1 $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^r)$ で $F^{(j)} \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega), j=1, \dots, r$ は bounded とすれば Prop. と同じことが言える。特に, $F, G \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ は bounded ならば $FG \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ で

$$[\mathcal{D}(FG)](x) = [\mathcal{D}F](x) \cdot G + F \cdot [\mathcal{D}G].$$

Cor. 2 Prop. で $F^{(j)} \in \mathcal{H}^{(1)}(X^R \times \Omega), j=1, \dots, r$ とすれば $\Phi(F^{(1)}, \dots, F^{(r)}) \in \mathcal{H}^{(1)}(X^R \times \Omega)$ となり, 同様の公式が成り立つ。

9. Prop. 1) $F, G \in \mathcal{H}^{(n)}(\Omega) \times L$, $G, \int \{[\mathcal{D}G](x)\}^2 \mu(dx) \in L^\infty(\Omega)$

$\times \exists \exists \times FG \in \mathcal{H}^{(n)}(\Omega) \subset$

$$[\mathcal{D}(FG)](x) = [\mathcal{D}F](x) \cdot G + F \cdot [\mathcal{D}G](x).$$

2) $F \in \mathcal{H}^{(n)}(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(n)}(X \times \Omega) \times L$, $\int G^2(x) \mu(dx)$, $\iint \{[\mathcal{D}G](x; y)\}^2 \mu(dx) \mu(dy) \in L^\infty(\Omega) \times \exists \exists \times FG \in \mathcal{H}^{(n)}(X \times \Omega) \subset$

$$[\mathcal{D}(FG(x))](y) = [\mathcal{D}F](y) \cdot G(x) + F \cdot [\mathcal{D}G](x; y).$$

Proof. 1) 7. Prop. 2) より $\exists$ bounded $F^{(n)} \rightarrow F$ in $\mathcal{H}^{(n)}(\Omega) (n \rightarrow \infty)$.

$F^{(n)}G \rightarrow FG$ in $\mathcal{H}(\Omega) \subset$, 一方, 8. Cor. 1 より

$$[\mathcal{D}(F^{(n)}G)](x) = [\mathcal{D}F^{(n)}](x) \cdot G + F^{(n)} \cdot [\mathcal{D}G](x).$$

右辺第一項 $\rightarrow [\mathcal{D}F](x) \cdot G$, 第二項 $\rightarrow F \cdot [\mathcal{D}G](x)$ in $\mathcal{H}(X \times \Omega)$

よって 4. Prop. より. 2) も同様.

10. Prop. $f \in L^2(X)$, $G \in \mathcal{H}^{(n)}(X \times \Omega) \times \exists \exists \times \int f(x)G(x) \mu(dx)$

$\in \mathcal{H}^{(n)}(\Omega) \subset$

$$[\mathcal{D}(\int f(x)G(x) \mu(dx))](y) = \int f(x) [\mathcal{D}G](x; y) \mu(dx).$$

11. $F \in \mathcal{H}_p(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}_q(\Omega)$ に対して

$$F \hat{\otimes} G = \int \cdots \int \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} f_p(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(p)}) g_q(y_{\sigma(p+1)}, \dots, y_{\sigma(p+q)}) \\ W(dy_1) \cdots W(dy_{p+q})$$

と書く。 $F \in \mathcal{H}_p(X^{\mathbb{R}+\mathbb{L}} \times \Omega)$, $G \in \mathcal{H}_q(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)$ ならば 1. 4. 2)

より $\int \cdots \int F(x_1, \dots, x_{\mathbb{R}+\mathbb{L}}) \hat{\otimes} G(x_1, \dots, x_{\mathbb{R}}) \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_{\mathbb{R}}) \in \mathcal{H}_{p+q}(X^{\mathbb{L}} \times \Omega).$

Prop. 1) $F \in \mathcal{H}^{(q+r)}(X^{R+L} \times \Omega)$, $G \in \mathcal{H}_q(X^R \times \Omega)$ とする。

Σ のとき $\sum_{p=0}^{\infty} \int \cdots \int F_p(x_1, \dots, x_L, y_1, \dots, y_R) \hat{\otimes} G(y_1, \dots, y_R) \mu(dy_1) \cdots \mu(dy_R)$ は $\mathcal{H}^{(r)}(X^L \times \Omega)$ で収束する (Σ の和を $\int \cdots \int F(x_1, \dots, x_L, y_1, \dots, y_R) \hat{\otimes} G(y_1, \dots, y_R) \mu(dy_1) \cdots \mu(dy_R)$ で表わす)。さらに

$$\begin{aligned} & \left\| \int \cdots \int F(x_1, \dots, x_L, y_1, \dots, y_R) \hat{\otimes} G(y_1, \dots, y_R) \mu(dy_1) \cdots \mu(dy_R) \right\|_{\mathcal{H}^{(r)}(X^L \times \Omega)} \\ & \leq C_{q,r} \|F\|_{\mathcal{H}^{(q+r)}(X^{R+L} \times \Omega)} \|G\|_{\mathcal{H}(X^R \times \Omega)}. \end{aligned}$$

2) $F \in \mathcal{H}^{(q+r)}(X^L \times \Omega)$, $G \in \mathcal{H}_q(\Omega)$ とする。このとき

$$\begin{aligned} & F(x_1, \dots, x_L) G \\ & = \sum_{j=0}^q \frac{1}{j!} \int \cdots \int [\mathcal{D}^j F](x_1, \dots, x_L; y_1, \dots, y_j) \hat{\otimes} [\mathcal{D}^j G](y_1, \dots, y_j) \\ & \quad \mu(dy_1) \cdots \mu(dy_j), \end{aligned}$$

$$\|FG\|_{\mathcal{H}^{(r)}(X^L \times \Omega)} \leq C_{q,r} \|F\|_{\mathcal{H}^{(q+r)}(X^L \times \Omega)} \|G\|_{\mathcal{H}(\Omega)}.$$

§3. Extended Ito integrals.

1. Def. $F \in \mathcal{H}^{(l+m)}(X^{R+m} \times \Omega)$ ($l \geq 0, m \geq 1, R \geq 0$) とする。

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{F}}_p(x_1, \dots, x_R; y_1, \dots, y_{m+p}) \\ & = \frac{1}{(m+p)!} \sum_{\sigma} \mathcal{F}_p(x_1, \dots, x_R, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(m)}; y_{\sigma(m+1)}, \dots, y_{\sigma(m+p)}) \end{aligned}$$

とおく。級数

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int \cdots \int \tilde{\mathcal{F}}_p(x_1, \dots, x_R; y_1, \dots, y_{m+p}) W(dy_1) \cdots W(dy_{m+p})$$

は $\mathcal{H}^{(l)}(X^R \times \Omega)$ において収束する。その limit を F の extended

Ito integral (E.I.I.) と言い、 $\int \cdots \int F(x_1, \dots, x_R, y_1, \dots, y_m)$

$W(dy_1) \cdots W(dy_m)$, $\int_{y_1, \dots, y_m} F$ などと表わす。さらに

$$\begin{aligned} & \left\| \int \cdots \int F(x_1, \dots, x_R, y_1, \dots, y_m) W(dy_1) \cdots W(dy_m) \right\|_{\mathcal{H}^{(l)}(X^R \times \Omega)} \\ & \leq C_{l,m} \|F\|_{\mathcal{H}^{(l+m)}(X^{R+m} \times \Omega)}. \end{aligned}$$

Proof. 級数の各項の $\mathcal{H}^{(l)}(X^R \times \Omega)$ -norm を評価する。

2. E.I.I. の性質.

1) 明らかに linear.

$$2) \widehat{F}(x_1, \dots, x_R; y_1, \dots, y_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} F(x_1, \dots, x_R, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(m)})$$

とすれば

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int F(x_1, \dots, x_R, y_1, \dots, y_m) W(dy_1) \cdots W(dy_m) \\ & = \int \cdots \int \widehat{F}(x_1, \dots, x_R; y_1, \dots, y_m) W(dy_1) \cdots W(dy_m). \end{aligned}$$

3) $l=0, m=1$ のとき $C_{0,1}=1$ と取れる。また, この場合には等号が成り立つための必要十分条件は $\forall p$ で

$$f_p(x_1, \dots, x_R, y_1; y_2, \dots, y_{p+1}) = \widehat{f}_p(x_1, \dots, x_R; y_1, \dots, y_{p+1})$$

が成り立つこと。

4) (E.I.I. に対する Fubini 型公式)

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int F(x_1, \dots, x_R, y_1, \dots, y_m) W(dy_1) \cdots W(dy_m) \\ & = \int W(dy_1) \int W(dy_2) \cdots \int F(x_1, \dots, x_R; y_1, \dots, y_m) W(dy_m). \end{aligned}$$

3. $\mathcal{D}$ と $\mathcal{J}$ の関係.

Prop. 1 $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X^{R+1} \times \Omega), G \in \mathcal{H}^{(1)}(X^R \times \Omega)$ とすると

$$\left(\int F(\cdot, x_{R+1}) W(dx_{R+1}), G \right)_{\mathcal{H}(X^R \times \Omega)} = (F, \mathcal{D}G)_{\mathcal{H}(X^{R+1} \times \Omega)}.$$

Cor. $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X^2 \times \Omega)$, $g \in L^2(X)$ とする

$$\int W(dy) \int g(x) F(x, y) \mu(dx) = \int \mu(dx) \int g(x) F(x, y) W(dy).$$

Prop. 2 $F \in \mathcal{H}^{(2)}(X^R \times \Omega)$ とする

$$\begin{aligned} & [\mathbb{D}(\int F(x_1, \dots, x_R) W(dx_R))](x_1, \dots, x_{R-1}; x) \\ &= F(x_1, \dots, x_{R-1}, x) + \int [\mathbb{D}F](x_1, \dots, x_R; x) W(dx_R). \end{aligned}$$

4. 部分積分の公式.

Prop. $F \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$, $FG(\cdot) \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$,
 $F \int G(x) W(dx)$, $\int [\mathbb{D}F](x) G(x) \mu(dx) \in \mathcal{H}(\Omega)$ とする

$$F \int G(x) W(dx) = \int FG(x) W(dx) + \int [\mathbb{D}F](x) G(x) \mu(dx).$$

Proof. §2, 9. Prop. および 3. Prop. 1 に従う。

Cor. 1 $F \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$, $F, \int G^2(x) \mu(dx)$,
 $\iint \{[\mathbb{D}G](x; y)\}^2 \mu(dx) \mu(dy) \in L^\infty(\Omega)$ とする

$$F \int G(x) W(dx) = \int FG(x) W(dx) + \int [\mathbb{D}F](x) G(x) \mu(dx).$$

Cor. 2 $F, G \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$, $\int F^2(x) \mu(dx)$, $\int G^2(x) \mu(dx)$,
 $\iint \{[\mathbb{D}G](x; y)\}^2 \mu(dx) \mu(dy) \in L^\infty(\Omega)$ とする

$$F(y) \int G(x) W(dx) = \int F(y) G(x) W(dx) + \int [\mathbb{D}F](y; x) G(x) \mu(dx).$$

5. $X = [0, 1] \sim \mathbb{R}$, $\mu(dx) = dx$ とする。 $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ とする

$a, b \in X$, $a < b$ に対して $1_{[a, b]}(\cdot) F(\cdot) \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ は明らか

だから $\int 1_{[a, b]}(y) F(y) W(dy)$ が定義される。これを $\int_a^b F(y) W(dy)$

で表わす。 $a \leq b \leq c$ に対して明かに

$$\int_a^c F(y) W(dy) = \int_a^b F(y) W(dy) + \int_b^c F(y) W(dy)$$

が成り立つ。また、上で述べた諸公式は $\int$ を $\int_a^b$ でおきかえても成り立つ。

6. E.I.I. を $\hat{L}^2(X^m)$ における CONS $\{\varphi_n\}$ で近似する。

$$K_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_1, \dots, x_m) \varphi_j(y_1, \dots, y_m)$$

と置く。このとき、

IR. $F \in \mathcal{H}^{(l+m)}(X^{R+m} \times \Omega)$ とする。

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int [F(x_1, \dots, x_R, y_1, \dots, y_m) \hat{\otimes} \int \cdots \int K_n(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m) \\ & \quad W(dz_1) \cdots W(dz_m)] \mu(dy_1) \cdots \mu(dy_m) \\ & = \int \cdots \int F(x_1, \dots, x_R, y_1, \dots, y_m) W(dy_1) \cdots W(dy_m) \text{ in } \mathcal{H}^{(l)}(X^R \times \Omega). \end{aligned}$$

Proof. は次の Lemma による。

Lem. $F \in \mathcal{H}^{(l+m)}(X^{R+m} \times \Omega)$ に対して

$$\begin{aligned} & F^{(n)}(x_1, \dots, x_R, y_1, \dots, y_m) \\ & = \int \cdots \int F(x_1, \dots, x_R, z_1, \dots, z_m) K_n(z_1, \dots, z_m, y_1, \dots, y_m) \mu(dz_1) \cdots \mu(dz_m) \end{aligned}$$

と置く

1) $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(l+m)}(X^{R+m} \times \Omega)$ で、その kernel

$$\begin{aligned} & f_p^{(n)}(x_1, \dots, x_R, y_1, \dots, y_m; u_1, \dots, u_p) \\ & = \int \cdots \int f_p(x_1, \dots, x_R, z_1, \dots, z_m; u_1, \dots, u_p) K_n(z_1, \dots, z_m, y_1, \dots, y_m) \\ & \quad \mu(dz_1) \cdots \mu(dz_m). \end{aligned}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)} = \widetilde{F}(x_1, \dots, x_R; y_1, \dots, y_m) \text{ in } \mathcal{H}^{(l+m)}(X^{k+m} \times \Omega).$$

$$3) \int \dots \int F^{(n)}(x_1, \dots, x_R, y_1, \dots, y_m) W(dy_1) \dots W(dy_m) \\ = \int \dots \int [F(x_1, \dots, x_R, y_1, \dots, y_m) \hat{\otimes} \int \dots \int K_n(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m) \\ W(dz_1) \dots W(dz_m)] \mu(dy_1) \dots \mu(dy_m).$$

§4. *-integrals.

1. $\mathcal{L}^0(X \times \Omega) = \{F: X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \mathcal{E} \times \mathcal{F}\text{-meas.}, P(\int F^2(x, \omega) \mu(dx) < \infty) = 1\}$ とおく。また $\{y_n\}$ を $L^2(X)$ の CONS とし,

$$K_n(x, y) = \sum_{j=1}^n y_j(x) y_j(y),$$

$$Z_n(x, \omega) = \int K_n(x, y) W(dy)$$

と置く。 $F \in \mathcal{L}^0(X \times \Omega)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int F(x, \omega) Z_n(x, \omega) \mu(dx)$$

が in probability で存在するとき, F は $\{y_n\}$ に関して $*$ -可積分
と云い, Z の limit を $\int F(x, \omega) W(dx)$, $\int^* F$ など表わす。この
積分の形式は小川氏により導入されたものである。

2. $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ に対して $*$ -可積分であるための条件を調べる

§2, 11. Prop. 2) より

$$\int F(x, \omega) Z_n(x, \omega) \mu(dx) \\ = \sum_{j=1}^n \int F(x, \omega) y_j(x) \mu(dx) \cdot \int y_j(y) W(dy)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \left\{ \int F(x, \omega) \varphi_j(x) \mu(dx) \hat{\otimes} \int \varphi_j(y) W(dy) \right. \\
&\quad \left. + \iint [\mathcal{D}F](x; y, \omega) \varphi_j(x) \varphi_j(y) \mu(dx) \mu(dy) \right\} \mu(dy) \\
&= \int F(x, \omega) \hat{\otimes} Z_n(x, \omega) \mu(dx) + \iint [\mathcal{D}F](x; y, \omega) K_n(x, y) \mu(dx)
\end{aligned}$$

従って, §3, 6. Th. より

Th. $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ が $\{\varphi_n\}$ に関して $\ast$ -可積分となるための必要十分条件は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint [\mathcal{D}F](x; y, \omega) K_n(x, y) \mu(dx) \mu(dy)$$

が in probability で存在する $\mathbb{Z}$ とで, $\mathbb{Z}$ のとき

$$J^*F = JF + \lim_{n \rightarrow \infty} \iint [\mathcal{D}F](x; y, \omega) K_n(x, y) \mu(dx) \mu(dy).$$

§5. The Ito formula for E.I.I.

1. $X = \mathbb{R}$, $\mu(dx) = dx$ とする。

Th. $\mathbb{Z} \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $F \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R} \times \Omega) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times \Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R} \times \Omega) \times L$

$$L(x) = \mathbb{Z} + \int_a^x F(y) W(dy) + \int_a^x G(y) dy$$

とおく。 $\mathbb{Z}$ のとき任意の $\Phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}
(\star) \quad \Phi(L(t)) &= \Phi(\mathbb{Z}) + \int_a^t \Phi'(L(x)) F(x) W(dx) + \int_a^t \Phi'(L(x)) G(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_a^t \Phi''(L(x)) F^2(x) dx \\
&\quad + \int_a^t \Phi''(L(x)) \left\{ [\mathcal{D}\mathbb{Z}](x) + \int_a^x [\mathcal{D}F](y; x) W(dy) \right. \\
&\quad \left. + \int_a^x [\mathcal{D}G](y; x) dy \right\} F(x) dx.
\end{aligned}$$

Proof. は以下の lemmas による。

Lem.1 $\bar{z} \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $F \in \mathcal{H}^{(2)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \{[\mathcal{D}F](x)\}^2 dx \in L^\infty(\Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R} \times \Omega) \geq 0$

$$L(x) = \bar{z} + \int_a^x F W(dy) + \int_a^x G(y) dy$$

とおく。このとき任意の $\Phi \in C_b^3(\mathbb{R})$ に対して、 $(*)$ において $F(x)$ を F で、 $[\mathcal{D}F](y; x)$ を $[\mathcal{D}F](x)$ で置きかえた式が成り立つ。

Lem.2 Lem.1 において $\Phi \in C_b^3(\mathbb{R})$ は $\Phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ としてよい。

Lem.3 1) Th. の仮定の下で、 $(*)$ の各項はすべて $\mathcal{H}(\Omega)$ に属する。

2) $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R} \times \Omega) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times \Omega)$, $n = 1, 2, \dots$, が存在して $F^{(n)} \rightarrow F$ in $\mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R} \times \Omega)$, また各 $F^{(n)}$ に対して

$$L^{(n)}(x) = \bar{z} + \int_a^x F^{(n)}(y) W(dy) + \int_a^x G(y) dy$$

とおくとき

$$\begin{aligned} \Phi(L^{(n)}(t)) &= \Phi(\bar{z}) + \int_a^t \Phi'(L^{(n)}(x)) F^{(n)}(x) W(dx) \\ &\quad + \int_a^t \Phi'(L^{(n)}(x)) G(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^t \Phi''(L^{(n)}(x)) (F^{(n)})^2(x) dx \\ &\quad + \int_a^t \Phi''(L^{(n)}(x)) \{ [\mathcal{D}\bar{z}](x) + \int_a^x [\mathcal{D}F](y; x) W(dy) \\ &\quad + \int_a^x [\mathcal{D}G](y; x) dy \} F^{(n)}(x) dx \end{aligned}$$

が成り立つならば $(*)$ が成り立つ。

Lem.4 Lem.2 において $\int_{-\infty}^{\infty} \{[\mathcal{D}F](x)\}^2 dx \in L^\infty(\Omega)$ の条件は省くことができる。

Lem.5 $\bar{z} \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$, $F^{(j)} \in \mathcal{H}^{(2)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R} \times \Omega) \geq 0$,

$$F(x) = \sum_{j=1}^n 1_{(x_{j-1}, x_j]}(x) F^{(j)} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = t)$$

$$L(x) = \bar{z} + \int_a^x F(y) W(dy) + \int_a^x G(y) dy$$

とおく。このとき任意の $\Phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ に対して $(\star)$ が成り立つ。

§ 6. Duality.

1. $\mathcal{H}^{(\ell)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)$ について。§ 2, 3 のように $\mathcal{H}^{(\infty)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)$ は countably Hilbert space となる。 $\mathcal{H}^{(\ell)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)$ の dual space を $\mathcal{H}^{(-\ell)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)$ で、 $\mathcal{H}^{(-\ell)}$ の norm を $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{(-\ell)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)}$ で表す。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(\infty)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega) &\subset \cdots \subset \mathcal{H}^{(\ell+1)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega) \subset \mathcal{H}^{(\ell)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega) \subset \cdots \\ &\cdots \subset \mathcal{H}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega) \subset \cdots \subset \mathcal{H}^{(-\ell)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega) \subset \mathcal{H}^{(-\ell-1)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega) \subset \cdots \end{aligned}$$

で、 $\mathcal{H}^{(\infty)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)$ の dual space

$$\mathcal{H}^{(-\infty)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega) = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{H}^{(-\ell)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)$$

となることはよく知られている。また、定義より、

$$\|H\|_{\mathcal{H}^{(-\ell)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)} = \sup_{\|F\|_{\mathcal{H}^{(\ell)}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)}=1} \langle H, F \rangle.$$

ここで $\langle H, F \rangle$ は duality に関する bilinear form で、 $H \in \mathcal{H}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)$ ならば明かに

$$\langle H, F \rangle = (H, F)_{\mathcal{H}(X^{\mathbb{R}} \times \Omega)}.$$

2. $F \in \mathcal{H}(X \times \Omega)$, $G \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ とする。 $\mathcal{D}: \mathcal{H}^{(1)}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(X \times \Omega)$

は cont. linear だから $G \mapsto (F, \mathcal{D}G)_{\mathcal{H}(X \times \Omega)}$ は $\mathcal{H}^{(1)}(\Omega)$ 上の

cont. linear functional となる。従って

$$\exists H \in \mathcal{H}^{(-1)}(\Omega) : (F, DG)_{\mathcal{H}(X \times \Omega)} = \langle H, G \rangle,$$

即ち, $\exists$ cont. linear op. $J : \mathcal{H}(X \times \Omega) \rightarrow \mathcal{H}^{(-1)}(\Omega)$ s.t.

$$(F, DG)_{\mathcal{H}(X \times \Omega)} = \langle JF, G \rangle, \quad \forall G \in \mathcal{H}^{(1)}(\Omega).$$

この JF のことを E.I.I. と呼び, $\int F(x) W(dx)$ と表わす。

ここで $\int$ で用いたのと同じ記号を使うことは次の Prop. により正当化される。

Prop. $F \in \mathcal{H}^{(1)}(X \times \Omega)$ に対しては, 上で定義した E.I.I. と $\int$ で定義したものは一致する。

3. Itô 積分との関連について述べる。 $X = [0, 1]$, $\mathcal{X} = \mathcal{B}([0, 1])$
 $\mu(dx) = dx$ とする。即ち W は 1次元 B.M. $\{B(x); 0 \leq x \leq 1\}$
 から導かれるものとする。 $\mathcal{F}_x = \sigma\{B(y); 0 \leq y \leq x\}$ とおく。

Prop. $F \in \mathcal{H}(X \times \Omega)$ が $\mathcal{F}_x$ -adapted ならば $\int F(x) W(dx)$ は
 通常の Itô 積分 $\int_0^1 F(x) dB(x)$ と一致する。

従って, $\int_a^b F(x) W(dx) = \int 1_{(a, b]}(x) F(x) W(dx)$ に対しても

$$\int_a^b F(x) W(dx) = \int_a^b F(x) dB(x)$$

が成り立つ。

§5.1.Th. において $\mathcal{F}_0$ -adapted, F, G : $\mathcal{F}_x$ -adapted と
 する。このとき (*) において右辺の最終項 = 0 となることは
 容易に示すことができる。従ってこの場合 (*) は通常の Itô
 の公式に他ならないことがわかる。

REFERENCES

- [1] Yu.Daletskii and S.N.Paramonova, Stochastic integrals with respect to a normally distributed additive set function, Soviet Math. Dokl., 14(1973), 96-99.
- [2] Yu.Daletskii and S.N.Paramonova, On a formula from the theory of Gaussian measures and on the estimation of stochastic integrals, Theory Prob. Appl., 19(1974), 812-817.
- [3] M.Hitsuda, Formula for Brownian partial derivatives, Second Japan-USSR symposium on probability theory, Kyoto, (1972), 111-114.
- [4] K.Ito, Multiple Wiener integral, J.Math.Soc.Japan, 3(1951), 157-169.
- [5] S.Ogawa, Quelques proprietes de l'integrale stochastique du type noncausal, (to appear in Japan J. Appl. Math.)
- [6] A.Ju.Seveljakov, Stochastic differentiation and integration of functionals of a Wiener process, Teor. Slucainyh Processov, 6(1978), 123-131.
- [7] A.Ju.Seveljakov, The Ito formula for the extended stochastic integral, Theory Prob. and Statist., 22(1981), 163-174.
- [8] A.V.Skorokhod, On a generalization of a stochastic integral, Theory Prob. Appl., 20(1975), 219-233.
- [9] M.A.Berger and V.J.Mizel, Theorems of Fubini type for iterated stochastic integrals, Bull.Amer.Math.Soc., 252(1979), 249-274.
- [10] M.A.Berger and V.J.Mizel, An extension of the stochastic integrals, Ann.of Prob., 10(1982), 435-450.